Università di Torino

QUADERNI
DIDATTICI
del
Dipartimento di Matematica

M. GARETTO, P.L. PEZZINI

Tecnologie per la Didattica
Derive

Laboratorio S.I.S.
A.A. 2002/2003

Quaderno # 21 – Ottobre 2003

Some mathematics becomes more important because technology requires it.
Some mathematics becomes less important because technology replaces it.
Some mathematics becomes possible because technology allows it.
Bert Waits

La citazione è tratta dalla pagina Web
http://b.kutzler.com/main.asp

L’immagine è tratta dalla pagina Web
http://www.cabri.net:16080/cabriole/Divers/dessins1.html

Premessa

I laboratori didattici della S.I.S. aventi come obiettivo “il possesso da parte dello specializzando degli strumenti necessari per il montaggio di una situazione didattica sul tema del laboratorio”[1] hanno consentito l’interazione e la collaborazione tra docente universitario e insegnante di scuola superiore.

Attraverso il confronto, il dialogo e l’operatività comune, unendo le specifiche conoscenze e competenze acquisite negli anni di esperienza in Università e in scuola, i laboratori S.I.S. hanno permesso una proficua e costruttiva collaborazione, che ha favorito una preparazione dei nuovi docenti che tenesse conto sia di adeguate e approfondite conoscenze disciplinari sia della loro effettiva spendibilità didattica con gli studenti.

Nell’ambito della S.I.S. Piemonte nell’a.a. 2002/03 è stato attivato il Laboratorio di Tecnologie per la didattica, avente come tema la conoscenza e l’uso delle tecnologie informatiche in ambito matematico.

Questo lavoro, insieme a quello riguardante Cabri[2], costituisce la raccolta del materiale preparato e utilizzato nel laboratorio; entrambi nascono inizialmente da alcuni lavori svolti in classe in vari anni di insegnamento, dalla partecipazione a gruppi di ricerca sull’utilizzo di Cabri in ambito geometrico e di Derive nella computer algebra, dalla presentazione di diversi approcci all’uso di Cabri e di Derive in ambito didattico, che si possono ritrovare in vari testi per la scuola presenti in commercio, alcuni dei quali citati nella bibliografia.

Maria Garetto
Pier Luigi Pezzini

Torino, 30 settembre 2003

[1] Piano di fattibilità della Scuola di Interateneo di Specializzazione per la formazione degli insegnanti della Scuola Secondaria S.I.S.

[2] Pezzini P.L., Garetto M., *Tecnologie per la didattica: Cabri*. *Laboratorio S.I.S. 2002/2003,* Quaderni Didattici del Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino, Quaderno n° 22, Ottobre 2003

Indice

1. *Introduzione*

I primi tentativi di introduzione dell'informatica nella didattica della matematica sono stati effettuati all'inizio degli anni ottanta. Con l'avvio del Piano Nazionale per l'Informatica (P.N.I.), il laboratorio di computer entrava in tutte le scuole secondarie superiori e l'informatica si aggiungeva al curricolo di matematica del biennio.
I programmi del Piano Nazionale per l'Informatica hanno introdotto nell'insegnamento della matematica un'innovazione di carattere metodologico-contenutistico alla quale è doveroso far riferimento per l'insegnamento di tale disciplina.
Tra le innovazioni di maggior rilevanza si ha l'introduzione dell'informatica nell'insegnamento della matematica. Su tali programmi, per quanto riguarda il laboratorio informatico, si legge:

Biennio

Laboratorio di informatica

L'attività di laboratorio, distribuita lungo tutto l'arco del biennio, integra gli elementi di contenuto dei vari temi e costituisce essa stessa un momento di riflessione teorica. Esso consisterà in:

a) Analisi di problemi e loro soluzione informatica attraverso sia la costruzione di un programma e il controllo della sua esecuzione, **sia l'utilizzo di programmi già disponibili e di software di utilità.** In quest'ultimo caso l'utilizzo di tale "ambiente" sarà finalizzato ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi dotati di loro regole formali e limiti operativi.

b) Esplorazioni e verifiche di proprietà matematiche, rappresentazioni grafiche e calcoli, come momenti costitutivi del processo di apprendimento della matematica e delle sue successive sistematizzazioni.

Triennio

Informatica

a) Implementazione di algoritmi numerici diretti e iterativi, controllo della precisione.

b) Convergenza dei metodi iterativi. Algoritmi ricorsivi. Algoritmi definiti in modo iterativo e in modo ricorsivo

c) *Il concetto di algoritmo. Esempi di funzioni non calcolabili. Esempi di problemi non decidibili.*

Commento al tema : Informatica

….Di questi argomenti potrà usarsi in laboratorio, in modo più avanzato, lo stesso ambiente di programmazione conosciuto nel biennio, nonché avvalersi di idoneo software didattico. Sarà didatticamente opportuno utilizzare software didattico anche in relazione ad altri ambiti (geometria, statistica ecc.)…

da "Programmi P.N.I. per il biennio (circolare n° 24 del 6/2/91)
e per il triennio (circolare n° 615 del 27/9/96)

Il laboratorio informatico, nelle intenzioni di chi ha elaborato i nuovi programmi, deve dunque svolgere una duplice funzione: da una parte di riflessione nel momento di analisi di

un problema, con la possibilità di costruire algoritmi risolutivi che possono essere implementati con adeguati linguaggi di programmazione, e dall'altra di esplorazione e verifica di proprietà, "come momenti costitutivi del processo di apprendimento della matematica e delle sue successive sistematizzazioni".
Il laboratorio informatico prevede inoltre l'utilizzo di software di programmazione (il linguaggio Pascal è stato ed è tuttora il più utilizzato a livello scolastico) e di "idonei software didattici".
Dalla prima formulazione di tali programmi (quella del biennio risale al 1985 e del triennio al 1991), alle successive formulazioni degli anni novanta (riprese e integrate anche in programmi globali quali quello BROCCA per i licei, ABACUS, IGEA, EGON, AMBRA ecc. per gli istituti tecnici o nel Progetto 92 per gli Istituti Professionali) ed alla loro introduzione nei corsi sperimentali dei vari indirizzi (quasi tutte le scuole superiori hanno alcune sezioni con i nuovi programmi[1]) l'informatica è progressivamente entrata nella scuola, ed in particolare nella didattica della matematica.

L'uso di tali tecnologie in ambito scolastico si inoltre è progressivamente trasformato dalla prima introduzione ad oggi. A ciò hanno contribuito sia le varie attività di sperimentazione, che ne hanno evidenziato gli aspetti positivi mettendone altresì in luce i limiti ed i rischi, sia la rapida evoluzione del mondo informatico in termini di hardware e software.
Se inizialmente molti sforzi si sono concentrati sull'insegnamento di un linguaggio di programmazione, da utilizzare quale strumento per implementare algoritmi risolutivi di problemi di varia natura, col tempo tale spazio si è progressivamente ridotto in favore dell'utilizzazione di "software idonei" ai vari ambiti disciplinari, che spesso forniscono un supporto più immediato ed efficace alla didattica.
L'immissione sul mercato di nuovi software, sempre più potenti e "amichevoli", alcuni direttamente finalizzati all'uso didattico, altri che ne permettono un valido utilizzo con gli studenti, ha ulteriormente favorito una presenza ampia e diffusa dello strumento informatico in classe.
Parallelamente si è aperto e intensificato un ampio dibattito a più livelli sulle problematiche che tali innovazioni hanno apportato alla didattica, per evidenziarne le implicazioni sia sul piano metodologico sia sulle dinamiche di apprendimento.
Il gran numero iniziale di docenti perplessi o contrari alla diffusione della tecnologia informatica è sempre più limitato e sempre meno convinto; difatti non si può non prendere atto che l'uso del computer, investendo e trasformando ogni attività umana in modo inevitabile ed inarrestabile, non può essere estraneo alla scuola.
Allo stesso tempo stanno venendo meno alcune posizioni che vedono nell'uso del computer l'automatica possibilità di interessare lo studente, di rendere la didattica nuova e piacevole, di avvicinare la scuola alla società.
Affermazioni quali "Gli strumenti multimediali sono estremamente motivanti per bambini e ragazzi perché non hanno odore di scuola…"[2] attribuiscono allo strumento multimediale una eccessiva funzione autoreferente. Infatti l'esperienza mostra che, superato l'entusiasmo iniziale per la novità, il computer ben presto inizia ad "odorare di scuola" come la lavagna, i professori, i libri.
Sicuramente l'introduzione del computer in classe può dare maggior motivazione e far crescere la partecipazione e l'interesse dei ragazzi anche se non è il caso di farsi illusioni:

[1] Circa l'80% nel 1997 (Ciarrapico, 1997)
[2] Dalla 'sintesi dei lavori della commissione tecnico-scientifica incaricata di individuare le conoscenze fondamentali dei giovani della scuola italiana nei prossimi decenni [DM. N. 50 del 21.1.1997 e n. 84 del 5.2.1997, a cura del coordinatore R. Maragliano, 13.5.1997]

la motivazione cala velocemente quando l'uso diventa un'abitudine.
Certamente può esser utile spostare l'accento dall'esecuzione dei calcoli alla progettazione di un percorso risolutivo[3], anche se per costruire qualunque concetto matematico sono necessarie conoscenze di base concernenti anche il calcolo.[4]
In conclusione, dal dibattito degli ultimi anni emerge in modo netto la convinzione che la figura del docente rimanga centrale.
In questa nuova situazione se "da una parte si aprono enormi possibilità didattiche, dall'altra bisogna essere consapevoli che non si tratta affatto di traguardi assicurati automaticamente dall'uso dei nuovi strumenti"[5].
Occorre dunque da parte dei docenti un notevole impegno di aggiornamento sia per acquisire le conoscenze e le capacità indispensabili ad usare nuovi software, sia per ripensare la propria didattica trasformandola in modo attivo e ragionato, rendendola così più agile e più attenta alle esigenze che la realtà impone.

Nel campo matematico sono numerosi i software che si sono sviluppati in questi anni relativamente ad ambiti diversi:

- Geometria dinamica
- Calcolo e manipolazione numerica e algebrica
- Computer graphics
- Calcolatrici grafico-simboliche
- Analisi di dati e costruzione di istogrammi e grafici

Anche a tal riguardo il dibattito che si è aperto a vari livelli risulta interessante e stimolante, e anche qui si possono rilevare posizioni diversificate.
Ad esempio, in merito agli strumenti di calcolo simbolico esiste in certi ambienti pedagogici l'idea assai ingenua che con tali strumenti si potrebbe semplificare l'apprendimento della matematica. Per altri i concetti stanno nella testa, quindi tali strumenti non possono essere utili per imparare matematica[6].
Se da una parte ricerche didattiche approfondite, sul lungo termine, fanno vedere come l'apprendimento della matematica con tali strumenti si rivela più complesso per gli allievi e quindi anche per il suo insegnamento[7], dall'altra fanno anche vedere la potenzialità di tale uso, sia per una comprensione più ampia, sia perché rende possibile lo studio di modelli complessi .
L'introdurre sul lungo termine uno strumento di calcolo simbolico e grafico dà all'allievo una grande autonomia che non è però esente da rischi. E' responsabilità dell'insegnante proporre un ammaestramento delle varie tecniche sia legate allo strumento (alternanza tra rappresentazione grafica, calcolo numerico e simbolico) che alla sua regolazione, con sviluppi fatti a mano o con teoremi di matematica[6].
Quello informatico è dunque uno strumento ricco di potenzialità che possono emergere solo grazie a colui che lo utilizza, sia esso un docente o uno studente.

---

3 "«Ragiona, non perderti nei calcoli» è la regola aurea della matematica" , Lolli G., *Il riso di Talete*, Bollati Boringhieri, Torino, 1998, pag. 54

4 Dorigotti G., *Matematica e informatica nel triennio amministrativo*, 1999, articolo in rete, vedere elenco siti

5 Russo L., *Segmenti e Bastoncini*, Feltrinelli, 1998

6 Ruhal Floris, *Valutare le conoscenze matematiche teoriche degli allievi in un corso di analisi fatto usando la tecnologia simbolica*, Ipotesi n° 1/2002

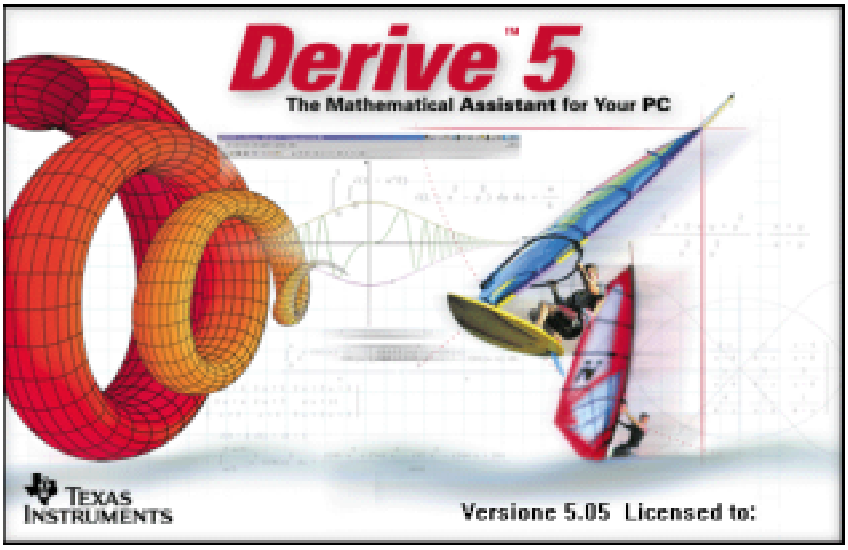
7 Trouche L. *Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse, IREM de Montpellier

E’ dunque importante innanzitutto una buona conoscenza del software in termini di caratteristiche, potenzialità e limiti, associata ad un approfondimento sulle implicazioni didattiche sia sul piano metodologico che contenutistico. A tal riguardo un software di veloce apprendimento è a volte preferibile ad altri più complessi, perché permette di concentrare l’attività sulle problematiche disciplinari senza grandi perdite di tempo.
Rimane comunque la convinzione che “un uso di appropriati software matematici possa indurre un modo nuovo e più coinvolgente nel ‘fare matematica’ e determinare un cambiamento non indifferente, in termini migliorativi, in relazione all’approccio metodologico”[8]

[8] Arzarello F., Ciarrapico L., *Presentazione del Progetto Labclass* , Quaderno n° 44 del M.P.I., 2001

2. *Derive 5: The Mathematical Assistant for your PC*

Derive è uno dei più noti e diffusi sistemi di elaborazione simbolica, detti anche CAS (Computer Algebra Systems); altri prodotti software ben noti di tipo CAS sono Mathematica e Maple.
Con Derive si possono eseguire calcoli simbolici e numerici, algebrici, trigonometrici, analitici, disegnare grafici di curve e superfici in due e in tre dimensioni e molto altro.
Un sistema di calcolo di questo tipo permette un approccio alla matematica da più punti di vista, sia algebrico, sia grafico e numerico, e mette in evidenzia le relazioni che intercorrono fra di essi.
Ad esempio la soluzione di un'equazione algebrica può essere trovata algebricamente fattorizzando il polinomio, graficamente localizzando i punti in cui la curva interseca l'asse delle ascisse, numericamente con la tecnica di bisezione o altri metodi simili.

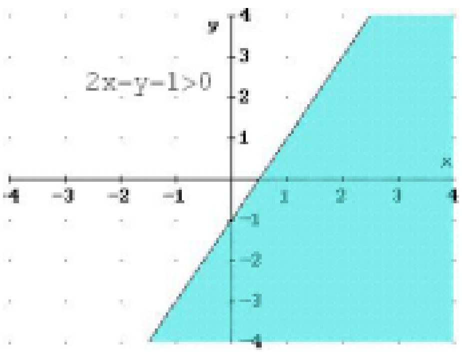


La prima versione di Derive risale al 1988 e le sue caratteristiche principali erano: dimensioni del programma estremamente ridotte, risorse di sistema necessarie per il suo utilizzo molto limitate (funzionava su PC con sistema operativo MS-DOS, con una memoria di almeno 512 Kb) e soprattutto grande semplicità di utilizzo.
Nel 1996 uscì Derive per Windows, adatto per operare sui sistemi operativi MS Windows e Windows NT e dotato di interfaccia grafica.
Nel 1999 la Texas Instruments acquistò la Soft Warehouse Inc., società produttrice di Derive, e continuò a promuoverlo e a migliorarlo.
Nel 2000 è uscita l'ultima versione di Derive per Windows, la versione 5, che presenta notevoli miglioramenti rispetto alle precedenti; negli anni successivi sono poi usciti alcuni aggiornamenti con ulteriori aggiunte e correzioni di bugs.
Questa nuova versione conserva la compattezza e le dimensioni molto contenute, che erano fra le caratteristiche più apprezzate: rispetto alla maggior parte dei CAS disponibili sul mercato le dimensioni di Derive sono molto piccole; è pienamente integrato con la filosofia grafica di Windows; è semplice da usare e le risorse di sistema richieste sono veramente minime.
Una volta installato il programma occupa circa 4MB, compresa una guida in linea completa e una ricca libreria di funzioni e fogli di lavoro.

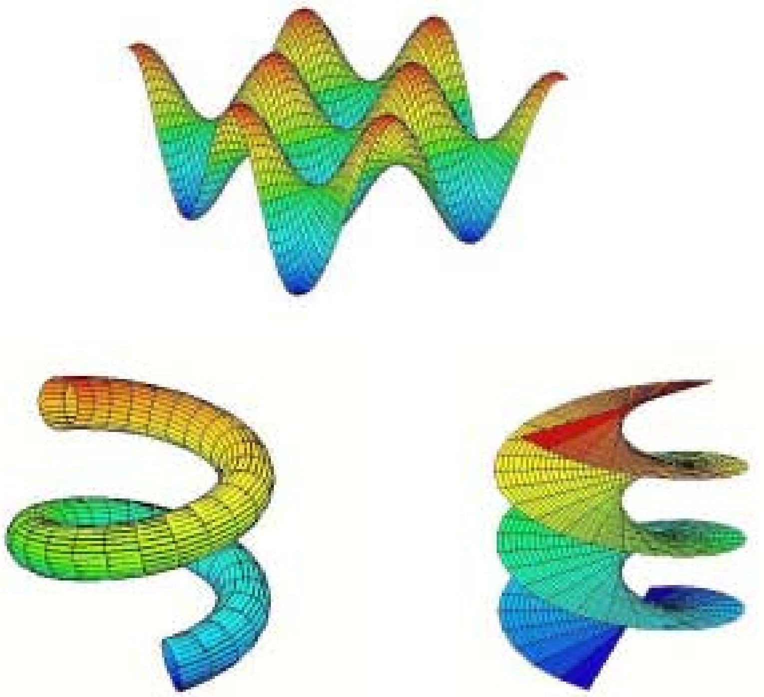
A fronte di esigenze così ridotte rispetto ad altri programmi di matematica, Derive è uno strumento di Computer Algebra a tutti gli effetti; con Derive si possono semplificare, sviluppare o fattorizzare espressioni comunque complicate; possono essere risolte equazioni e sistemi di equazioni, sia in modo algebrico che numerico; si possono risolvere problemi di calcolo differenziale e integrale, di calcolo vettoriale, matriciale; inoltre è possibile tracciare grafici in due e in tre dimensioni.

All'avvio del programma si apre la finestra algebra, dotata di un'interfaccia completamente grafica; tra le sue caratteristiche si osserva la presenza della linea di editing e della barra dei simboli, che consentono una semplice introduzione delle espressioni; le capacità di editing sono buone e consentono correzioni e modifiche sia delle espressioni eseguibili che del testo di commento con il semplice uso del mouse.
Quando si sceglie un comando da uno dei menu, ad esempio Semplifica o Calcola, si apre una finestra di dialogo che consente una varietà di scelte.
La scelta di default è spesso sufficiente per fornire il risultato richiesto, almeno nei casi più semplici, ma in altri casi può essere indispensabile poter disporre di altre scelte; ad esempio il comando Fattorizza del menu Semplifica include, fra le altre, l'opzione di fattorizzare usando coefficienti complessi.
E' possibile visualizzare contemporaneamente sia la finestra di calcolo che la finestra grafica, rendendo agevole il passaggio dall'una all'altra: in questo modo si può ad esempio visualizzare contemporaneamente un grafico e la corrispondente equazione.
Nei fogli di lavoro è possibile incorporare oggetti di testo e oggetti grafici, creati con Derive o con altri applicativi di ambiente Windows; si possono così creare dei fogli di lavoro matematici completi di testo, grafici e note, ben documentati e formattati in modo libero, da condividere con altri utenti.
I fogli di lavoro possono essere salvati sotto forma di file nel formato .dfw, (o anche nel formato .mth leggibile dalle precedenti versioni di Derive, con qualche limitazione) e riaperti e modificati in successive sessioni di lavoro; tali fogli possono anche essere scritti in un file .rtf (Rich Text Format), utilizzabili da un word-processor (Word).
La possibilità di scegliere le dimensioni dei caratteri usati per le espressioni facilità l'utilizzo in aula di questo programma con un proiettore collegato a un PC: in questo modo è possibile mostrare a una classe di allievi ciò che man mano il docente svolge sul suo PC.

Derive ha capacità grafiche veramente innovative e interessanti; una possibilità è quella di tracciare il "grafico" di una disequazione: ad esempio l'insieme dei punti del piano che soddisfano una disequazione lineare di primo grado viene rappresentato come un semipiano delimitato dalla retta avente la corrispondente equazione

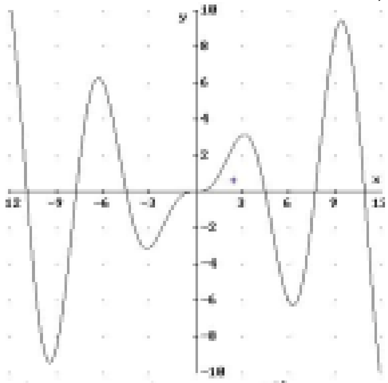


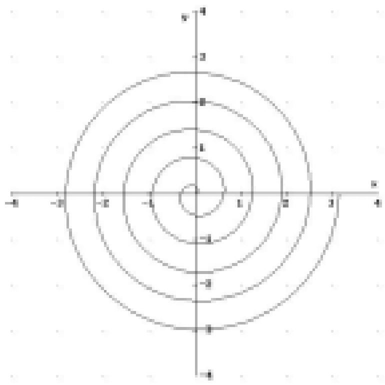
Una funzionalità interessante è quella di effettuare operazioni di rotazione e zoom sui grafici; le superfici in 3D possono essere visualizzate in coordinate cartesiane, sferiche, cilindriche, o in forma parametrica; i grafici prodotti possono essere annotati con testo descrittivo ed esportati nei formati grafici più comuni o inseriti nel foglio di lavoro corrente.
La qualità dei grafici in 3D che si possono realizzare con la versione 5.05 è nettamente migliorata rispetto alle versioni precedenti: ora si possono realizzare grafici di qualità paragonabile a quelli realizzati con altri programmi.
Alcuni esempi sono riportati nella figura seguente

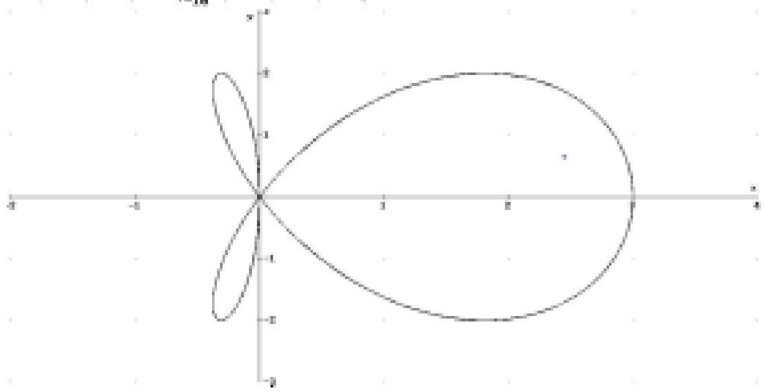


Derive, oltre a capacità grafiche piuttosto interessanti, è dotato soprattutto di capacità di calcolo e manipolazione algebrica, fondamentali per un sistema di calcolo simbolico.
Una caratteristica estremamente interessante dei CAS è di poter operare in aritmetica esatta e in aritmetica ad alta precisione.
Aritmetica esatta significa che quantità come i numeri irrazionali, i logaritmi, gli esponenziali e così via, rimangono tali finché non si richiede di approssimarli: ad esempio l'espressione $\dfrac{\mathrm{LN}(5)+\mathrm{LN}(3)}{\sqrt{8}}$ viene semplificata nella forma $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\mathrm{LN}(15)}{4}$.
Aritmetica in alta precisione significa che il numero di cifre può essere scelto arbitrariamente, compatibilmente con le caratteristiche del processore del computer.
Derive può risolvere equazioni, e sistemi di equazioni, in modo algebrico e in modo approssimato, sia per equazioni algebriche che trascendenti; per trovare le soluzioni in modo approssimato non si richiede di indicare obbligatoriamente un intervallo in cui cade la radice; questa caratteristica funziona bene nel caso di equazioni algebriche e si trovano tutte le soluzioni, mentre nel caso di equazioni trascendenti il funzionamento è meno efficace e in molti casi si determina una sola soluzione, anche se l'equazione ne possiede più di una; per trovare le altre è necessario specificare l'intervallo, cosa per altro non troppo complicata nella maggior parte dei casi viste le capacità grafiche di Derive.

Molti problemi tipici del calcolo differenziale e integrale possono essere risolti in modo semplice per mezzo dei comandi di Derive: limiti, derivate, integrali definiti e indefiniti possono essere calcolati usando gli strumenti della finestra di lavoro.
Derive può tracciare il grafico di funzioni di molti tipi diversi, semplicemente scrivendone l'equazione e attivando un pulsante con il mouse, dopo aver aperto la finestra grafica 2D.
Due esempi sono riportati nella figura seguente: si tratta di una funzione in coordinate cartesiane, di una spirale in coordinate polari e di una curva assegnata in forma parametrica (gli ultimi due esempi sono tratti da file di libreria di Derive)







La facilità con cui in questo ambiente si possono risolvere molti problemi del calcolo differenziale e l'immediatezza con cui si può realizzare il grafico di una funzione possono far apparire lo studio di funzione un'operazione immediata e di semplice esecuzione anche per chi non conosce tutti i metodi analitici necessari per lo studio di una funzione.
In realtà queste potenzialità grafiche non devono trarre in inganno: come verrà evidenziato in modo dettagliato nei fogli di lavoro che saranno presentati nel capitolo 4, si possono verificare dei casi piuttosto sorprendenti in cui Derive fornisce grafici "sbagliati": non si tratta in effetti di grafici sbagliati, ma della conseguenza di scelte su cui è basato il programma. Derive lavora con funzioni di variabile complessa e a valori complessi e questo produce come risultato grafici che possono essere in qualche caso diversi da quelli che si ottengono lavorando con funzioni reali di variabile reale: un esempio è fornito dalla funzione radice cubica, di cui si parlerà nel § 4.8 dedicato alle funzioni elementari.
E' quindi indispensabile un uso critico del software e in questo il ruolo dell'insegnante è fondamentale: Derive rappresenta un potente e affidabile strumento di calcolo, ma i risultati ottenuti devono essere interpretati con gli opportuni strumenti matematici.

Manca ancora all'interno di Derive un linguaggio di programmazione adeguato, per rendere il software più flessibile e di utilizzo più generale; è possibile realizzare programmi con Derive, ma si tratta di una programmazione semplice di tipo funzionale e

non procedurale, ossia vengono utilizzate solo combinazioni di funzioni definite in precedenza.
In sostanza quindi ogni programma in ambiente Derive è costituito da funzioni e da concatenazioni di funzioni.
Sono previste comunque alcune strutture tipiche della programmazione, ad esempio la struttura condizionale IF; si possono realizzare calcoli ripetuti con la funzione VECTOR; si possono eseguire iterazioni con le funzioni ITERATES e ITERATE; è inoltre possibile usare la ricorsione. Nella versione 5 sono state anche introdotte le funzioni PROG e LOOP, che consentono di eseguire più istruzioni in sequenza e di realizzare cicli.
Le possibilità di programmazione sono migliorate rispetto alle versioni precedenti, ma la scrittura del programma è molto scomoda, dovendo essere fatta completamente dalla riga di editing, e si commettono facilmente molti errori: è chiaro che Derive non può, allo stato attuale, costituire un'alternativa al linguaggio Pascal per gli insegnanti che svolgono nei loro programmi argomenti di programmazione.

Questo lavoro si rivolge in particolare agli allievi della Sis e ai docenti che, non conoscendo Derive, possono avvicinarsi all'uso di tale software mediante semplici esercizi.
Nel capitolo 3 vengono descritte le caratteristiche e le funzionalità di base del programma, mediante una breve descrizione dei menu, degli strumenti e delle funzioni che esso mette a disposizione.
Successivamente, nel capitolo 4, sono raccolti numerosi fogli di lavoro realizzati interamente con Derive, in cui gli esempi trattati sono completamente risolti e commentati.
Questi fogli di lavoro sono stati preparati con il duplice scopo di guidare l'utente inesperto ad apprendere l'uso del software, mettendone in risalto le potenzialità e le applicazioni, e di fornire qualche idea per un suo utilizzo in ambito didattico.
Gli argomenti trattati sono stati scelti fra quelli più tipici sia del biennio che del triennio della scuola superiore, in modo da poter trarre spunti per l'attività di laboratorio e per la preparazione di schede di lavoro da proporre agli studenti.
I fogli di lavoro vengono riportati nel capitolo 4 nella veste in cui sono stati realizzati con il software, formattati con lo stile e i caratteri tipici di Derive; questa scelta consente di mantenersi il più vicino possibile all'ambiente di studio, anche se la qualità editoriale non è certo ottima.
Molte idee interessanti, utili per la realizzazione di schede di lavoro e di verifica, e numerosi esercizi da svolgersi con l'aiuto di Derive possono essere trovati sui testi di P. Boieri e di C. Di Stefano citati nella Bibliografia.
In rete è possibile trovare una grande quantità di materiale sull'uso delle nuove tecnologie nella didattica e in particolare su Derive; nel capitolo 5 si trova un elenco di siti, ciascuno accompagnato da un sintetico commento.
I link sono stati tutti verificati nel settembre 2003, ma la velocità con cui il Web si evolve può far sì che qualche indirizzo non sia più valido.
L'elenco non ha ovviamente alcuna pretesa di completezza e della scelta sono responsabili gli autori; per altri indirizzi di siti matematici si rimanda al quaderno didattico del Laboratorio S.I.S. 2000/2001[1]

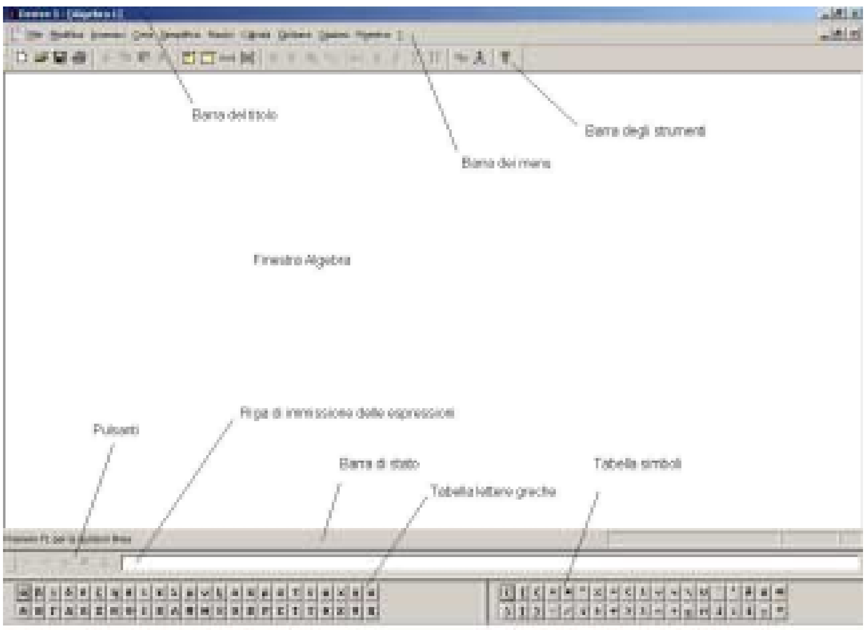
[1] Costanzo M., Garetto M., *Navigando nella matematica. Laboratorio S.I.S. 2000/2001*, Quaderni Didattici del Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino, Quaderno n° 1, Maggio 2001

3. *Derive 5: finestre, menu, comandi*

Derive è un software matematico che può essere utilizzato per molte applicazioni, come ad esempio il calcolo algebrico, la trigonometria, i vettori e le matrici, il calcolo differenziale e integrale, la rappresentazione di funzioni in due e tre dimensioni.
Prima di illustrare l'uso di Derive per la soluzione di problemi matematici quali quelli ora citati, descriviamo brevemente le caratteristiche di base del software.
La versione di Derive qui presentata è la 5.05 per Windows in italiano.

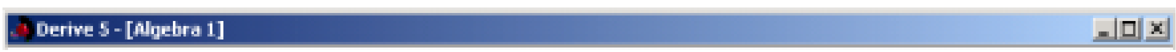
3.1 La finestra algebra

Derive 5 si avvia con un doppio clic sull'icona presente sul desktop, oppure dal menu **Start**. Compare la seguente finestra:



Descriviamo brevemente le principali caratteristiche della finestra algebra di Derive; dettagli maggiori su molti dei comandi saranno illustrati negli esempi e nelle applicazioni del capitolo 4.

Barra del titolo



Nome del programma (Derive 5) e nome del file (provvisoriamente Algebra 1); a destra pulsanti tipici della finestra Windows.

Barra dei menu

10 nomi di menu e un ?.
Cliccando su ognuno dei nomi appare un menu a tendina con più voci (operazioni che Derive può svolgere).
Cliccando su ? si apre l'help in linea.

Barra degli strumenti

Pulsanti che permettono di svolgere più rapidamente le operazioni più comuni; le icone in grigio si attivano e possono essere utilizzate quando si introducono i dati necessari per farle funzionare.
Per visualizzare una descrizione sintetica delle azioni svolte dai pulsanti nelle barra degli strumenti della finestra algebra e della finestra grafica 2D e 3D, posizionare il puntatore del mouse accanto a ciascun pulsante: compare un riquadro su sfondo giallo con la descrizione dell'azione svolta.

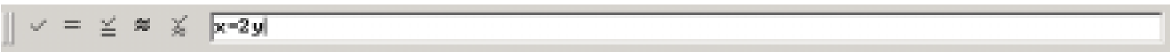
Finestra algebra

Vi compaiono tutti i dati e le espressioni introdotte e i calcoli effettuati.

Barra di stato

Visualizza informazioni sul documento: tipo di comando, tempo di esecuzione.

Riga di immissione



E' formata da una riga per l'immissione delle espressioni e da alcuni pulsanti che svolgono operazioni di frequente utilizzo sulle espressioni: creano, semplificano e approssimano espressioni:

 **Crea espressione**: porta l'espressione sul foglio; equivale a Invio.

 Semplifica; scrive sul foglio di lavoro solo l'espressione semplificata (in centro del foglio).

 **Crea e semplifica**: porta l'espressione sul foglio e scrive la semplificazione.

 **Approssima**: scrive sul foglio l'approssimazione dell'espressione di tipo numerico.

 **Crea e approssima**: scrive sul foglio l'espressione e la sua approssimazione.

Espressioni e risultati sono preceduti dal numero di istruzione del tipo **#n**, con n numero intero.

Lettere greche - Simboli

Al di sotto della riga di immissione due barre contengono rispettivamente le lettere greche maiuscole e minuscole e i simboli matematici più comuni; alcuni di questi sono disponibili anche sulla tastiera.

3.2 Comandi nella barra dei menu della finestra algebra

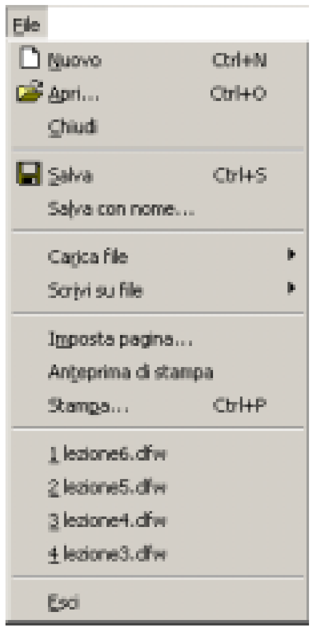
Questa barra è l'unica sempre presente in un foglio di lavoro in modalità algebra.

La descrizione dettagliata dei contenuti dei vari menu può essere ottenuta consultando la guida in linea: selezionare il menu ?, scegliere **Guida in linea** > **Comandi della finestra algebra**.
Si può aprire ogni menu cliccando sul nome nella barra dei menu, oppure premendo contemporaneamente Alt più la lettera sottolineata di ogni menu.

Quando un menu viene aperto, appare una finestra con altri comandi; si può accedere al comando prescelto cliccando sul nome del comando, oppure premendo da tastiera la lettera sottolineata.

Menu File

I comandi del menu File consentono di aprire e chiudere fogli di lavoro, caricare e salvare file di espressioni e di altro tipo, stampare o vedere l'anteprima di stampa del foglio di lavoro attivo, oppure uscire da Derive.



I file di Derive hanno estensione **.dfw** (nella precedente versione **.mth**). Derive 5 riconosce anche i file salvati nella versione precedente con estensione .mth. La cartella di default suggerita per il salvataggio dei file è **Math**; questa cartella contiene la libreria, ossia una raccolta di file già forniti da Derive per la soluzione di particolari problemi; per evitare di cancellare inavvertitamente file di libreria, si suggerisce di salvare i propri file in un'altra cartella, che può essere creata dall'utente.

Alcuni comandi sono preceduti da un'icona analoga a quella che compare nella barra degli strumenti: si ottiene lo stesso risultato sia accedendo ai comandi dalla barra dei menu, sia premendo l'icona corrispondente nella barra degli strumenti.

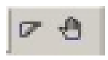
Alcuni comandi sono seguiti da tre puntini: la scelta di questi comandi fa apparire una nuova finestra e la precedente sparisce.

Alcuni comandi sono seguiti da una freccia: in questo caso si apre una nuova finestra accanto alla precedente, che non sparisce.

Fra i comandi del menu File notiamo i seguenti.

Carica file

Carica tipi diversi di file: fogli di lavoro già salvati in precedenza; file di dati salvati con estensione **.dat**; file demo, esempi disponibili con estensione **.dmo** (ne sono presenti nella cartella **Dfw5\Math** e **Dfw5\Users**; i file dimostrativi possono solo essere letti); file di utilità, contenenti definizioni di funzioni e costanti, che possono essere usate digitandone il nome (sono presenti nelle due cartelle indicate).

I file demo contengono molti esempi interessanti, commentati purtroppo in modo scarno in inglese, e si suggerisce di caricarli in un file nuovo e di esaminarli con attenzione; quando si apre un file demo, la barra degli strumenti contiene solo le icone  , per continuare o arrestare il programma dimostrativo.

Scrivi su file

Salva le espressioni traducendole nei linguaggi di programmazione Basic, C, Fortran, Pascal, oppure in estensione .rtf da utilizzare in Word. Un file salvato in uno di questi formati non può più essere letto da Derive.

File recenti

Riporta l'elenco degli ultimi quattro file utilizzati, consentendo di caricarli direttamente.

Menu Modifica

Mediante i comandi del menu Modifica della finestra algebra è possibile modificare oggetti ed annotazioni nel foglio di lavoro attivo, come anche tagliare, copiare ed incollare schermate.

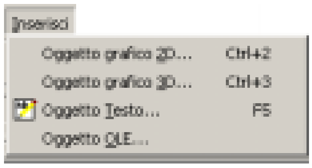
Molti comandi sono del tutto analoghi ai comandi presenti nei programmi di ambiente Windows.

Oggetto di Derive
Permette di modificare un oggetto creato con Derive (espressione, commento, grafico, immagine, ….); l'oggetto deve essere selezionato nel foglio di lavoro.

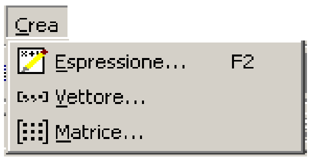
Annotazione
Permette di modificare l'annotazione che Derive associa a ogni espressione e che compare nella barra di stato.

Copia regione
Permette di copiare una regione del foglio di lavoro e di incollarla in ogni programma che accetta immagini grafiche (Word, Paint, ...); quando si attiva il comando il cursore diventa una croce, muovendo il mouse con il tasto sinistro premuto si forma un rettangolo con i bordi tratteggiati, rilasciando il tasto sinistro, la parte selezionata all'interno del rettangolo viene copiata e può essere incollata in un altro punto del foglio di lavoro o in un altro programma.

Menu Inserisci
Con i comandi Inserisci si inseriscono oggetti dei tipi elencati.
Gli oggetti **OLE** (**Object Linking and Embedding**) sono oggetti creati con altre applicazioni, che possono essere inclusi nel foglio di lavoro, ad esempio una fotografia, un'immagine, ecc.



Menu Crea
Permette di creare un'espressione, un vettore, una matrice.



Menu Semplifica

Base
Permette di semplificare numericamente e algebricamente espressioni matematiche; è equivalente al pulsante  presente sia nella barra degli strumenti, sia accanto alla riga di immissione dell'espressione.

Sviluppa
Sviluppa espressioni o sottoespressioni matematiche rispetto ad alcune o a tutte le sue variabili.

Fattorizza
Fattorizza un'espressione o una sottoespressione matematica rispetto ad alcune o a tutte le sue variabili.

Approssima
Semplifica un'espressione con approssimazione numerica; si può scegliere la precisione; è equivalente al pulsante  presente sia nella barra degli strumenti, sia accanto alla riga di immissione dell'espressione.

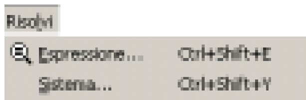
Sostituisci variabili
Permette di sostituire valori per ognuna delle variabili dell'espressione o sottoespressione evidenziata. Viene aperta una finestra di dialogo che consente di specificare i valori da

sostituire alle variabili nell’espressione evidenziata; è equivalente al pulsante  nella barra degli strumenti.

Sostituisci sottoepressione
Permette di sostituire un valore per una o per tutte le occorrenze dell’espressione o sotto-espressione evidenziata.

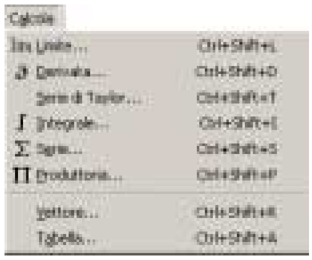
Menu Risolvi

Espressione
Consente di risolvere algebricamente l’equazione selezionata; è equivalente al pulsante  nella barra degli strumenti.



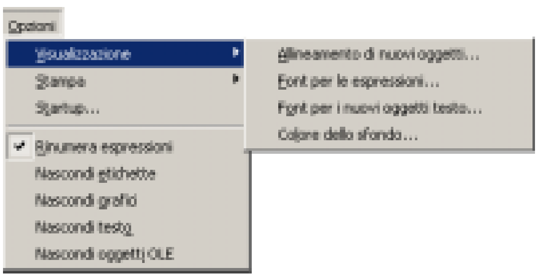
Sistema
Consente di risolvere algebricamente un sistema di equazioni lineari o non lineari.

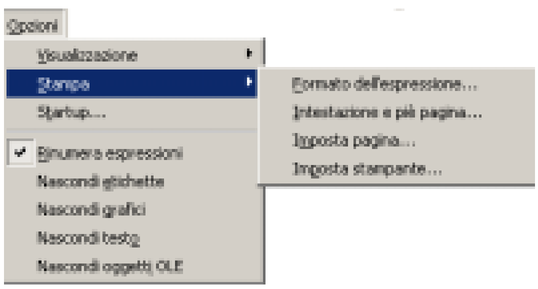
Menu Calcola
Contiene i comandi utili per il calcolo differenziale. Mediante i comandi del menu Calcola si possono calcolare limiti simbolici, derivate, integrali, serie, prodotti finiti, approssimazioni con i polinomi di Taylor e generare vettori e tabelle di dati. Molti dei comandi possono anche essere attivati dalla barra degli strumenti.



Menu Dichiara
I comandi del menu Dichiara consentono di dichiarare variabili, definire funzioni, selezionare trasformazioni, impostare la precisione, ecc. Questi comandi saranno illustrati più dettagliatamente nelle applicazioni del capitolo 4.

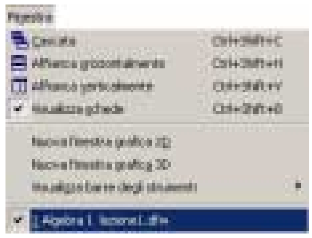
Menu Opzioni
I comandi del menu Opzioni consentono di modificare diverse impostazioni di visualizzazione e stampa.
In particolare con il comando **Visualizzazione** si apre un sotto-menu che consente di scegliere dimensioni e colore del carattere usato per le espressioni e per il testo, colore dello sfondo, ecc.
Analogamente con il comando **Stampa** si possono modificare alcune caratteristiche di stampa del documento.





Si possono inoltre attivare o disattivare le opzioni per mostrare o nascondere l’etichetta di ogni espressione, i grafici, i testi inseriti fra le espressioni; inoltre le espressioni possono essere rinumerate nel caso si cancellino delle espressioni.

Menu Finestra
I comandi del menu Finestra consentono di aprire contemporaneamente più finestre algebra e finestre grafiche 2D e 3D, di ridisporre le finestre esistenti e di attivare/disattivare le barre di stato e degli strumenti.



Menu ?
Apre la guida in linea, si accede all'indice e a varie informazioni utili.

Una lista delle funzioni disponibili in Derive può essere visualizzata con questo menu: cliccare su Guida in linea, nel Sommario cliccare su Funzioni.
Le funzioni purtroppo sono elencate in ordine alfabetico e non sono suddivise per categorie, quindi non è possibile rendersi conto velocemente di che cosa sia disponibile su un certo argomento.
Si riporta, a titolo di esempio, un elenco tratto dalla guida in linea di alcune delle funzioni disponibili.

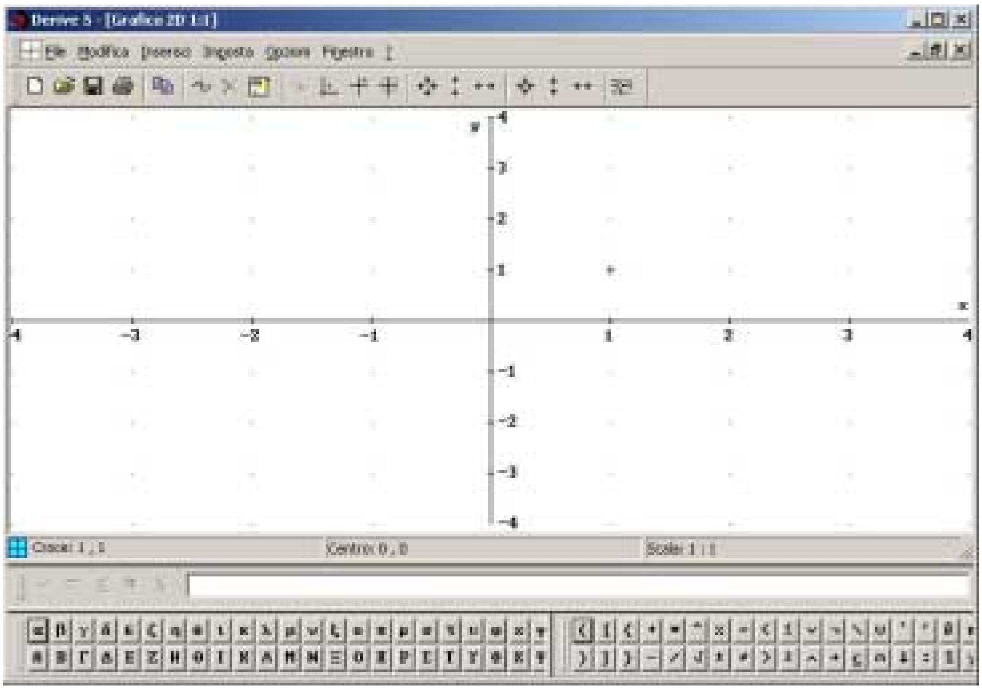
Funzioni di *Derive*
In questa sezione sono riportate in ordine alfabetico tutte le funzioni matematiche predefinite di Derive (vedere Funzioni e costanti predefinite) o contenute nei file di utilità distribuiti con Derive (vedere le Funzioni contenute nei file di utilità). Le funzioni contenute nei file di utilità vengono caricate automaticamente quando si richiamano all'interno di espressioni.

ABS(x)	valore assoluto del reale x
ABS(z)	ampiezza (modulo) del complesso z
ABS(v)	ampiezza (lunghezza) del vettore v
ACOS(z)	angolo il cui coseno è z
ACOSH(z)	coseno iperbolico inverso di z
……	
LCM(m,n,...)	minimo comune multiplo di m, n, ...
……	
PERPENDICULAR(y,x,x0)	retta perpendicolare a y(x) in x=x0
……	
POLY_GCD(u,v)	massimo comun divisore dei polinomi u e v
……	
PREVIOUS_PRIME(n)	il primo numero primo minore di n
PRIME?(n)	se n è un numero primo, ritorna true; altrimenti ritorna false
……	
SIN(z)	seno di z radianti
SIN(z·deg)	seno di z gradi
SINH(z)	seno iperbolico di z
……	
ZETA(s)	funzione zeta di Riemann z(s)
ZETA(s,z)	funzione zeta di Hurwitz z(s,z)

3.3 La finestra grafica 2D

Per aprire una finestra per rappresentazioni grafiche in due dimensioni aprire il menu **Finestra** nella finestra algebra e selezionare **Nuova finestra grafica 2D**, oppure cliccare sull’icona  presente nella barra degli strumenti della finestra algebra.

La finestra grafica 2D ha il seguente aspetto:

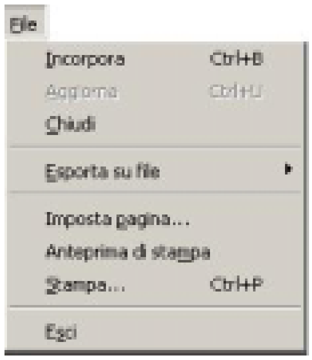


La barra del titolo, la barra dei menu e la barra degli strumenti della finestra grafica sono diverse rispetto a quelle della finestra algebra. In particolare la barra di stato visualizza le seguenti informazioni grafiche:
Croce: indica le coordinate della croce mobile
Centro: indica le coordinate del centro del disegno
Scala: indica il fattore di scala per entrambi gli assi.

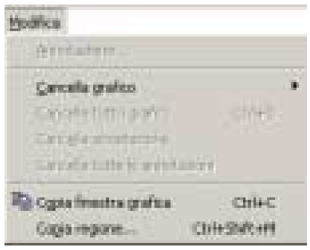
Può essere utile disporre la finestra algebra e la finestra grafica fianco a fianco, con il comando **Finestra**/**Affianca verticalmente**.
Per passare da una finestra all’altra, quando sono entrambe visibili, cliccare sulla barra del titolo della finestra non attiva.
Quando invece è visibile una sola finestra, selezionare la finestra da aprire dal menu Finestra, oppure utilizzare i pulsanti di passaggio:  per passare dalla finestra algebra alla finestra grafica,  per passare dalla finestra grafica alla finestra algebra.

3.4 Comandi nella barra dei menu della finestra grafica 2D

Descriviamo brevemente i contenuti dei menu della barra; dettagli ulteriori saranno illustrati nelle applicazioni del capitolo 4.

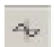


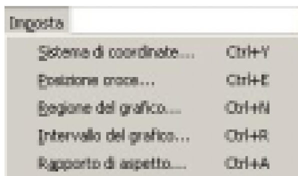
Menu File
I comandi disponibili nel menu File permettono di incorporare un nuovo oggetto grafico o di aggiornarne uno esistente nel foglio di lavoro attivo, di chiudere la finestra grafica, di esportare il grafico su file esterni, di stampare o vedere l'anteprima di stampa, o di uscire da Derive.
Con il comando **Incorpora** si inserisce un grafico 2D in una Finestra Algebra; il grafico incorporato non è interattivo, ma con un doppio clic del mouse sull'immagine incorporata si può ritornare in un qualunque momento nella finestra grafica per apportare modifiche e poi aggiornare il grafico.
Il comando **Esporta su file** permette di salvare un grafico, che può essere successivamente inserito come immagine in un'altra applicazione (ad esempio in un file Word).



Menu Modifica
I comandi disponibili nel menu Modifica permettono di modificare o cancellare grafici o annotazioni.
Con il comando **Copia finestra grafica** si copia nella clipboard di Windows il grafico, che può essere poi incollato in un documento Windows (ad esempio in un file Word) oppure nella finestra algebra.
Attivando il comando **Copia regione**, nella finestra grafica compare una croce, che può essere spostata con il mouse per delimitare la regione che si vuole selezionare; rilasciando il mouse la regione prescelta viene copiata nella clipboard e può essere incollata altrove.

Menu Inserisci
I comandi del menu Inserisci consentono di aggiungere nuovi grafici e annotazioni alla finestra grafica 2D.

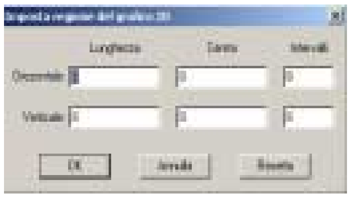
Utilizzare il comando **Inserisci>Grafico**, oppure il pulsante , per tracciare il grafico dell'espressione selezionata nella finestra algebra; se la finestra grafica contiene già un grafico, il nuovo grafico viene aggiunto con un colore diverso o anche con lo stesso colore (vedere menu **Opzioni> Cambia colore dei grafici** e **Opzioni>Visualizzazione>Colore del grafico**).
Il comando **Inserisci>Grafico** è attivo solo se c'è un'espressione selezionata nella finestra algebra.
I file **Plot2d.mth**, e **Plotpara.mth**, distribuiti con Derive e contenuti nella cartella **Math**, includono numerosi esempi di espressioni interessanti da tracciare in una finestra grafica 2D.



Menu Imposta
Utilizzare i comandi del menu Imposta della finestra grafica 2D per esaminare e/o modificare il sistema di coordinate, la posizione della croce, la regione del grafico, l'intervallo del grafico ed il rapporto di aspetto.

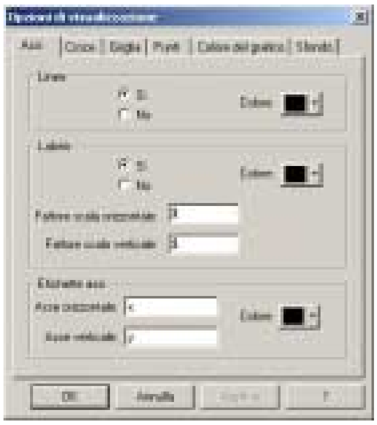
Per impostare la stessa scala su entrambi gli assi eseguire il comando **Imposta > Rapporto di aspetto**: compare la finestra a sinistra.

I valori dei campi Orizzontale e Verticale mostrano l’attuale rapporto di aspetto (lunghezza fisica in pixel orizzontale/verticale); premendo **Resetta** appare la finestra a destra, dove le dimensioni orizzontale e verticale sono uguali (di default entrambe 8); confermare con **OK**.



Le dimensioni orizzontale e verticale, che appaiono di default, possono essere modificate con il comando **Imposta>Regione del grafico**; per avere la stessa unità di misura su entrambi gli assi, le lunghezze orizzontale e verticale devono essere uguali (non necessariamente 8).
Per ripristinare la regione originaria del grafico utilizzare il comando **Imposta>Regione del grafico**, cliccare su **Resetta** e poi su **OK**, oppure utilizzare il comando **Imposta>Intervallo del grafico**, cliccare su **Resetta** e poi su **OK**; in entrambi i casi cliccare alla fine sul tasto Ingrandisci  nella barra del titolo della Finestra Grafica.

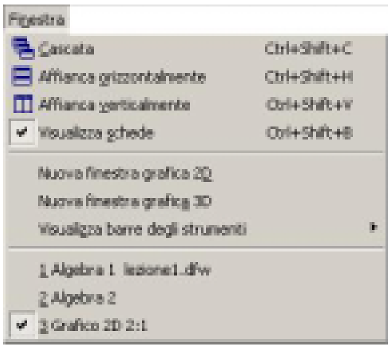
Menu Opzioni
Utilizzare i seguenti comandi disponibili nel menu **Opzioni>Stampa** della Finestra Grafica 2D per impostare:
Intestazione e piè pagina...
Imposta pagina...
Imposta stampante...
Solo bianco e nero



Utilizzare i seguenti comandi disponibili nel menu **Opzioni>Visualizzazione** della finestra grafica 2D per impostare:
Assi...
Croce...
Griglia...
Punti...
Colore del grafico...
Colore dello sfondo...
Per ciascuna di queste opzioni si apre una scheda apposita con varie scelte possibili.

Altri comandi disponibili nel menu Opzioni consentono di attivare/disattivare diversi parametri della finestra grafica 2D; in particolare la **Modalità traccia** è utile per analizzare le curve. Quando la modalità traccia è attiva, la croce si trasforma in un quadratino e si sposta lungo la curva usando i tasti freccia; nella barra di stato vengono visualizzate le coordinate della croce. Per spostamenti grandi occorre usare il tasto Ctrl più il tasto freccia destra o sinistra.

Menu Finestra



Il menu Finestra è analogo a quello già descritto per la finestra algebra.
I comandi di questo menu consentono di aprire nuove finestre grafiche 2D e 3D, di ridisporre le finestre esistenti e di attivare e disattivare le barre di stato e degli strumenti.
Se sono aperte più finestre (algebra e/o grafica) può essere utile il comando **Visualizza schede**; con questo comando per ogni finestra si visualizza una linguetta che permette di spostarsi più agevolmente da una finestra all’altra.
Una lista delle finestre aperte è visualizzata in fondo al menu Finestra.

Menu ?
Guida in linea
cliccando su Guida in linea si apre il sommario, da cui si può accedere a tutti gli argomenti della guida.

Barra degli strumenti della Finestra Grafica

I pulsanti permettono di svolgere più rapidamente le operazioni più comuni, molte delle quali sono già note. Tra i pulsanti che vi compaiono notiamo i pulsanti freccia , utili per modificare la scala cambiando la regione del grafico.

Il tasto **Imposta intervallo con il mouse**  consente di visualizzare un’area rettangolare a propria scelta, effettuando uno zoom del grafico. Cliccando sul tasto, nella Finestra Grafica appare un quadratino; scegliere l’area rettangolare cliccando con il tasto sinistro nell’angolo in alto a sinistra dell’area desiderata, tenendo premuto trascinare con il mouse nell’angolo in basso a destra dell’area e rilasciare il mouse.

La finestra grafica 3D ha caratteristiche e funzioni del tutto simili alla finestra grafica 2D; alcuni comandi e pulsanti di questa finestra sono la naturale estensione alle tre dimensioni di quelli descritti in due dimensioni.
Si possono visualizzare superfici in coordinate rettangolari, sferiche, cilindriche, o in forma parametrica.
Particolarmente interessante e di effetto è il pulsante nella barra degli strumenti che consente di ruotare il grafico.

4. *Derive in classe*

4.1 Nozioni di base

Barra del titolo: nome del programma (Derive 5) e nome del file

Barra dei menu: 10 nomi di menu e ?
Cliccando su ognuno dei menu si apre una tendina con più voci (operazioni che Derive può svolgere)
Cliccando su ? si apre la guida in linea

Barra degli strumenti: icone che permettono di svolgere più rapidamente le operazioni più comuni.
Le icone si attivano e possono essere utilizzate quando si introducono i dati necessari per farle funzionare

Finestra Algebra: il foglio di lavoro; compaiono dati e espressioni introdotte e calcoli effettuati

Barra di stato: visualizza informazioni sul documento

Finestra di immissione dati e espressioni: i pulsanti a sinistra della riga di immissione dell'espressione svolgono operazioni di frequente utilizzo sulle espressioni: Crea, Semplifica, Approssima

File demo: programmi dimostrativi, alcuni adatti a utenti inesperti, altri di livello abbastanza elevato.
Sono presenti nelle cartelle di libreria Math e Users

Calcolo numerico

Esempio 1 – Operazioni elementari, uso dei pulsanti a sinistra della riga di immissione dell'espressione.

Introdurre l'espressione 1/2+1/4: scrivere l'espressione nella riga di immissione e premere Invio, oppure (è equivalente) usare il pulsante Crea espressione (primo pulsante a sinistra)

#1: $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

Se si vuole modificare un'espressione, ad esempio per correggere un errore, posizionare il puntatore del mouse sull'espressione, cliccare con il tasto destro e scegliere Modifica, modificare l'espressione nella riga di immissione e premere Invio: l'espressione non viene reinserita, ma modificata nella linea in cui era posizionata
Se scrivendo l'espressione si commette un errore, l'espressione non viene inserita e compare un messaggio nella barra di stato: correggere e premere di nuovo Invio

#2: $$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

Semplificare l'espressione #2: selezionarla con il mouse e usare il pulsante =

#3: $\frac{7}{12}$

Inserire l'espressione 21*4 e semplificare con il pulsante Crea e semplifica.
Il simbolo di moltiplicazione può essere sottinteso e sostituito da uno spazio

#4: $21\cdot 4$

#5: 84

Inserire e semplificare l'espressione 12^15; notare che l'operazione appare nella finestra algebra con la consueta notazione algebrica

#6: 12^{15}

#7: 15407021574586368

Inserire e semplificare l'espressione (2+5)^3/(1+3): l'espressione appare in notazione algebrica; con Crea e semplifica il risultato appare in forma frazionaria; se si vuole il risultato in forma decimale, usare Crea e approssima
Derive usa solo parentesi tonde, che possono essere annidate.

#8: $\frac{(2 + 3)^3}{1 + 3}$

#9: $\frac{125}{4}$

#10: 31.25

Esempio 2 – Calcolo di radici

Inserire l'espressione √18 usando il pulsante √ nella barra dei simboli: introdurre e semplificare con il pulsante Crea e semplifica

#11: $\sqrt{18}$

#12: $3\cdot\sqrt{2}$

Per richiamare l'espressione #11 selezionarla con il mouse e usare il tasto F4; l'espressione viene copiata nella barra di immissione, usare il pulsante Crea e approssima

#13: $\sqrt{18}$

#14: 4.242640687

Si possono anche usare i pulsanti Semplifica e Approssima: osservare che non viene riscritta l'espressione. Osservare le scritte nella barra di stato

#15: $3\cdot\sqrt{2}$

#16: **4.242640687**

Se si vogliono utilizzare più cifre decimali nel risultato, selezionare il menu Dichiara>Impostazioni di semplificazione e introdurre nel campo Cifre il numero di cifre che si vogliono utilizzare.
L'opzione resta attiva fino al termine della sessione di lavoro, oppure fino a nuova scelta. Si può tornare alla scelta di default riaprendo il menu e cliccando Resetta e OK
Un'altra tecnica per scegliere il numero delle cifre decimali è descritta più avanti (Esempio 4)
Dopo aver impostato il numero di cifre, richiamare l'espressione #11 con il tasto F4 e usare Crea e Approssima

#17: PrecisionDigits := 15

#18: $\sqrt{18}$

#19: **4.24264068711928**

Come riconosci un matematico?
Un matematico considera l'espressione #12 il risultato migliore!

Le radici di indice k ($k\neq2$) devono essere scritte come potenze con esponente frazionario.
Introdurre e approssimare l'espressione (5+2)^(1/3)

#20: $(5 + 2)^{1/3}$

#21: **1.912931182**

Scrivere l'espressione correttamente! Scrivendo (5+2)^1/3 si ottiene un'altra espressione

#22: $\dfrac{(5 + 2)^{1}}{3}$

#23: **2.333333333**

Esempio 3 – Calcolo di potenze.

Introdurre il numero 1234^56 e usare Semplifica.
Notare l'alto numero di cifre: questa notazione per il numero non è la migliore!

#24: 1234^{56}

**#25: 12991190255487145194103208439623513775465782010127392384379012704624~
259433055094648925678485362472902010613951564738491094492118652386~
5849056275359066262352911682504769929216**

Approssimare il numero usando Approssima

#26: $1.299119025\cdot10^{173}$

Approssimazioni e calcoli esatti

Esempio 4 – Comandi Base e Approssima

Scrivere l'espressione sin(π/4) e dal menu Semplifica scegliere prima Base e poi Approssima

#27: $\mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

#28: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

#29: **0.7071067811**

Osservazione: con il comando Approssima si può scegliere il numero di cifre di precisione (Approssima usa la scelta di default di 10 cifre). Il valore seguente è calcolato con 32 cifre

#30: **PrecisionDigits := 32**

#31: **0.70710678118654752440084436210484**

Esempio 5 – Costanti matematiche π (pi greco), e (base dei logaritmi naturali), i (unità immaginaria)

Il numero π può essere introdotto in quattro modi diversi:
1 – dalla barra dei simboli
2 – dalla barra delle lettere greche
3 – premendo Ctrl+P
4 – scrivendo pi.
Il numero e può essere introdotto in tre modi diversi:
1 – dalla barra dei simboli
2 – premendo #e
3 – premendo Ctrl+E.
L'unità immaginaria i può essere introdotta in tre modi diversi:
1 – dalla barra dei simboli
2 – premendo #i
3 – premendo Ctrl+I
Verificare con Approssima che la lettera e da sola non serve per introdurre il numero e; lo stesso per la lettera i.

#32: **π + π + π**

#33: **3·π**

#34: **ê + ê + ê**

#35: **3·ê**

#36: **î + î + î**

#37: **3·î**

#38: **e**

#39: **e**

Introdurre il numero e in modo corretto e calcolarne il valore con Crea e approssima

#40: ê

#41: 2.718281828

Esempio 6 – Modalità Exact e Modalità Approximate

Nella sezione Precisione del comando Dichiara>Impostazioni di semplificazione si può impostare e/o cambiare la modalità e le cifre della precisione.
In modalità Exact, i numeri irrazionali non vengono approssimati e i radicali vengono lasciati in forma simbolica.
Per default la precisione è impostata a Exact; questa modalità è utilizzata quando si vuole una risposta esatta.

#42: Precision := Exact

#43: √4

#44: 2

#45: √3

#46: √3

#47: √(4 – 2·√3)

#48: √3 – 1

#49: π·√2

#50: √2·π

In modalità Approximate i numeri irrazionali e quelli razionali grandi vengono semplificati nel numero razionale più vicino.
Il numero di cifre significative può essere impostato nel campo Cifre ad un qualsiasi valore positivo. Aumentando la precisione, il tempo di calcolo di un'operazione sui razionali aumenta.
La modalità Approximate può essere significativamente più veloce e richiedere meno memoria della modalità Exact

#51: Precision := Approximate

#52: π·√2

#53: 4.442882938

In modalità Mixed i numeri irrazionali vengono approssimati, quelli razionali no. Come per la modalità Approximate, i numeri irrazionali vengono semplificati nel numero razionale più vicino in accordo con la corrente precisione.
La modalità Mixed si utilizza quando si è disposti ad approssimare le operazioni irrazionali in un risultato numerico, ma con tutte le precedenti operazioni eseguite esattamente.
Per maggiori dettagli vedere la guida in linea: Comandi della Finestra Algebra>Dichiara>Impostazioni di semplificazione>Precisione
Molti esempi interessanti (ma non tutti elementari) possono essere trovati sul testo di Kutzler e Kokol-Voljc citato in Bibliografia, cap. 5 e cap. 8.

Calcolo simbolico

Esempio 7 – Espressioni

Inserire l'espressione x/4+x/5 e usare Crea e semplifica

#54: $\dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{5}$

#55: $\dfrac{9\cdot x}{20}$

Richiamare l'espressione e usare Crea e approssima

#56: $\dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{5}$

#57: $0.45\cdot x$

Esempio 8 – Uso del menu Semplifica. Comando Sviluppa

Scrivere l'espressione (x–1)^3, usare il pulsante Crea e semplifica: viene semplicemente introdotta l'espressione

#58: $(x - 1)^3$

#59: $(x - 1)^3$

Selezionare con il mouse l'espressione #58, aprire il menu Semplifica; scegliere il comando Sviluppa, cliccare sul pulsante Sviluppa

#60: $x^3 - 3\cdot x^2 + 3\cdot x - 1$

Nota. Per aprire in modo rapido il Menu Semplifica>Sviluppa premere insieme i tasti Alt+S, poi il tasto S maiuscolo (S è la lettera sottolineata nel comando)
Questa tecnica vale anche per l'uso rapido degli altri comandi dei menu

Esempio 9 – Uso di parentesi e operatore di moltiplicazione

I nomi delle variabili per default sono di un solo carattere; si possono anche usare nomi più lunghi modificando la scelta dal menu Dichiara>Impostazioni di input.
Con Impostazioni di input si può anche scegliere se si vuole distinguere tra caratteri maiuscoli e minuscoli

Introdurre l'espressione xy+sinx con Crea e semplifica

#61: $x\cdot y + \mathrm{SIN}(x)$

#62: $\mathrm{SIN}(x) + x\cdot y$

Notare che le parentesi non sono indispensabili.
Attenzione: se dal menu Dichiara>Impostazioni di input si sceglie di usare come nomi delle variabili più di un carattere (parola), le parentesi devono essere scritte.

Ad esempio l'espressione sinx viene interpretata come un unico nome e non come la funzione sin(x)

#63: InputMode := Word

#64: sinx

Introdurre l'espressione 3/(x+5) con il pulsante Crea
Attenzione agli errori! Usare le parentesi.

#65: $\frac{3}{x + 5}$

#66: $\frac{3}{x} + 5$

Altri esempi di differenti espressioni a seconda dell'uso delle parentesi

#67: $3\cdot x - \frac{1}{x} - 6$

#68: $3\cdot x - \frac{1}{x - 6}$

#69: $3\cdot x - \left(\frac{1}{x} - 6\right)$

#70: $3\cdot\left(x - \frac{1}{x} - 6\right)$

Per passare dalla riga di inserimento espressione alla finestra algebra usare il tasto Esc
Per passare dalla finestra algebra alla riga di inserimento espressione usare il tasto F2
In alternativa cliccare con il tasto sinistro sul punto interessato (sul foglio di lavoro o nella riga di immissione)

Esempio 10 – Il calcolo delle radici

Introdurre √x^2 e usare il bottone Crea e semplifica: si calcola (√x)^2

#71: $\sqrt{x}^{2}$

#72: x

Introdurre √(x^2) e usare il pulsante Crea e semplifica: si ottiene il valore assoluto

#73: $\sqrt{(x^{2})}$

#74: $|x|$

Il simbolo di sommatoria

Esempio 11 – Calcolo di somme

Calcolare la somma dei primi 50 numeri interi positivi: 1+2+3+...+50
Scrivere n nella riga di immissione e dare Invio (o usare Crea espressione); usare il pulsante Calcola serie nella barra degli strumenti.
Selezionare Serie definita e scrivere nei due campi Limite inferiore e Limite superiore i valori 1 e 50, premere Semplifica

#75: n

#76: $\sum_{n=1}^{50} n$

#77: 1275

Calcolare la somma dei numeri dispari da 11 a 41
Scrivere 2n+1 nella riga di immissione e dare Invio; usare il pulsante Calcola serie nella barra degli strumenti.
Selezionare Serie definita e scrivere nei due campi Limite inferiore e Limite superiore i valori 5 e 20, premere Semplifica

#78: $2\cdot n + 1$

#79: $\sum_{n=5}^{20} (2\cdot n + 1)$

#80: 416

Verificare che la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2.
(questa proprietà si dimostra per induzione).
Scrivere 2k–1 nella riga di immissione e dare Invio.
Usare il pulsante Calcola serie nella barra degli strumenti.
Selezionare Serie definita e scrivere nei due campi Limite inferiore e Limite superiore i valori 1 e n, premere Semplifica

#81: $2\cdot k - 1$

#82: $\sum_{k=1}^{n} (2\cdot k - 1)$

#83: n^2

Calcolare la somma dei primi n numeri: si ottiene la nota formula generale

1+2+3+...+n=n(n+1)/2

Scrivere k (termine generico della somma) nella riga di immissione e premere Invio, usare il pulsante Calcola serie nella barra degli strumenti.
Selezionare Serie definita e scrivere nei due campi Limite inferiore e Limite superiore i valori 1 e n, premere Semplifica

#84: k

#85: $\sum_{k=1}^{n} k$

#86: $$\frac{n\cdot(n + 1)}{2}$$

Si può definire una funzione avente come espressione la somma appena calcolata; assegnando poi a n valori diversi a scelta, si ottiene rapidamente il valore numerico della somma.
Dal menu Dichiara scegliere Definisci funzione; nel campo Nome della funzione e argomenti scrivere f(n)
Nel campo Definizione scrivere n(n+1)/2 e premere OK
La definizione della funzione resta attiva per tutta la sessione di lavoro.

#87: $f(n) := \frac{n\cdot(n + 1)}{2}$

Assegnare a n un valore a scelta, ad esempio 100 (usare il segno : prima di =) e premere il pulsante Crea.

#88: **n := 100**

Selezionare la funzione (tutta l’espressione #87) e usare il menu Semplifica>Base

#89: **5050**

Altro metodo: scrivere nella riga di immissione f(100) e usare Crea e semplifica

#90: **f(100)**

#91: **5050**

Attenzione: se si usa la prima tecnica, con l’espressione #88 si fa un’assegnazione che resta attiva per tutta la sessione di lavoro. Per rendere inattiva l’assegnazione #88 introdurre l’espressione n:= in modo che n ridiventi una variabile libera (ossia n non ha più il valore numerico prima assegnato)

#92: **n :=**

Testi, formattazione, anteprima, stampa

- I commenti che illustrano le operazioni da fare vengono introdotti con il pulsante Inserisci testo nella barra degli strumenti
- Per modificare la formattazione del testo (dimensione, tipo e colore dei caratteri, allineamento) aprire il menu Finestra e scegliere Visualizza barre degli strumenti; selezionare Barra di formattazione: compare la barra di formattazione nella quale fare le scelte.
- Per cambiare la dimensione e il colore dei font usati per le espressioni e i risultati aprire il menu Opzioni, selezionare

Visualizzazione, Font per le espressioni, e scegliere piccolo o grande e il colore

- Con due clic su una parola si seleziona tutta la parola, con tre clic in un punto qualunque del testo si seleziona tutta la frase.
- Per cancellare il testo, selezionarlo e premere Canc; in questo modo si cancella solo il testo e non l'oggetto che lo contiene.
- Per eliminare l'oggetto testo, evidenziarne i bordi posizionandosi al suo interno, premere Esc e poi Canc.
- Le espressioni (più in generale gli oggetti, ad esempio il logo all'inizio di questo file) si cancellano con il tasto Canc o con il pulsante Cancella oggetto nella barra degli strumenti (dopo aver selezionato l'oggetto)
- Per visualizzare un'anteprima di questo documento aprire il menu File>Anteprima di stampa
Per eventuali modifiche aprire il menu Opzioni>Stampa
Per stampare usare il pulsante Stampa della finestra di anteprima
- Per salvare il foglio di lavoro aprire il menu File>Salva con nome

4.2 Calcolo letterale

Esempio 1 – Utilizzo di sottoepressioni

Introdurre l'espressione

$$\#1: \quad \frac{a + (a - b)}{x} + \frac{(b - 1)^2}{x^2 - y^2}$$

Le sottoespressioni si selezionano con il mouse o con i tasti freccia: muovere il mouse all'interno dell'espressione, cliccando con il tasto sinistro del mouse.
A ogni clic, posizionandosi con il mouse sulla sottoepressione che interessa evidenziare, si scende di un livello all'interno dell'espressione.
Con doppio clic si selezionano facilmente le sottoespressioni più piccole
In alternativa si possono usare insieme i tasti Maiuscolo+freccia per spostarsi all'interno dell'espressione.

Selezionare il primo termine dell'espressione #1 e semplificarla con il pulsante Semplifica

$$\#2: \quad \frac{(b - 1)^2}{x^2 - y^2} + \frac{2\cdot a - b}{x}$$

Selezionare ora il numeratore del primo termine dell'espressione #2 e sviluppare con il comando Semplifica>Sviluppa (Menu Semplifica)

$$\#3: \quad \frac{b^2 - 2\cdot b + 1}{x^2 - y^2} + \frac{2\cdot a - b}{x}$$

Sviluppare l'intera espressione #1 rispetto a b: selezionare l'espressione, aprire il menu Semplifica>Sviluppa; nella finestra di dialogo selezionare la variabile b e deselezionare la x, cliccare su Sviluppa

$$\#4: \quad \frac{b^2}{x^2 - y^2} + \frac{b\cdot(x^2 + 2\cdot x - y^2)}{x\cdot(y^2 - x^2)} + \frac{2\cdot a\cdot x^2 + x - 2\cdot a\cdot y^2}{x\cdot(x^2 - y^2)}$$

Esempio 2 – Sostituzione di valori simbolici e/o numerici alle variabili in un'espressione.

Inserire l'espressione b^2+x^2–y^2+z^2

$$\#5: \quad b^2 + x^2 - y^2 + z^2$$

Sostituire 3 a x, t−y a z, a+1 a b.
Aprire il menu Semplifica>Sostituisci variabili, nella finestra di dialogo introdurre i valori da sostituire e premere OK.

#6: $(a + 1)^2 + 3^2 - y^2 + (t - y)^2$

Con la stessa tecnica si può sostituire anche nelle sottoespressioni
Nell'espressione #4 sostituire 4 a x^2−y^2 solo nel primo termine.
Richiamare l'espressione #4 con il tasto F4 e dare Invio;
selezionare la sottoespressione nel primo termine, aprire il menu Semplifica>Sostituisci sottoespressione, nella finestra di dialogo scrivere il nuovo valore 4 e selezionare Occorrenze: una, premere OK

#7: $$\frac{b^2}{x^2 - y^2} + \frac{b\cdot(x^2 + 2\cdot x - y^2)}{x\cdot(y^2 - x^2)} + \frac{2\cdot a\cdot x^2 + x - 2\cdot a\cdot y^2}{x\cdot(x^2 - y^2)}$$

#8: $$\frac{b^2}{4} + \frac{b\cdot(x^2 + 2\cdot x - y^2)}{x\cdot(y^2 - x^2)} + \frac{2\cdot a\cdot x^2 + x - 2\cdot a\cdot y^2}{x\cdot(x^2 - y^2)}$$

Esempio 3 – Fattorizzazione di un polinomio

Uso del comando Comando Semplifica>Fattorizza (Menu Semplifica)
Inserire il polinomio 6x^2y^2−3xy+12x^4y^4
Fattorizzare il polinomio con il comando Semplifica>Fattorizza; nella finestra di dialogo compaiono i vari tipi di fattorizzazione disponibili; il tipo predefinito è Razionale.
Il tipo Triviale effettua il raccoglimento a fattor comune

#9: $6\cdot x^2\cdot y^2 - 3\cdot x\cdot y + 12\cdot x^4\cdot y^4$

#10: $$3\cdot x\cdot y\cdot(4\cdot x^3\cdot y^3 + 2\cdot x\cdot y - 1)$$

Inserire il polinomio 9x^2−12xy+4y^2 (quadrato di un binomio) e scomporre con il tipo Quadrati

#11: $9\cdot x^2 - 12\cdot x\cdot y + 4\cdot y^2$

#12: $$(3\cdot x - 2\cdot y)^2$$

Esempio 4 – Fattorizzazione di un polinomio

Scomporre in fattori il polinomio x^2−3
Tipi di fattorizzazione: Razionale, Reale. Osservare la differenza.

#13: $x^2 - 3$

#14: $$x^2 - 3$$

#15: $(x + \sqrt{3})\cdot(x - \sqrt{3})$

Scomporre in fattori il polinomio x^2+4
Tipi di fattorizzazione: Reale, Complessa

#16: $x^2 + 4$

#17: $x^2 + 4$

#18: $(x + 2\cdot î)\cdot(x - 2\cdot î)$

Scomporre in fattori il polinomio x^4–4y^4
Tipi di fattorizzazione: Quadrati, Razionale, Reale, Complessa

#19: $x^4 - 4\cdot y^4$

#20: $x^4 - 4\cdot y^4$

#21: $(x^2 + 2\cdot y^2)\cdot(x^2 - 2\cdot y^2)$

#22: $(x + \sqrt{2}\cdot y)\cdot(x - \sqrt{2}\cdot y)\cdot(x^2 + 2\cdot y^2)$

#23: $(x + \sqrt{2}\cdot î\cdot y)\cdot(x - \sqrt{2}\cdot î\cdot y)\cdot(x + \sqrt{2}\cdot y)\cdot(x - \sqrt{2}\cdot y)$

Esempio 5 – Fattorizzazione di un polinomio

Scomporre in fattori il polinomio x^5–8x^4+21x^3–24x^2+20x–16
Fattorizzare il polinomio con il comando Semplifica>Fattorizza;
esplorare tutti i tipi di fattorizzazione.

#24: $x^5 - 8\cdot x^4 + 21\cdot x^3 - 24\cdot x^2 + 20\cdot x - 16$

#25: $x^5 - 8\cdot x^4 + 21\cdot x^3 - 24\cdot x^2 + 20\cdot x - 16$

#26: $(x - 2)^2\cdot(x^3 - 4\cdot x^2 + x - 4)$

#27: $(x - 4)\cdot(x - 2)^2\cdot(x^2 + 1)$

#28: $(x - 4)\cdot(x - 2)^2\cdot(x + î)\cdot(x - î)$

#29: $x\cdot(y^3 + 12\cdot y^2\cdot z + 12\cdot y\cdot z^2 + z^3)$

Inserire il polinomio x^6–3x^4–8x^3–18x^2+12x+16 e scomporre con i
Tipi di fattorizzazione: Quadrati, Razionale, Reale, Complessa

#30: $x^6 - 3\cdot x^4 - 8\cdot x^3 - 18\cdot x^2 + 12\cdot x + 16$

#31: $x^6 - 3\cdot x^4 - 8\cdot x^3 - 18\cdot x^2 + 12\cdot x + 16$

#32: $(x - 1)\cdot(x + 2)\cdot(x^2 + x + 4)\cdot(x^2 - 2\cdot x - 2)$

#33: $(x - 1)\cdot(x + 2)\cdot(x + \sqrt{3} - 1)\cdot(x - \sqrt{3} - 1)\cdot(x^2 + x + 4)$

#34: $(x - 1)\cdot(x + 2)\cdot(x + \sqrt{3} - 1)\cdot(x - \sqrt{3} - 1)\cdot\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}\cdot \hat{\imath}}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}\cdot \hat{\imath}}{2}\right)$

Esempio 6 – Fattorizzazione di un polinomio

Fattorizzare il polinomio 4x(y+z)^3–3x(y^3+z^3).
Con il tipo Triviale, rispetto alla variabile x, si mette in evidenza il fattore comune x

#35: $4\cdot x\cdot(y + z)^3 - 3\cdot x\cdot(y^3 + z^3)$

#36: $x\cdot(y^3 + 12\cdot y^2\cdot z + 12\cdot y\cdot z^2 + z^3)$

In molti casi la scomposizione in fattori più adatta si ottiene operando sulle sottoespressioni.
Fattorizzare prima la sottoespressione y^3+z^3 nell'espressione #35 rispetto alle variabili y e z, tipo di fattorizzazione Razionale; poi fattorizzare l'intera espressione ottenuta (#37), rispetto a tutte le variabili, tipo di fattorizzazione Razionale.

#37: $4\cdot x\cdot(y + z)^3 - 3\cdot x\cdot((y + z)\cdot(y^2 - y\cdot z + z^2))$

#38: $x\cdot(y + z)\cdot(y^2 + 11\cdot y\cdot z + z^2)$

Esempio 7 – Scomposizione di un numero in fattori primi

Con Semplifica>Fattorizza, tipo Triviale, si ottiene anche la scomposizione in fattori primi di un numero intero

#39: 10500

#40: $2^2\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7$

Esempio 8 – Uso del comando FACTOR

In alternativa al comando Semplifica>Fattorizza del menu, può essere utilizzato direttamente il comando FACTOR.
Nella riga di immissione scrivere il comando FACTOR(espressione); fra parentesi scrivere come espressione il numero da scomporre in fattori primi o il polinomio da fattorizzare,poi usare il pulsante Crea e Semplifica

#41: FACTOR(10500)

#42: $2^2\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7$

#43: $\mathrm{FACTOR}(x^2 - y^2)$

#44: $(x + y)\cdot(x - y)$

#45: $\mathrm{FACTOR}(x^4 - y^4)$

#46: $(x + y)\cdot(x - y)\cdot(x^2 + y^2)$

#47: $\mathrm{FACTOR}(x^3 - x\cdot y^2)$

#48: $x\cdot(x + y)\cdot(x - y)$

Osservare la differenza fra il comando FACTOR (scomposizione in fattori, espressione #48) e il comando Semplifica>Fattorizza, tipo Triviale, rispetto a x (si mette in evidenza x, espressione #50)

#49: $x^3 - x\cdot y^2$

#50: $x\cdot(x^2 - y^2)$

Esempio 9 – Uso del comando Semplifica>Sviluppa

Sviluppare il polinomio 2xy+x(x+y); introdurre il polinomio e usare il comando Semplifica>Sviluppa, rispetto alla variabile x, tipo Razionale.
Confrontare questo risultato con quello che si ottiene con Crea e Semplifica

#51: $2\cdot x\cdot y + x\cdot(x + y)$

#52: $x^2 + 3\cdot x\cdot y$

#53: $2\cdot x\cdot y + x\cdot(x + y)$

#54: $x\cdot(x + 3\cdot y)$

Esempio 10 – Scomposizione in fratti semplici

Per ricavare la scomposizione in fratti semplici di una funzione razionale (utile per il calcolo degli integrali delle funzioni razionali) si può usare il comando Semplifica>Sviluppa
Caso del denominatore con zeri reali e distinti; introdurre la funzione

#55: $\dfrac{x - 1}{2\cdot x^2 + 5\cdot x + 3}$

Selezionare l'espressione della funzione e usare Semplifica>Sviluppa
Tipo di fattorizzazione Razionale

#56: $\dfrac{5}{2\cdot x + 3} - \dfrac{2}{x + 1}$

Caso del denominatore con zeri reali di cui due coincidenti

$$\#57:\quad \frac{x^4 + 3\cdot x + 1}{x^3 - 3\cdot x^2 + 4}$$

Sviluppo in fratti semplici

$$\#58:\quad \frac{23}{3\cdot(x-2)^2} + \frac{82}{9\cdot(x-2)} - \frac{1}{9\cdot(x+1)} + x + 3$$

Caso del denominatore con zeri complessi coniugati

$$\#59:\quad \frac{x + 2}{x^3 - 2\cdot x^2 + 3\cdot x - 6}$$

Sviluppo in fratti semplici

$$\#60:\quad -\frac{4\cdot x}{7\cdot(x^2+3)} - \frac{1}{7\cdot(x^2+3)} + \frac{4}{7\cdot(x-2)}$$

4.3 Polinomi: grafici e ricerca degli zeri

Ricerca degli zeri di un polinomio: grafico del polinomio

Esempio 1 – Ricerca degli zeri del polinomio

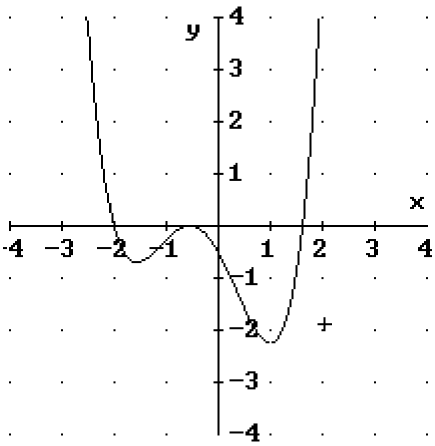
#1: $$y = \frac{x^4}{2} + \frac{3 \cdot x^3}{4} - \frac{5}{4} \cdot x^2 - \frac{7 \cdot x}{4} - \frac{1}{2}$$

Approccio grafico: si traccia il grafico del polinomio assegnato

Aprire la Finestra grafica 2D cliccando sul pulsante Finestra grafica 2D nella barra degli strumenti.
Le due finestre possono essere affiancate aprendo il menu Finestra>Affianca verticalmente
In alternativa scegliere Visualizza schede per muoversi agevolmente tra le finestre
La barra di stato della finestra grafica visualizza le seguenti informazioni:
Croce indica le coordinate della croce mobile; l'icona a sinistra della croce indica le coordinate cartesiane
Centro indica le coordinate del centro del disegno
Scala indica il fattore di scala per gli assi

Per tracciare il grafico:
Evidenziare l'equazione del polinomio nella finestra algebra
Attivare la finestra grafica cliccando sulla scheda Grafico 2D (o sul pulsante Finestra grafica 2D)
Cliccare sul pulsante Traccia il grafico dell'espressione nella barra degli strumenti della finestra grafica

Il grafico può essere copiato nella finestra algebra (foglio di lavoro): usare il menu File>Incorpora della finestra grafica



La croce mobile si sposta nel grafico con i tasti freccia o con Ctrl+freccia
Per esplorare il grafico, nella finestra grafica si attiva il pulsante Modalità traccia nella barra degli strumenti: il quadratino si sposta solo lungo la curva

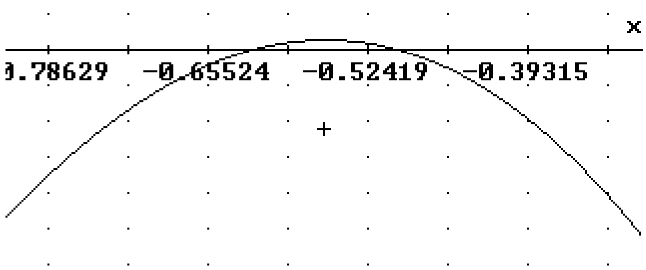
Selezionare Opzioni>Spostamento automatico con la croce per spostare automaticamente l’area grafica dove si trova la croce (l’opzione si disattiva nello stesso modo)
Per ripristinare la precedente regione grafica sono disponibili due modi:
– Pulsante Centra sull’origine, nella barra degli strumenti della finestra grafica;
– Doppio clic sul grafico incorporato nella finestra algebra, poi File>Aggiorna

Ricerca degli zeri del polinomio e analisi con Modalità traccia

Esempio 2 – Ricerca degli zeri del polinomio

$$\#2: \quad y = \frac{x^4}{2} + \frac{3 \cdot x^3}{4} - \frac{5}{4} \cdot x^2 - \frac{7 \cdot x}{4} - \frac{1}{2}$$

Attivare Modalità traccia
Spostare il quadratino vicino allo zero più a destra e muoverlo leggendo le coordinate Croce nella barra di stato: si ottiene un’approssimazione dello zero.
Agire nello stesso modo per lo zero più a sinistra
Per lo zero centrale (gli zeri?) usare il pulsante
Imposta intervallo con il mouse, selezionare graficamente un’area rettangolare
Usare eventualmente il pulsante Ingrandisci verticalmente
Si evidenziano due zeri
Incorporare il nuovo grafico



Ricerca degli zeri del polinomio: calcolo per via algebrica

Esempio 3 – Ricerca degli zeri del polinomio (espressione #1)
Generare l’equazione algebrica nel seguente modo:
Selezionare il polinomio (espressione #1)
Posizionarsi sulla riga di inserimento con F2
Copiare il polinomio con F4
Sostituire y con 0 e premere Invio

$$\#3: \quad 0 = \frac{x^4}{2} + \frac{3 \cdot x^3}{4} - \frac{5}{4} \cdot x^2 - \frac{7 \cdot x}{4} - \frac{1}{2}$$

Selezionare l'equazione (#3)
Menu Risolvi>Espressione: accettare i parametri suggeriti e selezionare Risolvi

$$\#4: \quad \mathrm{SOLVE}\left(0 = \frac{x^4}{2} + \frac{3\cdot x^3}{4} - \frac{5}{4}\cdot x^2 - \frac{7\cdot x}{4} - \frac{1}{2},\ x\right)$$

$$\#5: \quad x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = -2$$

Teorema di Ruffini – Divisori di un polinomio

Esempio 4 – Ricerca dei divisori del polinomio P(x)=x^3+2x^2+x-4

Calcolare il resto della divisione di un polinomio per un monomio per stabilire se il polinomio è divisibile per il monomio.
Usare il comando Dichiara>Definisci funzione
Nel campo Nome della funzione e argomenti inserire P(x)
Nel campo Definizione inserire l'espressione del polinomio e dare OK
Nella riga di inserimento espressione scrivere P(1) e premere il pulsante Crea e semplifica

$$\#6: \quad P(x) := x^3 + 2\cdot x^2 + x - 4$$

$$\#7: \quad P(1)$$

$$\#8: \quad 0$$

La funzione introdotta può essere modificata e cancellata usando il comando Dichiara>Definisci funzione
Nel campo Nome della funzione e argomenti inserire il nome della funzione (in questo esempio P(x)) e modificare o cancellare l'espressione che compare nel campo Definizione

Esempio 5 – Uso delle funzioni QUOTIENT e REMAINDER

QUOTIENT(A(x),B(x)) fornisce il quoziente tra i polinomi A(x) e B(x)
REMAINDER(A(x),B(x)) fornisce il resto della divisione tra i polinomi A(x) e B(x)
Queste funzioni permettono di risolvere in un altro modo il problema precedente.

$$\#9: \quad \mathrm{QUOTIENT}(x^3 + 2\cdot x^2 + x - 4,\ x - 1)$$

$$\#10: \quad x^2 + 3\cdot x + 4$$

$$\#11: \quad \mathrm{REMAINDER}(x^3 + 2\cdot x^2 + x - 4,\ x - 1)$$

$$\#12: \quad 0$$

Un altro esempio: quoziente e resto dei polinomi A(x)=4x^3−5x+1 e B(x)=2x^2−1

#13: $\mathbf{QUOTIENT(4\cdot x^3 - 5\cdot x + 1,\ 2\cdot x^2 - 1)}$

#14: $\mathbf{2\cdot x}$

#15: $\mathbf{REMAINDER(4\cdot x^3 - 5\cdot x + 1,\ 2\cdot x^2 - 1)}$

#16: $\mathbf{1 - 3\cdot x}$

Esempio 6 – Uso della funzione VECTOR

La funzione VECTOR genera un vettore di valori di un'espressione valutata in una sequenza di punti.
Questo comando consente di selezionare una variabile e di impostare il valore iniziale, il valore finale ed il passo.
VECTOR(u, k, n) restituisce un vettore di n elementi generati a partire dall'espressione u(k), con la variabile k che varia da 1 a n con passo 1
Introdurre il vettore dei quadrati dei numeri interi da 1 a 5
Scrivere il comando (#17) e usare il pulsante Crea e Semplifica

#17: $\mathbf{VECTOR(x^2,\ x,\ 5)}$

#18: $\mathbf{[1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25]}$

VECTOR(u, k, m, n) restituisce un vettore di n−m+1 elementi, generati a partire dall'espressione u(k), con la variabile k che varia da m a n con passo 1
Vettore dei cubi dei numeri interi da 5 a 10

#19: $\mathbf{VECTOR(x^3,\ x,\ 5,\ 10)}$

#20: $\mathbf{[125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729,\ 1000]}$

Il comando seguente fornisce lo stesso risultato sotto forma di tabella (matrice): scrivere il comando (#21) e usare Crea e Semplifica

#21: $\mathbf{VECTOR(\left[x,\ x^3\right],\ x,\ 5,\ 10)}$

#22:
$$\begin{bmatrix} 5 & 125 \\ 6 & 216 \\ 7 & 343 \\ 8 & 512 \\ 9 & 729 \\ 10 & 1000 \end{bmatrix}$$

La forma più generale del comando VECTOR è la seguente
VECTOR(u, k, m, n, s) restituisce un vettore di (n–m)/s+1 elementi (numero arrotondato per difetto), generati a partire dall' espressione u(k), con la variabile k che varia da m a n con passo s
Vettore dei quadrati dei numeri interi pari da 2 a 10

#23: $\mathrm{VECTOR}(x^2, x, 2, 10, 2)$

#24: $[4, 16, 36, 64, 100]$

Esempio 7 – Ricerca di tutti i monomi divisori di un polinomio con la funzione VECTOR

Definire il polinomio P(x)=x^3+4x^2+x–6 con Dichiara>Definisci funzione e usare la funzione VECTOR (comando #26)

#25: $P(x) := x^3 + 4\cdot x^2 + x - 6$

#26: $\mathrm{VECTOR}([x, P(x)], x, -6, 6)$

#27:
$$\begin{bmatrix} -6 & -84 \\ -5 & -36 \\ -4 & -10 \\ -3 & 0 \\ -2 & 0 \\ -1 & -4 \\ 0 & -6 \\ 1 & 0 \\ 2 & 20 \\ 3 & 60 \\ 4 & 126 \\ 5 & 224 \\ 6 & 360 \end{bmatrix}$$

P(x) è nullo per x=–3, x=–2, x=1 perciò i monomi divisori sono (x+3) (x+2) e (x–1)

Massimo comun divisore e minimo comune multiplo di polinomi

Esempio 8 – Massimo Comun Divisore fra due polinomi

Si determina con la funzione POLY_GCD(A(x),B(x))
Calcolare il MCD fra i polinomi
A(x)=(x – 1)(x – 2)(x – 3)(x – 4)= x^4–10x^3+35x^2–50x+24
B(x)=(x – 1)(x – 5)=x^2–6x+5

#28: $A(x) := x^4 - 10\cdot x^3 + 35\cdot x^2 - 50\cdot x + 24$

#29: $B(x) := x^2 - 6\cdot x + 5$

#30: POLY_GCD(A(x), B(x))

#31: $x - 1$

Esempio 9 – Minimo Comune Multiplo fra due polinomi

Si determina tenendo conto che mcm=(A(x)*B(x))/MCD

#32: $\dfrac{A(x)\cdot B(x)}{\text{POLY\_GCD}(A(x),\ B(x))}$

#33: $(x^2 - 6\cdot x + 5)\cdot(x^3 - 9\cdot x^2 + 26\cdot x - 24)$

#34: $(x - 1)\cdot(x - 2)\cdot(x - 3)\cdot(x - 4)\cdot(x - 5)$

Esempio 10 – Massimo Comun Divisore e Minimo Comune Multiplo fra numeri

Per calcolare il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo fra due o più numeri si usano le funzioni GCD e LCM (vedere la guida in linea)

#35: GCD(12, 18, 42)

#36: 6

#37: LCM(6, 8, 10, 12)

#38: 120

4.4 Soluzione di equazioni

Equazioni numeriche intere

Esempio 1 – Soluzione di un'equazione numerica intera

Inserire l'equazione 5x–6=2x+15 e risolvere premendo il pulsante Risolvi espressione.
Nella finestra di dialogo scegliere Metodo: algebrico, Dominio: complesso (default)

#1: $5\cdot x - 6 = 2\cdot x + 15$

#2: $\mathrm{SOLVE}(5\cdot x - 6 = 2\cdot x + 15, x)$

#3: $x = 7$

L'equazione #1 può essere risolta passo passo: questa tecnica è utile didatticamente.
Inserire l'espressione #1–2x e premere il pulsante Crea e semplifica

#4: $(5\cdot x - 6 = 2\cdot x + 15) - 2\cdot x$

#5: $3\cdot x - 6 = 15$

Inserire #5+6 e premere Crea e semplifica

#6: $(3\cdot x - 6 = 15) + 6$

#7: $3\cdot x = 21$

Inserire #7/3 e premere Crea e semplifica

#8: $\dfrac{3\cdot x = 21}{3}$

#9: $x = 7$

Esempio 2 – Identità

#10: $7\cdot x + 12 - 4\cdot x + 2 + x = 4\cdot x + 14$

#11: $\mathrm{SOLVE}(7\cdot x + 12 - 4\cdot x + 2 + x = 4\cdot x + 14, x)$

#12: true

Esempio 3 – Equazione impossibile

#13: $3\cdot x\cdot(x - 2) - 3\cdot(x + 4) = x\cdot(3\cdot x - 1) - 4\cdot(2\cdot x + 1)$

#14: $\mathrm{SOLVE}(3\cdot x\cdot(x - 2) - 3\cdot(x + 4) = x\cdot(3\cdot x - 1) - 4\cdot(2\cdot x + 1), x)$

#15: false

Esempio 4 – Inserire l'equazione di secondo grado (due radici reali e distinte)

#16: $x^2 - 4\cdot x + 3 = 0$

Risolvere con Risolvi espressione; scegliere Metodo: algebrico, Dominio: reale

#17: $\mathrm{SOLVE}(x^2 - 4\cdot x + 3 = 0, x, \mathrm{Real})$

#18: $x = 3 \vee x = 1$

Esempio 5 – Inserire l'equazione (due radici complesse coniugate)

#19: $x^2 + x + 1 = 0$

Risolvere con Risolvi espressione; scegliere Metodo: algebrico, Dominio: reale

#20: $\mathrm{SOLVE}(x^2 + x + 1 = 0, x, \mathrm{Real})$

#21: **false**

Risolvere con Risolvi espressione; scegliere Metodo: algebrico, Dominio: complesso

#22: $\mathrm{SOLVE}(x^2 + x + 1 = 0, x)$

#23: $$x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2} \vee x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2}$$

Risolvere con Risolvi espressione; scegliere Metodo: numerico, Dominio: complesso

#24: $\mathrm{NSOLVE}(x^2 + x + 1 = 0, x)$

#25: $x = -0.5 - 0.8660254037\cdot \hat{\imath} \vee x = -0.5 + 0.8660254037\cdot \hat{\imath}$

Equazioni di grado superiore al secondo

Esempio 6 – Equazione di quarto grado con radici reali e radici complesse coniugate

#26: $x^4 - 16$

#27: $\mathrm{SOLVE}(x^4 - 16, x)$

#28: $x = -2\cdot \hat{\imath} \vee x = 2\cdot \hat{\imath} \vee x = -2 \vee x = 2$

Esempio 7 – Equazione reciproca

#29: $6\cdot x^4 + 13\cdot x^3 - 13\cdot x - 6 = 0$

#30: $\mathrm{SOLVE}(6\cdot x^4 + 13\cdot x^3 - 13\cdot x - 6 = 0, x)$

#31: $$x = -\frac{2}{3} \lor x = -\frac{3}{2} \lor x = -1 \lor x = 1$$

Equazioni numeriche fratte

Esempio 8 – Equazione fratta con radice reale

#32: $$\frac{6}{x-2} = \frac{5}{x-3}$$

#33: $$\text{SOLVE}\left(\frac{6}{x-2} = \frac{5}{x-3}, x\right)$$

#34: $$x = \pm\infty \lor x = 8$$

Notare che accanto alla soluzione corretta compaiono come risposta +∞ e −∞: infatti per x tendente a ±∞ la funzione tende a zero.
In casi come questo, per valori di x sufficientemente grandi Derive assegna a f(x) il valore 0, indicando l'infinito come radice.
Per calcolare il limite per x che tende a +∞, selezionare l'espressione #32, aprire il menu Calcola>Limite, nel campo Punto limite scrivere ∞ (usare il pulsante nella barra dei simboli), scegliere Limite da sinistra, premere il pulsante Semplifica: si ottiene 0.

#35: $$\lim_{x\to\infty} \frac{x-8}{(x-2)\cdot(x-3)}$$

#36: $$0$$

Equazioni letterali

Osservare il diverso comportamento nei due esempi seguenti (equazioni impossibili)

Esempio 9 – Equazione impossibile

#37: $$\frac{5\cdot x+1}{2\cdot x+3} - \frac{4\cdot x+3}{3\cdot x-1} = \frac{x^2 - 27\cdot x - 7}{6\cdot x^2 + 7\cdot x - 3}$$

#38: $$\text{SOLVE}\left(\frac{5\cdot x+1}{2\cdot x+3} - \frac{4\cdot x+3}{3\cdot x-1} = \frac{x^2 - 27\cdot x - 7}{6\cdot x^2 + 7\cdot x - 3}, x\right)$$

#39: false

Per verificare portare al primo membro e semplificare.
Procedere come segue: richiamare l'espressione #37 con F4,

correggere l'uguale con il segno meno, uguagliare a zero, usare il pulsante Crea e Semplifica; la verifica esplicita è didatticamente utile.

#40: $$\frac{5\cdot x + 1}{2\cdot x + 3} - \frac{4\cdot x + 3}{3\cdot x - 1} - \frac{x^2 - 27\cdot x - 7}{6\cdot x^2 + 7\cdot x - 3} = 0$$

#41: $$1 = 0$$

Esempio 10 – Equazione impossibile

#42: $$\frac{3\cdot x^2 - x + 1}{x^2 - 9} - \frac{x - 1}{x - 3} - \frac{2\cdot x + 3}{x + 3} = 0$$

#43: $$\text{SOLVE}\left(\frac{3\cdot x^2 - x + 1}{x^2 - 9} - \frac{x - 1}{x - 3} - \frac{2\cdot x + 3}{x + 3} = 0,\ x\right)$$

#44: $$x = \pm\infty$$

Le soluzioni trovate da Derive non sono ovviamente accettabili
Facendo il denominatore comune (Semplifica>Base) si ha

#45: $$\frac{13}{(x + 3)\cdot(x - 3)} = 0$$

Equazioni irrazionali

Per questo tipo di equazioni ci possono essere soluzioni accettabili e soluzioni non accettabili!

Esempio 11 – Radici di indice pari

#46: $\sqrt{(3\cdot x + 1)} = \sqrt{(x^2 - x - 1)}$

#47: $\text{SOLVE}(\sqrt{(3\cdot x + 1)} = \sqrt{(x^2 - x - 1)},\ x)$

#48: $$x = 2 - \sqrt{6} \vee x = \sqrt{6} + 2$$

Vengono calcolate due soluzioni, ma una non è accettabile.
Verificare: in questo caso si sottolinea la necessità della verifica
Selezionare l'equazione #46 e premere il pulsante SUB (oppure usare il menu Semplifica>Sostituisci variabili, vedere esempio seguente); nel Campo Nuovo valore scrivere il valore $\sqrt{6}+2$ da sostituire: la soluzione è accettabile

#49: $$\sqrt{(3\cdot\sqrt{6} + 7)} = \sqrt{(3\cdot\sqrt{6} + 7)}$$

Ripetere sostituendo $x=2-\sqrt{6}$
Soluzione non accettabile (uguaglianza in campo complesso)

#50: $\hat{\imath}\cdot\sqrt{(3\cdot\sqrt{6} - 7)} = \hat{\imath}\cdot\sqrt{(3\cdot\sqrt{6} - 7)}$

Esempio 12 – Radici di indice pari

In questo esempio non viene trovata nessuna soluzione non accettabile

#51: $\sqrt{(4\cdot x - 2)} - \sqrt{(2\cdot x - 4)} = 3$

#52: $\mathrm{SOLVE}(\sqrt{(4\cdot x - 2)} - \sqrt{(2\cdot x - 4)} = 3, x)$

#53: $x = 6\cdot\sqrt{3} + \frac{25}{2}$

Verifica (soluzione accettabile): selezionare l'espressione #51, aprire il menu Semplifica>Sostituisci variabili, nel campo Nuovo valore scrivere il valore $6\sqrt{3}+25/2$, premere il pulsante Semplifica.

#54: $3 = 3$

Esempio 13 – Radici di indice pari

#55: $\sqrt{(x - 5)} - \sqrt{(2\cdot x - 1)} = \sqrt{(x + 3)}$

#56: $\mathrm{SOLVE}(\sqrt{(x - 5)} - \sqrt{(2\cdot x - 1)} = \sqrt{(x + 3)}, x)$

#57: $x = 1 - \frac{\sqrt{65}}{2}$

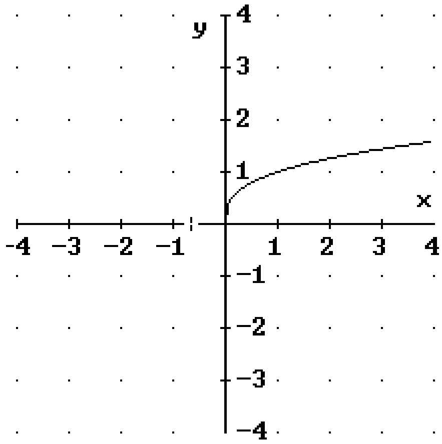
Verifica: soluzione non accettabile

#58: $\hat{\imath}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{65}}{2} - 4\right)} = \hat{\imath}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{65}}{2} - 4\right)}$

Esempio 14 – Potenze con esponente razionale.

In un foglio di lavoro successivo saranno trattate in maggior dettaglio le funzioni elementari in ambiente Derive.
Le funzioni di libreria di Derive sono funzioni di variabile complessa e a valori complessi: questo fatto comporta come conseguenza che a volte si ottengono dei grafici e dei risultati apparentemente "sbagliati".
Si rimanda al paragrafo 4.8 sulle funzioni elementari per maggiori spiegazioni.
Un esempio è il grafico di x^(1/3) (radice cubica)
Viene tracciata solo una parte del grafico, manca la parte corrispondente a valori di x negativi

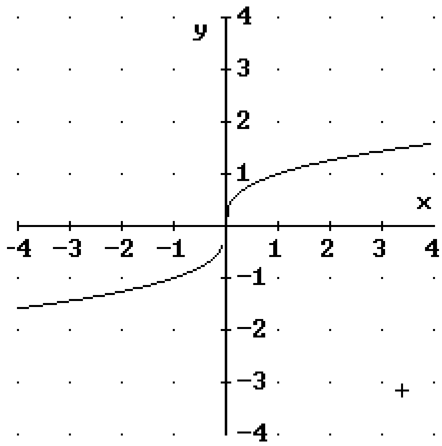
#59: $x^{1/3}$



Per disegnare il grafico correttamente: aprire il Menu Dichiara>Impostazioni di semplificazione
Nel campo Radice n-esima n° complesso scegliere Real e premere OK
Disegnare di nuovo il grafico, che appare corretto.

#60: Branch := Real

#61: $x^{1/3}$



Esempio 15 – Radici di indice dispari

#62: $x^{1/3} = (16\cdot x)^{1/5}$

Per ottenere tutte le radici dell'equazione aprire il menu Dichiara>Impostazioni di semplificazione
Nel Campo Radice n-esima n° complesso: scegliere Real, poi risolvere l'equazione. Si ottengono tutte le radici.

#63: Branch := Real

#64: $\text{SOLVE}(x^{1/3} = (16\cdot x)^{1/5}, x)$

#65: $x = 0 \vee x = -64 \vee x = 64$

Se invece nel Campo Radice n–esima n° complesso si sceglie Principal (scelta di default), si ottengono solo le due radici positive e manca la radice negativa

#66: Branch := Principal

#67: $\text{SOLVE}(x^{1/3} = (16\cdot x)^{1/5}, x)$

#68: $x = 0 \lor x = 64$

Esempio 16 – Radici di indice dispari

#69: $(2\cdot x + 1)^{1/3} - (x + 2)^{1/3} = (x - 1)^{1/3}$

#70: Branch := Real

#71: $\text{SOLVE}((2\cdot x + 1)^{1/3} - (x + 2)^{1/3} = (x - 1)^{1/3}, x)$

#72: $x = -\frac{1}{2} \lor x = -2 \lor x = 1$

Con la scelta di default si ha invece

#73: Branch := Principal

#74: $\text{SOLVE}((2\cdot x + 1)^{1/3} - (x + 2)^{1/3} = (x - 1)^{1/3}, x)$

#75: $x = -2 \lor x = 1$

Soluzione numerica di equazioni

Per molte equazioni si deve ricorrere alla soluzione numerica.

Esempio 17 – Equazione algebrica di quinto grado

Soluzione Algebrica: Derive riscrive l'equazione senza risolverla

#76: $x^5 - x^3 + x^2 - 0.5 = 0$

#77: $\text{SOLVE}(x^5 - x^3 + x^2 - 0.5 = 0, x)$

#78: $x^2\cdot(x^3 - x + 1) = \frac{1}{2}$

Soluzione numerica in campo reale

#79: $\text{NSOLVE}(x^5 - x^3 + x^2 - 0.5 = 0, x, \text{Real})$

#8: $x = 0.8243281908 \lor x = -0.6010779776 \lor x = -1.242643341$

Soluzione numerica in campo complesso (si trovano tutte le soluzioni reali e complesse)

#81: $\mathbf{NSOLVE\left(x^2\cdot(x^3 - x + 1) = \frac{1}{2}, x\right)}$

#82: $\mathbf{x = 0.5096965643 - 0.743153871\cdot \hat{\imath} \lor x = 0.5096965643 + 0.743153871\cdot \hat{\imath}}$

$\mathbf{\lor x = 0.8243281908 \lor x = -0.6010779776 \lor x = -1.242643341}$

La soluzione numerica è particolarmente utile per equazioni esponenziali, logaritmiche, ecc.
Per queste equazioni è spesso utile tracciare un grafico, che permette di localizzare facilmente le soluzioni dell'equazione.
Si sottolinea l'utilità didattica di affiancare lo strumento grafico accanto al metodo numerico, i cui risultati a volte non sono di immediata interpretazione.

Esempio 18 – Equazione esponenziale

#83: $\mathbf{2^x + 3^x - 1 = 0}$

Soluzione algebrica: l'equazione non viene risolta

#84: $\mathbf{SOLVE(2^x + 3^x - 1 = 0, x, Real)}$

#85: $\mathbf{3^x + 2^x = 1}$

Soluzione numerica

#86: $\mathbf{NSOLVE(2^x + 3^x - 1 = 0, x)}$

#87: $\mathbf{x = -0.787884911}$

Esempio 19 – Equazione logaritmica

#88: $\mathbf{LN(x + 3) = x + 1}$

Soluzione algebrica: l'equazione viene riscritta in un altro modo

#89: $\mathbf{SOLVE(LN(x + 3) = x + 1, x, Real)}$

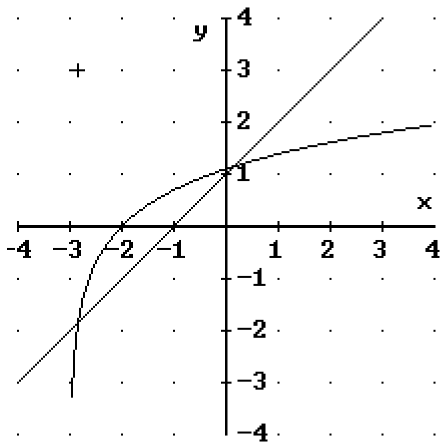
#90: $\mathbf{\hat{e}^{x+1} - x = 3}$

Soluzione numerica

#91: $\mathbf{NSOLVE(LN(x + 3) = x + 1, x, Real)}$

#92: $\mathbf{x = -2.84140566}$

Si trova una sola soluzione, ma tracciando un grafico si può osservare che le soluzione reali sono due.
Tracciamo sullo stesso grafico le due curve di equazione y=ln(x+3) e y=x+1: i punti di intersezione sono le radici dell'equazione assegnata.



La radice positiva può essere trovata ancora con la funzione NSOLVE, imponendo la risoluzione dell'equazione in un dato intervallo con la sintassi
NSOLVE(equazione,variabile,estremo_inferiore,estremo_superiore)
I valori estremo_inferiore e estremo_superiore sono gli estremi di un intervallo che contiene la soluzione osservata per via grafica

#93: NSOLVE(LN(x + 3) = x + 1, x, 0, 1)

#94: x = 0.1461932206

Se si usa un intervallo che contiene due soluzioni, Derive ne approssima solo una; ad esempio

#95: NSOLVE(LN(x + 3) = x + 1, x, –3, 1)

#96: x = –2.84140566

Esempio 20 – Equazione trigonometrica

#97: x·SIN(x) – 1 = 0

Soluzione algebrica: l'equazione viene riscritta senza risolverla

#98: SOLVE(x·SIN(x) – 1 = 0, x, Real)

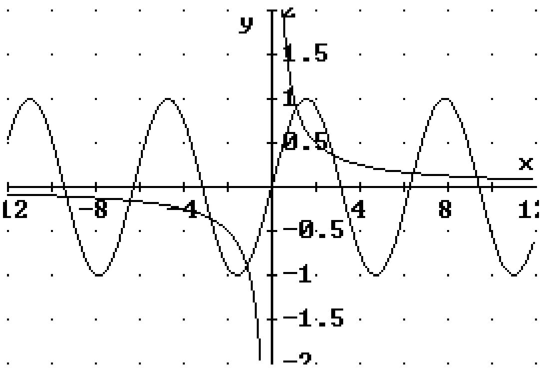
#99: x·SIN(x) = 1

Soluzione numerica:

#100: NSOLVE(x·SIN(x) – 1 = 0, x, Real)

#101: x = –2.772604711

L'equazione possiede infinite soluzionie e Derive ne approssima una: nel grafico sono tracciate le funzioni y=sin(x) e y=1/x.



Se si vuole approssimare un'altra soluzione occorre precisare gli estremi dell'intervallo a cui appartiene la soluzione richiesta; ad esempio

#102: $\mathbf{NSOLVE}\left(x \cdot \mathrm{SIN}(x) - 1 = 0,\ x,\ 0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

#103: $x = 1.114157098$

4.5 Soluzione di sistemi di equazioni

Soluzione di un sistema di equazioni lineari

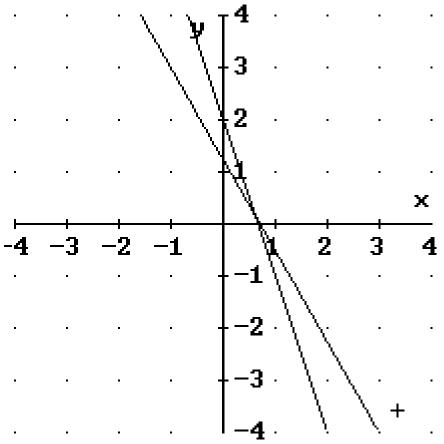
Esempio 1 – Soluzione grafica e soluzione algebrica

Inserire le equazioni delle due rette 3x+y=2 7x+4y=5

#1: $3\cdot x + y = 2$

#2: $7\cdot x + 4\cdot y = 5$

Approccio grafico.
Disegnare il grafico delle due equazioni nella stessa finestra grafica (non chiudere la finestra dopo aver disegnato il primo grafico)



Soluzione algebrica
Aprire il menu Risolvi>Sistema;
Finestra di dialogo Imposta soluzione sistema: scegliere il numero di equazioni e premere OK
Finestra di dialogo Risolvi 2 equazioni: nei campi 1 e 2 scrivere il numero delle equazioni #1 e #2, nel campo Variabili della soluzione accettare in questo caso x e y e premere Risolvi

#3: SOLVE([3·x + y = 2, 7·x + 4·y = 5], [x, y])

#4: $$\left[x = \frac{3}{5} \wedge y = \frac{1}{5}\right]$$

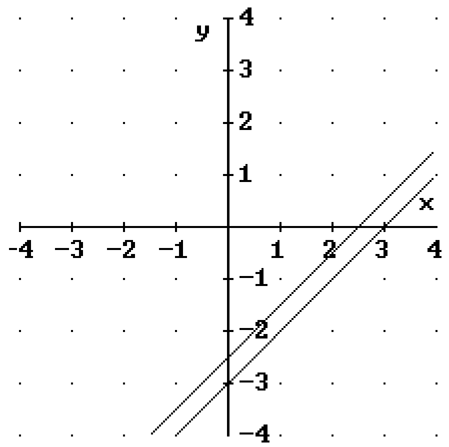
Esempio 2 – Sistema di due equazioni in due incognite impossibile (rette parallele).

Nella Finestra di dialogo Risolvi 2 equazioni inserire le equazioni
x–y=3 2x–2y=5

#5: SOLVE([x – y = 3, 2·x – 2·y = 5], [x, y])

#6: []

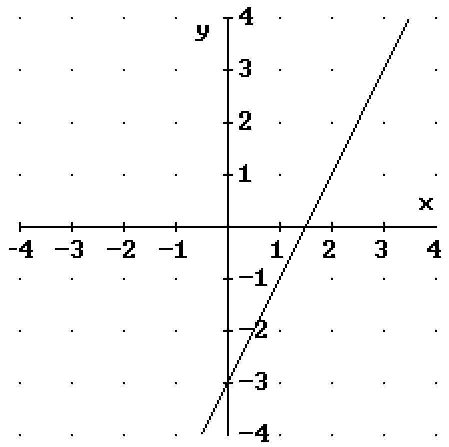
Selezionare le due equazioni (sottoespressioni nella #5) e tracciarle una dopo l’altra



Esempio 3 – Sistema di due equazioni in due incognite indeterminato (rette coincidenti)

#7: SOLVE([2·x – y = 3, 4·x – 2·y = 6], [x, y])

#8: [2·x – y = 3]



Esempio 4 – Sistema indeterminato.

Inserire le equazioni 3x–y+z=1 y+z=0

#9: SOLVE([3·x – y + z = 1, y + z = 0], [x, y])

#10: $\left[x = \dfrac{1 - 2\cdot z}{3} \wedge y = -z\right]$

Esempio 5 – Sistema lineare di tre equazioni in tre incognite

#11: SOLVE([x – 2·y + 3·z = 4, 3·x – 3·y – z = 1, 2·x + y – 2·z = 7], [x, y, z])

#12: [x = 4 ∧ y = 3 ∧ z = 2]

Esempio 6 – Sistema indeterminato

#13: SOLVE([a + b – c + d = 1, a + b – c – d = 1, a – b + c – d = –1, 3·a + b – c – d = 1], [a, b, c, d])

#14: [a = 0 ∧ b – c = 1 ∧ d = 0]

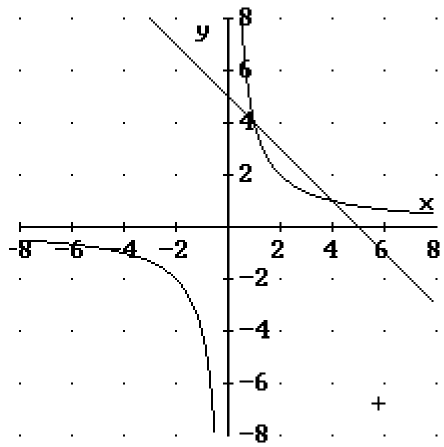
Soluzione di un sistema di equazioni non lineari

Esempio 7 – Retta e iperbole

Inserire le equazioni x+y=5 xy=4
Approccio grafico
Disegnare il grafico delle due equazioni senza chiudere la finestra grafica dopo il disegno della prima curva.

#15: $x + y = 5$

#16: $xy = 4$



Soluzione algebrica

#17: SOLVE([x + y = 5, x·y = 4], [x, y])

#18: $[x = 1 \wedge y = 4, x = 4 \wedge y = 1]$

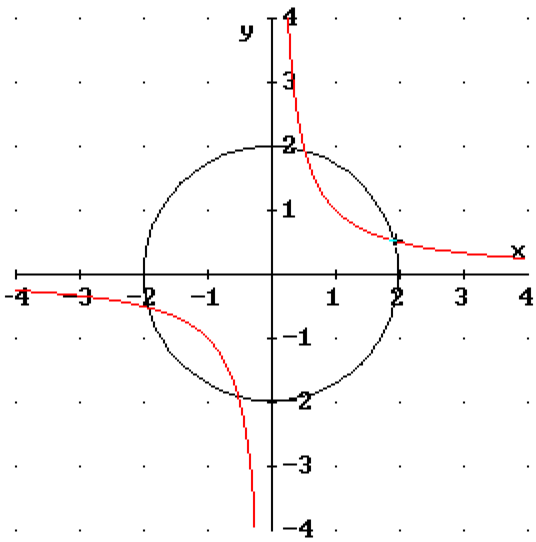
Esempio 8 – Circonferenza e iperbole

Inserire le equazioni x^2+y^2=4 xy=1

#19: $x^2 + y^2 = 4$

#20: $x \cdot y = 1$

Approccio grafico
Disegnare il grafico delle due equazioni senza chiudere la finestra grafica dopo il disegno della prima curva.
Il cerchio appare come un'ellisse; per impostare la stessa scala per entrambi gli assi posizionarsi nella finestra del grafico, menu Imposta>Rapporto di aspetto, premere Resetta
La modalità traccia non funziona perchè le due funzioni sono funzioni implicite; per avere un'approssimazione delle radici per via grafica si può usare la croce: spostarla sui punti di intersezione e leggere le approssimazioni nella barra di stato.
Incorporare il grafico
Se il grafico viene ridimensionato nella finestra algebra (agendo con il mouse sui quadratini ai margini) si altera la scala sui due assi.
Con doppio clic sul grafico incorporato si riattiva il grafico, riapplicare il comando Imposta>Rapporto di aspetto, poi aggiornare l'oggetto con File>Aggiorna



Soluzione algebrica
Menu Risolvi>Sistema

#21: $\text{SOLVE}([x^2 + y^2 = 4,\ x\cdot y = 1],\ [x,\ y])$

#22: $$\left[x = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},\ x = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2},\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \wedge y = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2},\ x = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

Calcolo dei valori approssimati delle soluzioni.
La funzione ELEMENT permette di selezionare e/o estrarre un elemento da una lista.
Inserire nella riga di espressione il comando ELEMENT(#22,1) e premere il pulsante Approssima.
Gli argomenti della funzione ELEMENT sono il numero dell'espressione che contiene la lista e la posizione nella lista dell'elemento che si vuole selezionare (dando Invio dopo l'inserimento della funzione si visualizza l'elemento selezionato con la funzione; usando direttamente il bottone Approssima si evita questa visualizzazione).
Agire in modo analogo per le altre soluzioni (cambiare la posizione dell'elemento nella lista)

#23: $x = 1.931851652 \wedge y = 0.5176380902$

#24: $x = 0.5176380902 \wedge y = 1.931851652$

#25: $x = -0.5176380902 \wedge y = -1.931851652$

#26: $x = -1.931851652 \wedge y = -0.5176380902$

Esempio 9 – Ellisse e iperbole. Sistema impossibile

Inserire le equazioni
x^2/9+y^2/4 (ellisse) e xy=-4 (iperbole equilatera)
Soluzione algebrica

#27 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

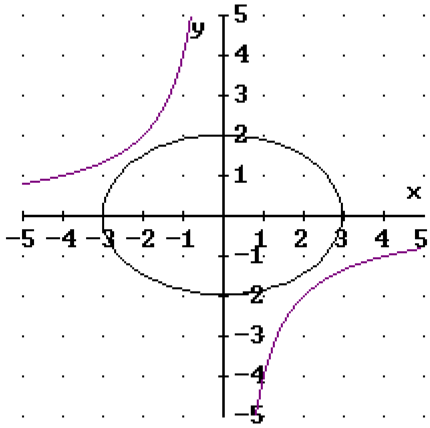
#28 $x = -4$

#29 $\text{SOLVE}\left(\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ x \cdot y = -4\right],\ [x,\ y]\right)$

Derive trova soluzioni complesse

#30: $\left[x = \frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2} \wedge y = -\frac{\sqrt{21}}{3} + \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{3},\ x = \frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2} \wedge y = -\frac{\sqrt{21}}{3} - \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{3},\ x = -\frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{21}}{3} + \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{3},\ x = -\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{21}}{3} - \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{3}\right]$

Grafico: le due curve non si intersecano



Esempio 10 – Sistema letterale

Risolvere algebricamente il sistema x^2+y^2=r^2 (x-r)^2+y^2=r^2
rispetto alle variabili x,y
Inserire le equazioni separatamente

#31: $x^2 + y^2 = r^2$

#32: $(x - r)^2 + y^2 = r^2$

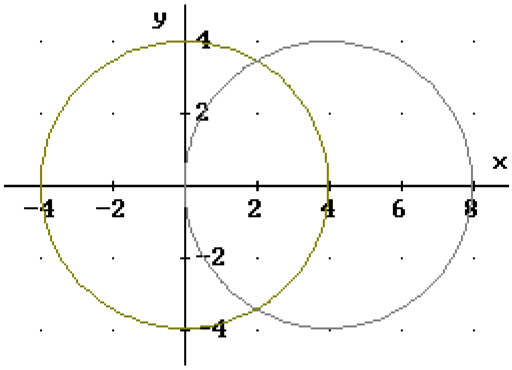
Aprire il menu Risolvi>Sistema; scrivere il numero delle due equazioni nei due campi delle equazioni; cliccare sul campo Variabili della soluzione e selezionare x e y (e non r che è un parametro) e premere Risolvi

#33: $\text{SOLVE}\left(\left[x^2 + y^2 = r^2,\ (x - r)^2 + y^2 = r^2\right],\ [x, y]\right)$

#34: $$\left[x = \frac{r}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{3}\cdot r}{2},\ x = \frac{r}{2} \wedge y = -\frac{\sqrt{3}\cdot r}{2}\right]$$

Grafico nel caso r=4

#35: $r := 4$



Il sistema possiede soluzione per ogni valore di r non nullo?

#36: $r :=$

4.6 Soluzione di disequazioni

Esempio 1 – Disequazione intera di primo grado

Inserire la disequazione 2x+3<1; aprire il menu Risolvi>Espressione, Metodo: Algebrico, Dominio: Reale

#1: $2\cdot x + 3 < 1$

#2: SOLVE($2\cdot x + 3 < 1$, x, Real)

#3: $x < -1$

Esempio 2 – Disequazioni intere di secondo grado e di grado superiore

#4: $x^2 - 3\cdot x + 2 > 0$

#5: SOLVE($x^2 - 3\cdot x + 2 > 0$, x, Real)

#6: $x < 1 \vee x > 2$

#7: $x^3 + 125 > 0$

#8: SOLVE($x^3 + 125 > 0$, x, Real)

#9: $x > -5$

Esempio 3 – Disequazioni fratte

#10: $x > \frac{1}{x}$

#11: $\text{SOLVE}\left(x > \frac{1}{x}, x, \text{Real}\right)$

#12: $-1 < x < 0 \vee x > 1$

#13: $\frac{x^2 - 3\cdot x}{x^2 - 4\cdot x + 4} \ge 0$

#14: $\text{SOLVE}\left(\frac{x^2 - 3\cdot x}{x^2 - 4\cdot x + 4} \ge 0, x, \text{Real}\right)$

#15: $x \le 0 \vee x \ge 3$

Esempio 4 – Disequazione con valore assoluto

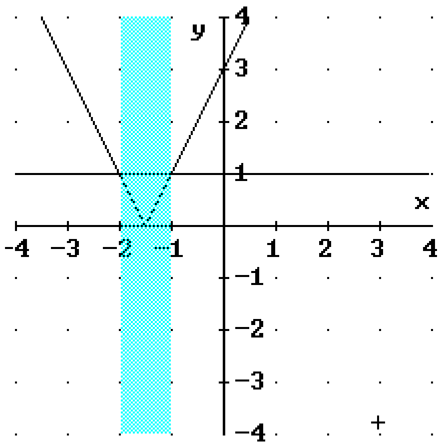
Inserire la disequazione; usare il pulsante Risolvi espressione

#16: $|2\cdot x + 3| < 1$

#17: $\mathrm{SOLVE}(|2\cdot x + 3| < 1, x, \mathrm{Real})$

#18: $-2 < x < -1$

Visualizzazione grafica
Selezionare il primo membro della #16 e tracciare il grafico
Senza chiudere la finestra grafica selezionare il secondo membro e tracciare il grafico, poi selezionare la soluzione e tracciare il grafico
Incorporare il grafico ottenuto
L'area colorata rappresenta l'insieme dei punti (x,y) per i quali la disequazione #16 è verificata.



Esempio 5 – Sistema di disequazioni

Per risolvere un sistema di disequazioni si usa l'operatore logico AND, il cui simbolo è ∧ (sulla barra dei simboli)
Introdurre le tre disequazioni del sistema (#19, #20, #21); scrivere nella riga di immissione dell'espressione il comando SOLVE(#19AND#20AND#21,x) e premere il pulsante Crea e semplifica (gli argomenti della funzione SOLVE sono le etichette delle tre espressioni e la variabile rispetto a cui si risolve)

#19: $\dfrac{2\cdot x + 4}{6 - x} > 0$

#20: $x^2 + x + 1 > 0$

#21: $1 - 3\cdot x < 0$

#22: $\mathrm{SOLVE}\left(\dfrac{2\cdot x + 4}{6 - x} > 0 \wedge x^2 + x + 1 > 0 \wedge 1 - 3\cdot x < 0, x\right)$

#23: $\dfrac{1}{3} < x < 6$

Visualizzazione grafica: può essere didatticamente utile risolvere per passi successivi il sistema e ottenere lo ”specchietto risolutivo” con cui vengono risolte tradizionalmente i sistemi di disequazioni.
A questo scopo si usa la funzione IF che ha la seguente sintassi
IF(condizione,espressione1,espressione2)
condizione è un’espressione booleana, che può essere vera o falsa;
espressione1 è l’espressione impiegata se la condizione è vera;
espressione2 è l’espressione impiegata se la condizione è falsa (questa espressione può essere omessa).
Risolvere le tre disequazioni separatamente

#24: $\mathrm{SOLVE}\left(\frac{2\cdot x+4}{6-x}>0,\ x,\ \mathrm{Real}\right)$

#25: $-2<x<6$

#26: $\mathrm{SOLVE}(x^2+x+1>0,\ x,\ \mathrm{Real})$

#27: true

#28: $\mathrm{SOLVE}(1-3\cdot x<0,\ x,\ \mathrm{Real})$

#29: $x>\frac{1}{3}$

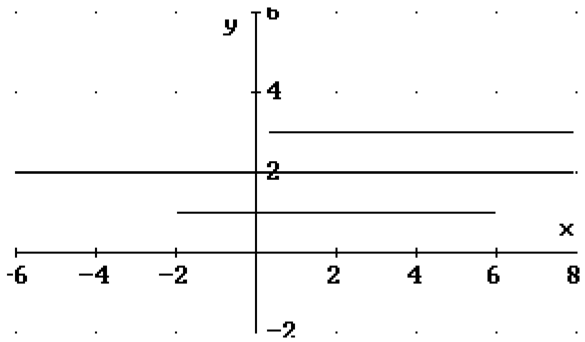
Visualizzazione degli intervalli dove sono soddisfatte le tre disequazioni
Introdurre le tre espressioni seguenti

#30: $\mathrm{IF}\left(\frac{2\cdot x+4}{6-x}>0,\ 1\right)$

#31: $\mathrm{IF}(x^2+x+1>0,\ 2)$

#32: $\mathrm{IF}(1-3\cdot x<0,\ 3)$

Selezionare l’espressione #30, aprire la Finestra grafica e tracciare il grafico
Senza chiudere la Finestra grafica, selezionare l’espressione #31 e tracciare il grafico, lo stesso per la #32; si ottiene il seguente grafico, nel quale le linee orizzontali rappresentano gli intervalli in cui sono soddisfatte le singole disequazioni
La soluzione del sistema è data dall’intervallo (1/3,6) nel quale sono soddisfatte tutte le disequazioni del sistema



Esempio 6 – Sistema di disequazioni.

Soluzione del sistema dell'esempio precedente con il comando Risolvi>Sistema

Aprire il menu Risolvi>Sistema; nel Campo Numero di equazioni scrivere 3 e premere OK

Nella finestra Risolvi 3 equazioni inserire nei Campi 1–2–3 il numero delle espressioni (#19, #20, #21), premere Risolvi

#33: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[\dfrac{2\cdot x+4}{6-x}>0,\ x^2+x+1>0,\ 1-3\cdot x<0\right],\ [x]\right)$

#34: $\left[\dfrac{1}{3}<x<6\right]$

Esempio 7 – Sistema di disequazioni privo di soluzioni

#35: $x^2+1<0$

#36: $x+3<0$

#37: $\mathrm{SOLVE}(x^2+1<0 \wedge x+3<0,\ x)$

#38: **false**

Esempio 8 – Sistema di disequazioni sempre verificato

#39: $x^2+1>0$

#40: $x^2+3>1$

#41: $\mathrm{SOLVE}(x^2+1>0 \wedge x^2+3>1,\ x)$

#42: **true**

Esempio 9 – Operatore OR

Le disequazioni possono essere combinate anche con l'operatore logico OR, il cui simbolo è ∨ (barra dei simboli)

#43: $\mathrm{SOLVE}(|x-2|<1 \vee x^2>4,\ x)$

#44: $x<-2 \vee x>1$

Gli esempi seguenti sono tratti dal testo di Kutzler e Kokol-Voljc citato in Bibliografia, Cap 4.

Esempio 10 – Disequazione in due variabili.

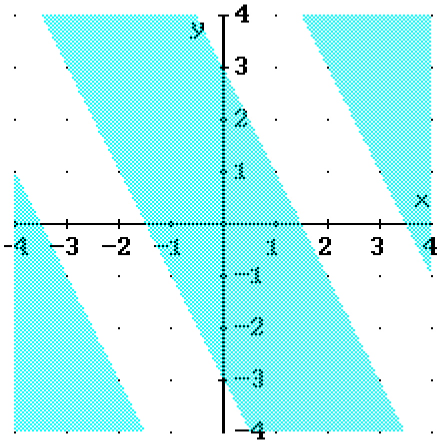
Introdurre la disequazione, aprire il menu Risolvi>Espressione
Per risolvere rispetto a y, nella finestra Risolvi espressione selezionare la variabile y e deselezionare la variabile x; premere Risolvi

#45: $||2\cdot x + y| - 5| > 2$

#46: $\mathrm{SOLVE}(||2\cdot x + y| - 5| > 2, y, \mathrm{Real})$

#47: $y < -2\cdot x - 7 \vee -2\cdot x - 3 < y < 3 - 2\cdot x \vee y > 7 - 2\cdot x$

Per visualizzare graficamente selezionare la soluzione (espressione #47) e tracciare il grafico: la zona ombreggiata rappresenta la soluzione.



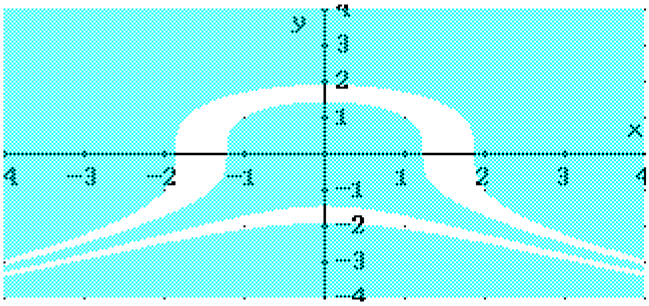
Esempio 11 – Disequazione in due variabili

Risolvere rispetto a y con il pulsante Risolvi espressione (si ottiene lo stesso risultato con il menu Risolvi>Espressione); per visualizzare graficamente la soluzione selezionare la soluzione (espressione #50) e tracciare il grafico.

#48: $\left|\left|2\cdot x^2 + y^3\right| - 5\right| > 2$

#49: $\mathrm{SOLVE}\left(\left|\left|2\cdot x^2 + y^3\right| - 5\right| > 2, y, \mathrm{Real}\right)$

#50: $-(2\cdot x^2 + 3)^{1/3} < y < \dfrac{\left|2\cdot x^2 - 3\right|^{4/3}}{3 - 2\cdot x^2} \vee y < -(2\cdot x^2 + 7)^{1/3} \vee y > \dfrac{\left|2\cdot x^2 - 7\right|^{4/3}}{7 - 2\cdot x^2}$



Esempio 12 – Sistema di disequazioni

Usare il comando Risolvi>Sistema; introdurre le disequazioni e risolvere rispetto a x e y

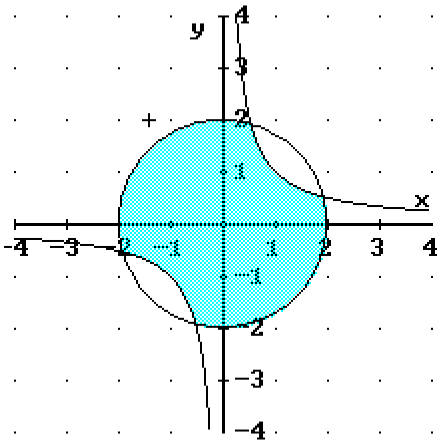
#51: $\text{SOLVE}\left(\left[x^2 + y^2 < 4,\ x \cdot y < 1\right],\ [x,\ y]\right)$

#52: $\left[x^2 + y^2 < 4 \wedge x \cdot y < 1\right]$

La risposta di Derive è una copia dell'espressione: Derive non riesce a risolvere il sistema!
Visualizzazione grafica: tracciare il grafico dell'espressione #52
Sovrapporre sul grafico le due curve x^2+y^2=4 (circonferenza) e xy=1 (iperbole)

#53: $x^2 + y^2 = 4$

#54: $x \cdot y = 1$



Nota: Per scegliere i colori dei grafici e altre caratteristiche, dopo aver aperto la finestra grafica, aprire il menu Opzioni> Visualizzazione di questa finestra e fare le scelte nelle varie schede disponibili.

4.7 Vettori e famiglie di curve

La funzione VECTOR

Un vettore può essere introdotto in due modi:
1 – elencando i suoi elementi fra parentesi quadre;
2 – usando il pulsante Crea vettore della barra degli strumenti o il comando Crea>Vettore della barra di menu
3 – facendolo costruire con il comando Calcola>Vettore o con la funzione VECTOR

Esempio 1 – Introdurre un vettore di elementi qualunque

Premere il pulsante Crea vettore (barra degli strumenti), introdurre la dimensione del vettore, nella finestra che si apre introdurre gli elementi del vettore e premere OK; se si vuole anche semplificare gli elementi del vettore premere Semplifica

#1: $\left[5^2, 3, 2 + x, y + 3\right]$

Esempio 2 – Il comando Calcola>Vettore

Costruire un vettore contenente i quadrati dei numeri pari da 2 a 10
Il comando Calcola>Vettore consente di generare un vettore di valori
Con questo comando si può selezionare una variabile e impostare il valore iniziale, il valore finale ed il passo.
Introdurre l'espressione che genera gli elementi (quadrati dei numeri interi), aprire il menu Calcola>Vettore, introdurre il primo elemento, l'ultimo e il passo e premere Semplifica

#2: k^2

#3: $\mathrm{VECTOR}(k^2, k, 2, 10, 2)$

#4: $[4, 16, 36, 64, 100]$

Equivalentemente si può usare la funzione VECTOR; questa funzione consente di generare un vettore di valori di un'espressione valutata in una sequenza di punti.
VECTOR(u, k, n) restituisce un vettore di n elementi generati a partire dall'espressione u(k), con la variabile k che varia da 1 a n con passo 1
VECTOR(u, k, m, n) restituisce un vettore di n–m+1 elementi, generati a partire dall'espressione u(k), con la variabile k che varia da m a n con passo 1
VECTOR(u, k, m, n, s) restituisce un vettore di (n–m)/s+1 elementi (numero arrotondato per difetto), generati a partire dall' espressione u(k), con la variabile k che varia da m a n con passo s

Esempio 3 – Costruire un vettore contenente i quadrati dei numeri interi da 1 a 7

Usare la funzione VECTOR; introdurre il comando e premere Crea e semplifica

#5: $\mathrm{VECTOR}(k^2, k, 7)$

#6: $[1, 4, 9, 16, 25, 36, 49]$

Costruire un vettore contenente i quadrati dei primi 10 numeri dispari

#7: $\text{VECTOR}(k^2, k, 1, 19, 2)$

#8: $[1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361]$

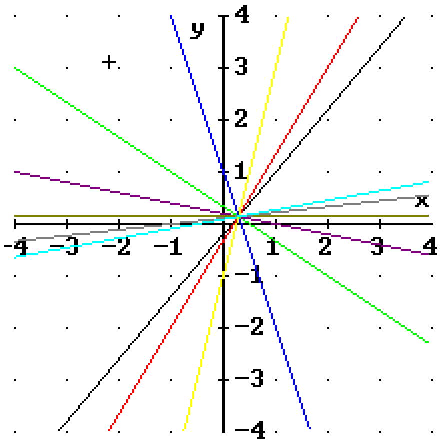
Famiglie di curve

Esempio 4 – Fascio proprio di rette

Disegnare il fascio proprio di rette di equazione
$(2-k)x+(3+2k)y-1=0$
Inserire l'espressione #9 e premere Crea e Semplifica (si ottengono tutte le equazioni delle rette del fascio per i valori scelti del parametro k; se non si vogliono visualizzare tutte le equazioni usare il pulsante Crea)
Tracciare il grafico selezionando l'espressione #10
In alternativa selezionare l'espressione #9 e nel menu Opzioni della finestra grafica selezionare Approssima prima di tracciare il grafico, poi tracciare il grafico

#9: $\text{VECTOR}((2 - k)\cdot x + (3 + 2\cdot k)\cdot y - 1 = 0, k, -4, 4)$

#10: $[6\cdot x - 5\cdot y - 1 = 0, 5\cdot x - 3\cdot y - 1 = 0, 4\cdot x - y - 1 = 0, 3\cdot x + y - 1 = 0, 2\cdot x + 3\cdot y - 1 = 0, x + 5\cdot y - 1 = 0, 7\cdot y - 1 = 0, -x + 9\cdot y - 1 = 0, - 2\cdot x + 11\cdot y - 1 = 0]$



Il centro del fascio può essere determinato risolvendo il sistema formato da due equazioni qualsiasi del fascio

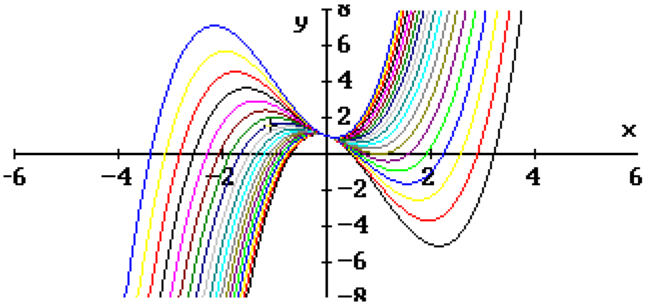
#11: $\text{SOLVE}([6\cdot x - 5\cdot y - 1 = 0, 5\cdot x - 3\cdot y - 1 = 0], [x, y])$

#12: $\left[x = \frac{2}{7} \wedge y = \frac{1}{7}\right]$

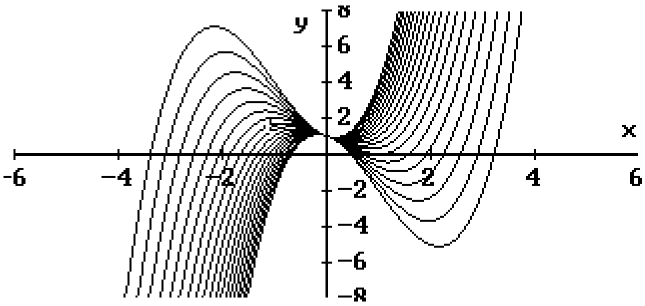
Esempio 5 – Grafico di una famiglia di curve al variare di un parametro

Disegnare la famiglia di curve di equazione
y=x^3+kx^2–x+1 al variare di k, –3<=k<=3
Inserire l'espressione #13 e premere Crea (senza calcolare l'espressione)
Selezionare l'espressione #13 e aprire la finestra grafica
Menu Opzioni>Approssima prima di tracciare il grafico
Tracciare il grafico; con Imposta Intervallo del grafico modificare eventualmente l'intervallo sull'asse x e sull'asse y; con Opzioni Visualizzazione togliere la griglia, ecc.
Questo esempio è tratto dal testo di Kutzler e Kokol-Voljc citato in Bibliografia, Cap 6

$$\#13:\quad \mathrm{VECTOR}\left(y = x^3 + k\cdot x^2 - x + 1,\ k,\ -3,\ 3,\ \frac{1}{3}\right)$$



Se si vuole che tutte le curve siano dello stesso colore, prima di tracciare il grafico selezionare il colore del grafico successivo nel menu Opzioni>Visualizzazione, e deselezionare Cambia colore del grafico nel menu Opzioni, poi tracciare il grafico.

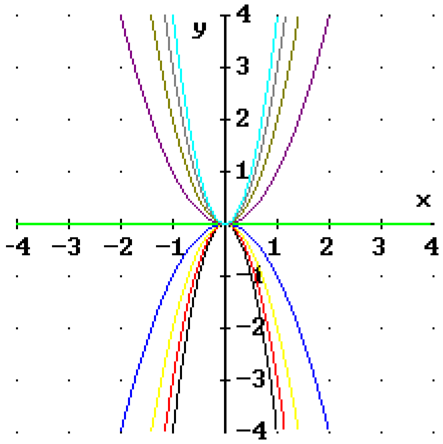


Esempio 6 – Fascio di parabole

Grafico del fascio di parabole y=kx^2 al variare di k , –4<=k<=4
Le parabole hanno un solo punto base (l'origine)

$$\#14:\quad \mathrm{VECTOR}(y = k\cdot x^2,\ k,\ -4,\ 4)$$

$$\#15:\quad [y = -4\cdot x^2,\ y = -3\cdot x^2,\ y = -2\cdot x^2,\ y = -x^2,\ y = 0,\ y = x^2,\ y = 2\cdot x^2,\ y = 3\cdot x^2,\ y = 4\cdot x^2]$$



Esempio 7 – Fascio di parabole

Grafico del fascio di parabole y = kx^2−(k + 1)x+1 al variare di k, −5<=k<=5

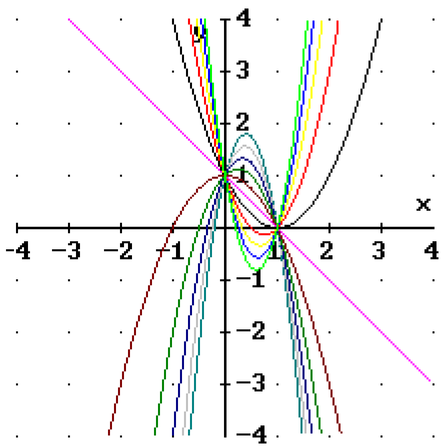
Per k=0 l'equazione diventa di primo grado (vedi grafico)

Le parabole hanno due punti base; per trovare i punti base risolvere il sistema formato da due fra le equazioni trovate

#16: $y = k\cdot x^2 - (k + 1)\cdot x + 1$

#17: $\mathrm{VECTOR}(y = k\cdot x^2 - (k + 1)\cdot x + 1,\ k,\ -5,\ 5)$

#18: $[y = - 5\cdot x^2 + 4\cdot x + 1,\ y = - 4\cdot x^2 + 3\cdot x + 1,\ y = - 3\cdot x^2 + 2\cdot x + 1,\ y = - 2\cdot x^2 + x + 1,\ y = 1 - x^2,\ y = 1 - x,\ y = x^2 - 2\cdot x + 1,\ y = 2\cdot x^2 - 3\cdot x + 1,\ y = 3\cdot x^2 - 4\cdot x + 1,\ y = 4\cdot x^2 - 5\cdot x + 1,\ y = 5\cdot x^2 - 6\cdot x + 1]$



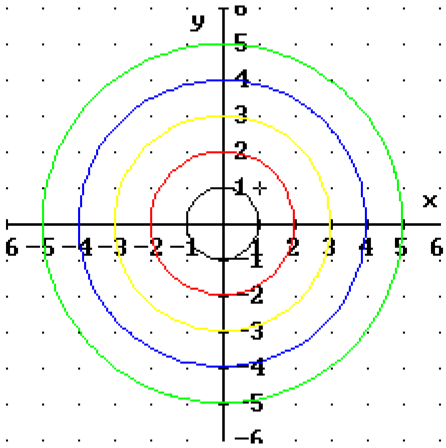
#19: $\mathrm{SOLVE}([y = - 5\cdot x^2 + 4\cdot x + 1,\ y = - 4\cdot x^2 + 3\cdot x + 1],\ [x,\ y])$

#20: $[x = 0 \wedge y = 1,\ x = 1 \wedge y = 0]$

Esempio 8 – Fascio di circonferenze concentriche, con centro nell'origine

#21: $\mathrm{VECTOR}(x^2 + y^2 = k^2,\ k,\ 1,\ 5)$

#22: $\left[x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 16,\ x^2 + y^2 = 25\right]$

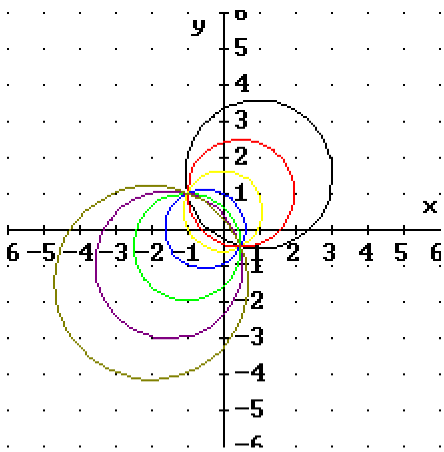


Esempio 9 – Fascio di circonferenze

Grafico del fascio di circonferenze di equazione
x^2+y^2+kx+(k+1)y–1=0 al variare di k, –3<=k<=3
Le circonferenze hanno due punti base.
Per trovare i punti base risolvere il sistema formato da due delle equazioni del fascio

#23: $\mathrm{VECTOR}(x^2 + y^2 + (k + 1)\cdot x + k\cdot y - 1 = 0,\ k,\ -3,\ 3)$

#24: $\left[x^2 - 2\cdot x + y^2 - 3\cdot y - 1 = 0,\ x^2 - x + y^2 - 2\cdot y - 1 = 0,\ x^2 + y^2 - y - 1 = 0,\ x^2 + x + y^2 - 1 = 0,\ x^2 + 2\cdot x + y^2 + y - 1 = 0,\ x^2 + 3\cdot x + y^2 + 2\cdot y - 1 = 0,\ x^2 + 4\cdot x + y^2 + 3\cdot y - 1 = 0\right]$



#25: $\text{SOLVE}([x^2 - 2\cdot x + y^2 - 3\cdot y - 1 = 0,\ x^2 - x + y^2 - 2\cdot y - 1 = 0],\ [x,\ y])$

#26: $$\left[x = -1 \wedge y = 1,\ x = \frac{1}{2} \wedge y = -\frac{1}{2}\right]$$

L'asse centrale, ossia il luogo geometrico dei centri delle circonferenze, è l'asse del segmento di estremi i punti base
Calcolo del coefficiente angolare della retta passante per i punti base
Definire una funzione che rappresenta il coefficiente angolare della retta per due punti assegnati; calcolare il valore di tale coefficiente quando i punti assegnati sono i due punti base

#27: **InputMode := Word**

#28: $m(x1,\ x2,\ y1,\ y2) := \dfrac{y2 - y1}{x2 - x1}$

#29: $m\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

#30: $$-1$$

Calcolo del punto medio del segmento che unisce i punti base; definire due funzioni che rappresentano le coordinate del punto medio di un segmento di estremi assegnati

#31: $xm(x1,\ x2) := \dfrac{x1 + x2}{2}$

#32: $ym(y1,\ y2) := \dfrac{y1 + y2}{2}$

#33: $\left[xm\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right),\ ym\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)\right]$

#34: $$\left[-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right]$$

Equazione dell'asse centrale (l'asse centrale è perpendicolare al segmento che unisce i punti base, il coefficiente angolare dell'asse centrale vale 1)

#35: $y - \dfrac{1}{4} = 1\cdot\left(x + \dfrac{1}{4}\right)$

#36: $$y - \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4}$$

Per trovare l'equazione dell'asse centrale si potrebbe anche usare il comando PERPENDICULAR (vedere guida in linea)

Realizzare un altro grafico in cui compaiono le circonferenze del fascio, i loro centri, i punti base e il segmento che li unisce, l'asse centrale
Per realizzare il grafico occorrono le seguenti espressioni

Matrice dei punti base; aprire il menu Crea>Matrice e inserire come righe le coordinate dei punti base

#37: $$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Coordinate dei centri delle circonferenze; definire le funzioni per calcolare l'ascissa e l'ordinata dei centri e usare il comando VECTOR

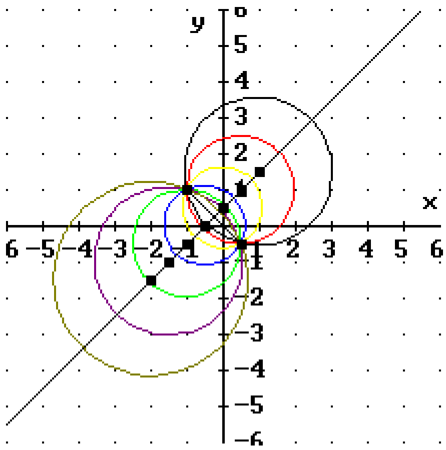
#38: $$\text{xcentro}(k) := -\frac{k+1}{2}$$

#39: $$\text{ycentro}(k) := -\frac{k}{2}$$

#40: `VECTOR([xcentro(k), ycentro(k)], k, -3, 3)`

#41: $$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Realizzare successivamente i grafici delle espressioni #24 (circonferenze), #37 (punti base), #41 (centri delle circonferenze), #36 (asse centrale)Usare in modo opportuno il menu Opzioni> Visualizzazione della finestra grafica per predisporre colore dei grafici, dimensione dei punti, linea che congiunge i punti, griglia, ecc



Esempio 10 – Fascio di iperboli

Grafico del fascio di iperboli; equazione in forma canonica
x^2/a^2-y^2/b^2=1 (fuochi sull'asse x)
Assegnare b=2 e far variare il parametro a

#42: a :=

#43: $\text{iperbole}(a, b) := \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

#44: VECTOR(iperbole(a, 2), a, -3, 3)

#45: $\left[\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1, \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1, x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1, \infty = 1, x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1, \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1, \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1\right]$

Si ottiene un risultato privo di significato quando a=0; inoltre le equazioni per i valori di a di segno opposto sono uguali (come prevedibile!). Meglio quindi assegnare ad a solo valori positivi non nulli

#46: VECTOR(iperbole(a,2),a,1,3)

#47: $\left[x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1, \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1, \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1\right]$

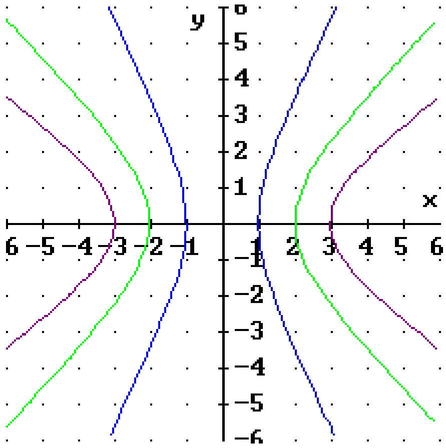
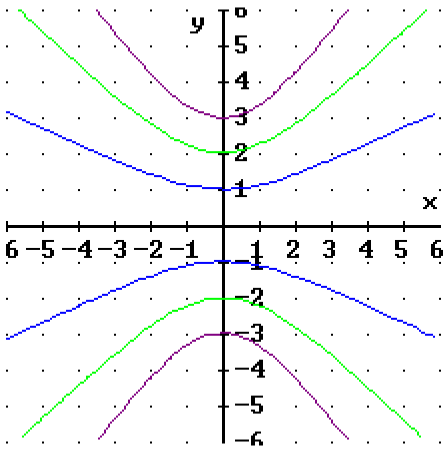


Grafico del fascio di iperboli; equazione in forma canonica
-x^2/a^2+y^2/b^2=1 (fuochi sull'asse y)
Assegnare a=2 e far variare il parametro b

#48: $\text{iperbole2}(a, b) := -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

#49: VECTOR(iperbole2(2, b), b, 1, 3)

#50: $\left[y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1, \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{4} = 1, \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1\right]$



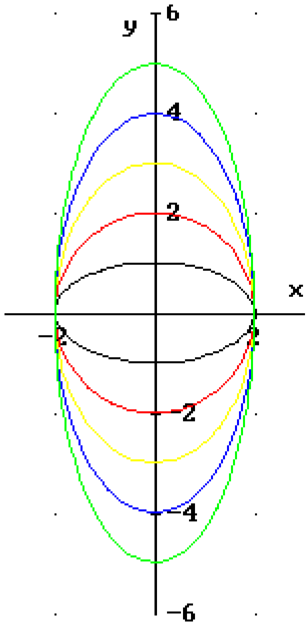
Esempio 11 – Fascio di ellissi

Grafico del fascio di ellissi; equazione in forma canonica
x^2/a^2+y^2/b^2=1
Assegnare a=2 e far variare il parametro b

#51: $\text{ellisse}(a, b) := \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

#52: VECTOR(ellisse(2, b), b, 1, 5)

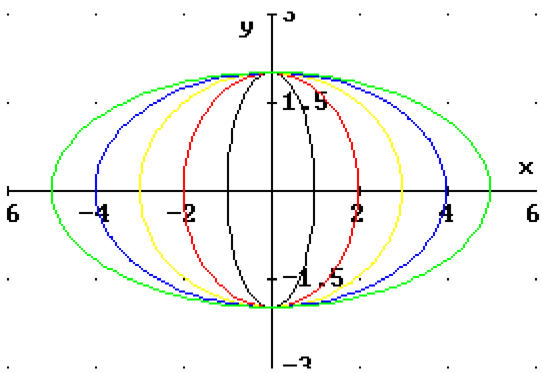
$$\#53: \left[\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1\right]$$



Assegnare b=2 e far variare il parametro a

#54: VECTOR(ellisse(a, 2), a, 1, 5)

$$\#55: \left[x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1\right]$$



4.8 Funzioni elementari

In questo paragrafo si vogliono illustrare alcune caratteristiche delle funzioni elementari e dei loro grafici in ambiente Derive, e mettere in evidenza alcuni problemi che ne derivano
Si fa riferimento all'articolo di P. Boieri, I grafici "sbagliati" di Derive, citato in bibliografia, a cui si rimanda per maggiori approfondimenti

Esempio 1 – La funzione radice quadrata: uso delle parentesi
Si osservino i seguenti esempi: prestare attenzione alle differenze fra i vari risultati

#1: $\sqrt{x}^2$

#2: x

#3: $\sqrt{(x^2)}$

#4: $|x|$

#5: $\sqrt{(-x)}^2$

#6: $-x$

#7: $\sqrt{((-x)^2)}$

#8: $|x|$

Esempio 2 – La funzione radice quadrata: Dominio di una variabile
Si può cambiare il dominio di una variabile: aprire il menu Dichiara>Dominio di una variabile, inserire x nel campo Nome della variabile, scegliere Dominio: Reale, Intervallo: Positivo
Richiamare con F4 l'espressione #7 e semplificare; notare la differenza rispetto al risultato #8

#9: $x :\in \text{Real } (0, \infty)$

#10: $\sqrt{((-x)^2)}$

#11: x

Introdurre l'espressione #13 cambiando il dominio della variabile x (Reale, Reale positivo, Reale negativo)

#12: $x :\in \text{Real}$

#13: $\sqrt{(x^2 \cdot (x + 2))}$

#14: $\sqrt{(x + 2)} \cdot |x|$

#15: $x :\in \text{Real } (0, \infty)$

#16: $\sqrt{x^2 \cdot (x + 2)}$

#17: $x \cdot \sqrt{x + 2}$

#18: x :ε Real (−∞, 0)

#19: $\sqrt{x^2 \cdot (x + 2)}$

#20: $-\, x \cdot \sqrt{x + 2}$

Esempio 3 – Le espressioni √(xy) e √x*√y sono identiche?
Introdurre e semplificare la loro differenza, cambiando il dominio delle variabili x e y

#21: x :ε Real

#22: y :ε Real

#23: $\sqrt{x \cdot y} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

#24: $\sqrt{x \cdot y} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

#25: x :ε Real (0, ∞)

#26: y :ε Real (0, ∞)

#27: $\sqrt{x \cdot y} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

#28: 0

Esempio 4 – Studiare il risultato dell'espressione (x+y)−√((x+y)^2) al variare della definizione del dominio delle variabili x e y

#29: x :ε Real

#30: y :ε Real

#31: $(x + y) - \sqrt{(x + y)^2}$

#32: $-\, |x + y| + x + y$

#33: x :ε Real (0, ∞)

#34: y :ε Real (0, ∞)

#35: $(x + y) - \sqrt{(x + y)^2}$

#36: 0

#37: x :ε Real (−∞, 0)

#38: y :ε Real (−∞, 0)

#39: $(x + y) - \sqrt{(x + y)^2}$

#40: $2 \cdot x + 2 \cdot y$

Esempio 5 – Composizione di funzioni

Comporre le funzioni

f(x)=x^2+1   g(x)=(x+1)/(x–1)

Derive compone sempre senza stabilire se la composizione è possibile

La funzione g(x) non è definita in x=1 ma f(0)=1, quindi g(f(0)) non esiste

#41: $f(x) := x^2 + 1$

#42: $g(x) := \dfrac{x + 1}{x - 1}$

#43: $f(g(x))$

#44: $$\frac{2\cdot(x^2 + 1)}{(x - 1)^2}$$

#45: $g(f(x))$

#46: $$\frac{x^2 + 2}{x^2}$$

Esempio 6 – Funzione inversa

Per determinare la funzione inversa di f(x), se esiste, si può usare la funzione SOLVE: scrivere l'equazione y=f(x) e risolvere rispetto alla variabile x

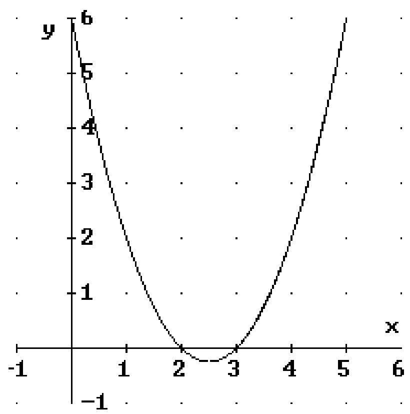
Nel caso della funzione f(x)=x^2–5x+6 si trovano due risultati: la funzione non è invertibile in R

Il grafico di f(x) evidenzia che la funzione non è biunivoca in R

#47: $f(x) := x^2 - 5\cdot x + 6$

#48: SOLVE(y = f(x), x)

#49: $$x = \frac{5 - \sqrt{(4\cdot y + 1)}}{2} \lor x = \frac{\sqrt{(4\cdot y + 1)} + 5}{2}$$



Esempio 7 – Funzione inversa

Il grafico di una funzione e della sua funzione inversa sono simmetrici rispetto alla retta y=x (bisettrice del primo–terzo quadrante)
Introdurre la funzione y=e^x, trovare la sua funzione inversa (il logaritmo) con il comando Risolvi>Espressione, risolvere rispetto a x: si trova la funzione inversa nella forma #54
Per tracciare il grafico bisogna scambiare x con y; aprire il menu Semplifica>Sostituisci variabili e scambiare x con y, poi tracciare il grafico dell'espressione #55 e della retta y=x (per osservare la simmetria)

#50: EXP(x)

#51: x :ε Real

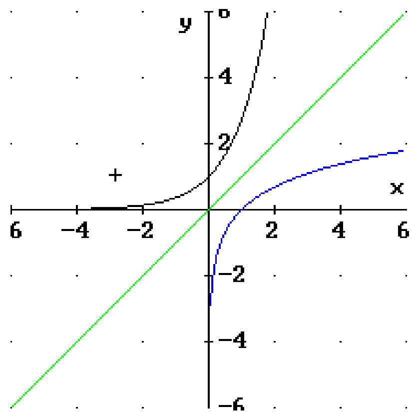
#52: y = EXP(x)

#53: SOLVE(y = EXP(x), x, Real)

#54: x = LN(y)

#55: y = LN(x)

#56: y = x

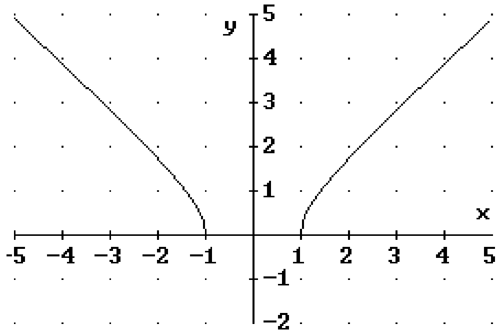


I grafici "sbagliati" in ambiente Derive

Esempio 8 – La funzione radice quadrata: grafici "sbagliati"

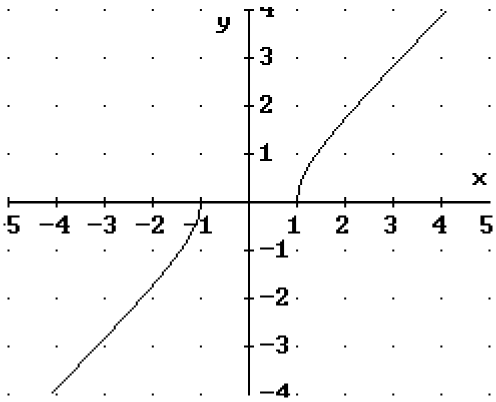
Introdurre la funzione √(x^2–1) e disegnare il grafico:
si ottiene il grafico corretto

#57: $\sqrt{(x^2 - 1)}$



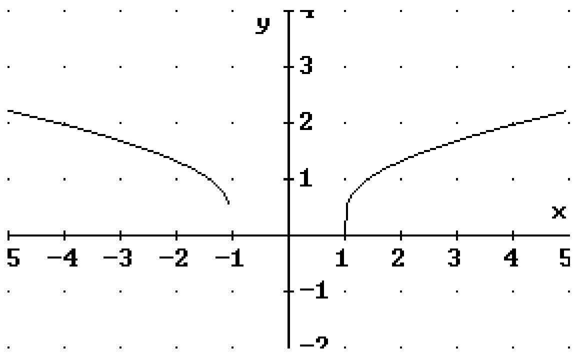
Introdurre la funzione √(x–1)√(x+1) e disegnare il grafico
Si ottiene il grafico "sbagliato" (la funzione è definita solo per x>=1)

#58: $\sqrt{(x - 1)}\cdot\sqrt{(x + 1)}$

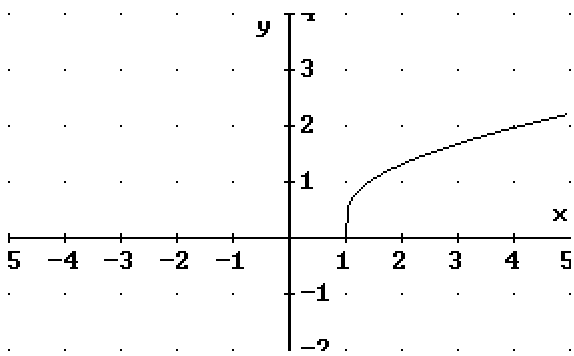


Le funzioni di libreria di Derive (funzioni elementari) sono definite in campo complesso e forniscono valori complessi; in alcuni casi Derive fornisce valori complessi anche quando l'argomento delle funzioni è reale.
Si rimanda all'articolo citato di P. Boieri per spiegazioni dettagliate
Osservare che invece nel caso seguente si ottengono i grafici corretti; infatti i valori non reali della funzione non vengono riportati sul grafico

#59: $(x^2 - 1)^{1/4}$



#60: $(x - 1)^{1/4}\cdot(x + 1)^{1/4}$

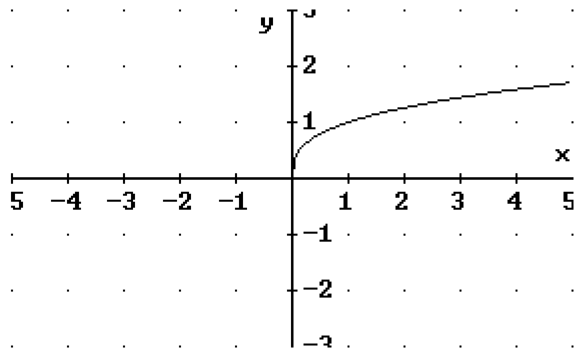


Nell'esempio 13 si illustra il metodo per tracciare correttamente il grafico della funzione radice quadrata e delle altre funzioni per cui si ottengono grafici non corretti

Esempio 9 – La funzione radice cubica

Il grafico è "sbagliato": viene tracciata solo la parte di grafico corrispondente a valori non negativi della variabile x

#61: $x^{1/3}$

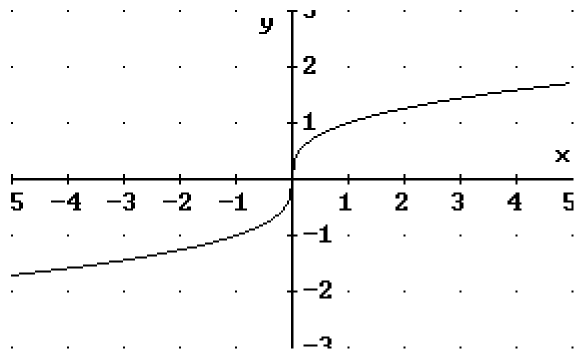


Derive calcola la determinazione principale della radice cubica; per valori reali negativi di x si ottiene un valore della funzione non reale, che non viene riportato nel grafico

Per ottenere il grafico corretto di questa funzione aprire il menu Dichiara>Impostazioni di semplificazione e nel Campo Radice n–esima numero complesso scegliere Real

Con questa scelta (la scelta di default è Principal) Derive fornisce (quando esiste) la determinazione reale della radice e si ottiene il grafico corretto

#62: Branch := Real



Esempio 10 – La funzione logaritmo

Derive calcola il logaritmo in campo complesso e fornisce anche i valori complessi della funzione ln(x) per argomenti reali negativi di x; tali valori non vengono riportati sul grafico, non essendo reali, e il grafico è corretto

La funzione LN(z) è il logaritmo naturale (in base ê) principale dell'espressione z.

La funzione LOG(z,w) è il logaritmo di z in base w. Quindi LOG(z,10) è il logaritmo in base 10 di z.

LOG(z) equivale a LN(z).

#63: $\text{LN}(\hat{e}^{3})$

#64: 3

#65: LOG(8, 2)

#66: 3

#67: LN(2)

#68: LN(2)

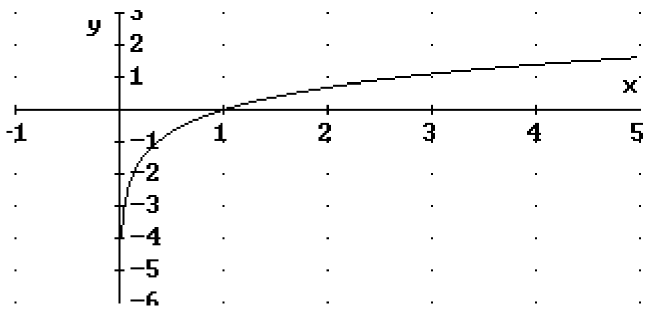
#69: LN(−2)

#70: $\text{LN}(2) + \pi\cdot\hat{\imath}$

#71: $\text{LN}(\hat{\imath})$

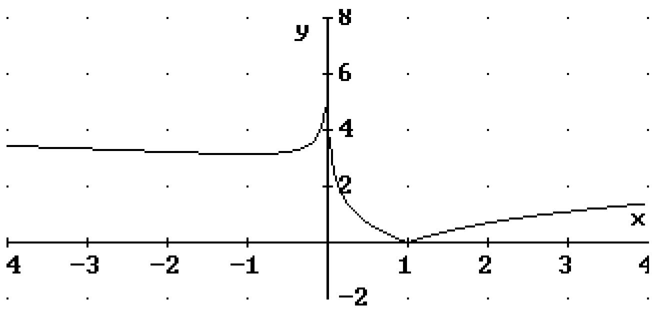
#72: $\dfrac{\pi\cdot\hat{\imath}}{2}$

#73: LN(x)



Se si applica al logaritmo il valore assoluto, si ottiene il grafico "sbagliato"
Per valori di x positivi si ottiene il grafico corretto, ma per valori negativi si ha una parte di grafico che non dovrebbe esserci, dato che in campo reale la funzione |ln(x)| è definita solo per x positivo
I problemi sono legati alla funzione valore assoluto

#74: |LN(x)|



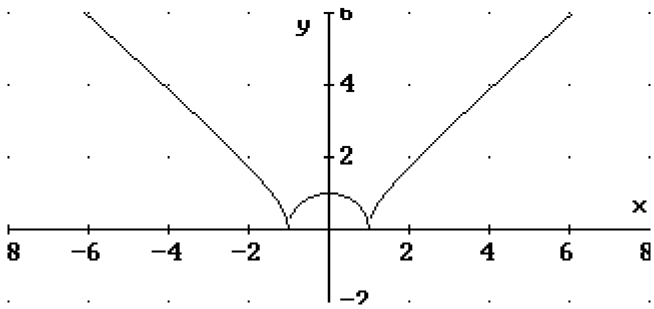
Esempio 11 – La funzione valore assoluto

La funzione ABS(z) è definita per ogni valore complesso di z e assume sempre un valore reale: se z=x+iy è complesso si ottiene √(x^2+y^2), che è il modulo del numero complesso z e si riduce al valore assoluto in campo reale quando z è reale

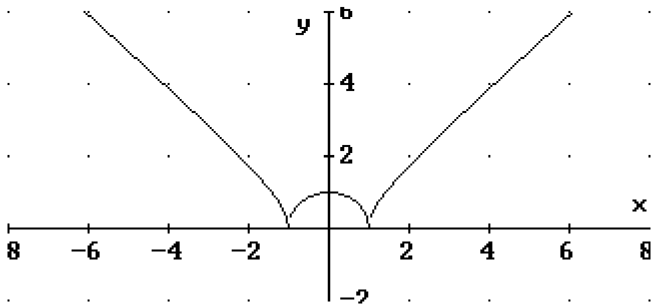
Quindi |LN(x)| è reale, anche se LN(x) è complesso per x negativo, e viene tracciato il grafico della figura precedente

Introdurre le funzioni y=|√(x^2−1)| e y=|√(x−1)√(x+1)|
(la seconda è già stata disegnata in modo non corretto nell'esempio 8) e osservare i grafici, entrambi non corretti

#75: $\left|\sqrt{(x^2 - 1)}\right|$



#76: $\left|\sqrt{(x - 1)}\cdot\sqrt{(x + 1)}\right|$



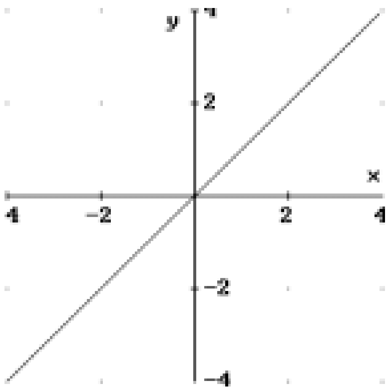
Esempio 12 – Composizione di una funzione con la sua inversa

Comporre il logaritmo e l'esponenziale; si ha
ln(exp(x)=x per ogni x reale
exp(ln(x)=x per ogni x>0
Invece con Derive si ottiene un risultato "sbagliato"

#77: **LN(EXP(x))**

#78: **x**

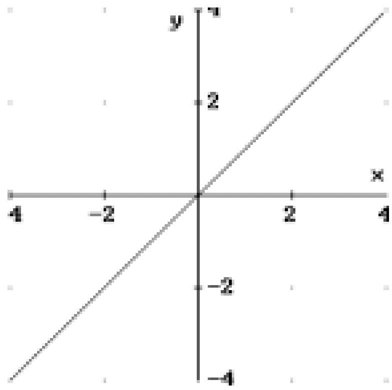
Grafico della funzione ln(exp(x))=x (selezionare l'espressione #77)



#79: EXP(LN(x))

#80: x

Grafico della funzione exp(ln(x)=x (selezionare l'espressione #79) il grafico è "sbagliato"



Comporre la funzione seno e la sua inversa: si dovrebbe ottenere sin(arcsin(x))=x per −π/2<=x<=π/2
Si ottiene invece la relazione per ogni x reale.

#81: SIN(ASIN(x))

#82: x

Per risolvere i problemi che sono stati illustrati con i precedenti esempi, si può costruire una opportuna funzione filtro in modo che le funzioni vengano calcolate solo se
– in corrispondenza a una variabile indipendente reale anche quella dipendente è reale
– la variabile indipendente è reale
Sulla guida in linea alla voce Espressioni condizionali IF (cercare nell'indice) si legge

Espressioni IF possono essere usate nel secondo membro della definizione di una funzione. Ad esempio, molte funzioni di Derive sono definite per i complessi con argomenti reali e molte funzioni ritornano risultati complessi per alcuni valori reali dei loro argomenti. Comunque a scuola si lavora tipicamente con il dominio reale, per cui alcuni insegnanti preferiscono ritornare ? quando un argomento o un risultato non è reale. Usando la seguente funzione filtro, si possono imporre condizioni più stringenti:

```
REAL_ONLY(x) := IF(IM(x) = 0, x)
```

Notare che la clausola else dell'espressione IF è omessa, per cui automaticamente viene ritornato ? se Derive può determinare che IM(x) non vale 0.

Come esempio di utilizzo di REAL_ONLY, si può definire:

```
REAL_LN(x) := REAL_ONLY(LN(x))

REAL_ABS(x) := ABS(REAL_ONLY(x))
```

LN(x) non ritorna valori reali se x è negativo. ABS(x) è reale anche se x non è reale. Fatte queste osservazioni, ecco spiegate le posizioni diverse di REAL_ONLY nelle definizioni precedenti.

Esempio 13 – Introduzione della funzione filtro e suo utilizzo per ridefinire le funzioni elementari

Questo è un primo esempio di programmazione in ambiente Derive (Vedere il successivo esempio 14 per la descrizione dettagliata del comando IF)
Introdurre la funzione REAL_ONLY(x):=IF(IM(x)=0,x); poi ridefinire le funzoni elementari usando la funzione REAL_ONLY

```
       REAL_ONLY(x) :=
#83:     If IM(x) = 0
            x

#84:   InputMode := Word

#85:   rad_quad(x) := REAL_ONLY(√x)

#86:   rad_quad(4)

#87:                                    2

#88:   rad_quad(-4)

#89:                                    ?

#90:   logaritmo(x) := REAL_ONLY(LN(x))

#91:   logaritmo(2)

#92:                                  LN(2)

#93:   logaritmo(-5)

#94:                                    ?

#95:   val_ass(x) := |REAL_ONLY(x)|

#96:   val_ass(-5)

#97:                                    5

#98:   val_ass(- 5·î)

#99:                                    ?

#100:  arcoseno(x) := REAL_ONLY(ASIN(x))

#101:  arcoseno(0.5)
```

#102: $\frac{\pi}{6}$

#103: arcoseno(-0.5)

#104: $-\frac{\pi}{6}$

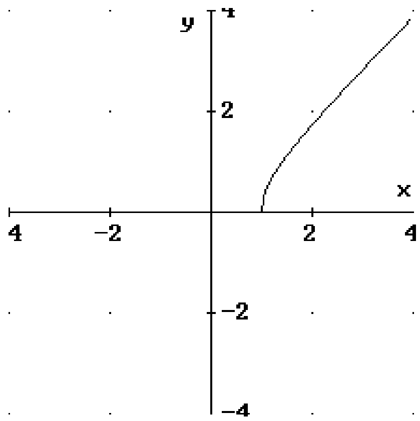
#105: arcoseno(5)

#106: ?

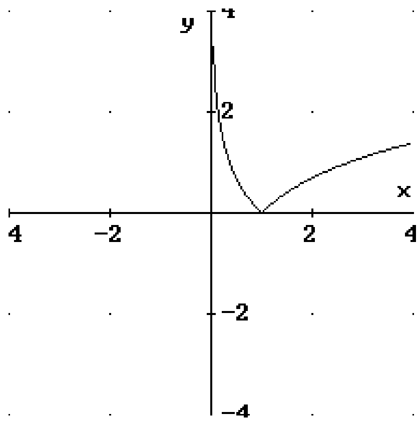
Uso della funzione filtro negli esempi precedenti per ottenere i grafici corretti
Introdurre le funzioni e tracciare i grafici

#107: REAL_ONLY(√(x − 1))·REAL_ONLY(√(x + 1))

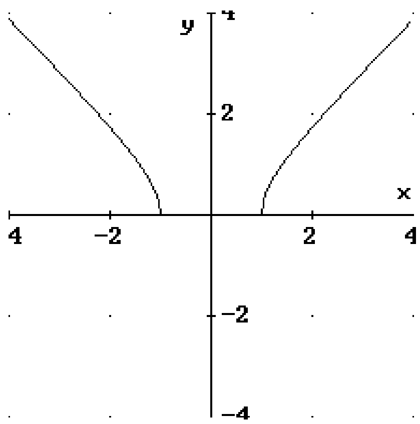
#108: IF(x ≥ 1, √(x − 1))·IF(x ≥ −1, √(x + 1))



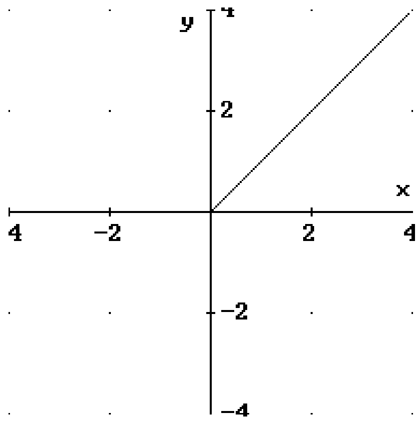
#109: val_ass(logaritmo(x))



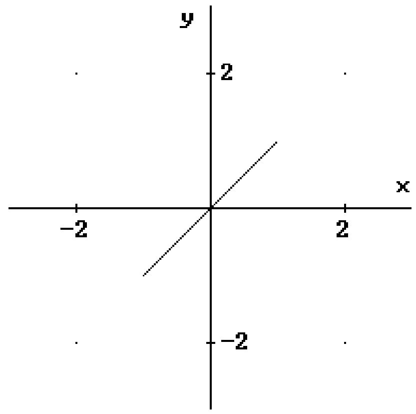
#110: val_ass(rad_quad(x^2 − 1))



#111: EXP(logaritmo(x))



#112: SIN(arcoseno(x))



Esempio 14 – Istruzione IF

Per definire una funzione a tratti si utilizza il comando IF
La forma generale dell'espressione IF è
IF (test, then, else, unknown)
dove test è una condizione e then, else e unknown sono espressioni.

Quando viene semplificata un'espressione IF, Derive valuta la condizione test per determinare se è vera. Se è vera, l'espressione then viene semplificata e restituita come valore dell'espressione IF
Se non è vera, viene semplificata e restituita l'espressione else.
Se il valore logico non può essere determinato, viene semplificata e ritornata l'espressione unknown .
Se unknown viene omessa e il valore della condizione test non può essere determinato, viene restituita l'intera espressione IF.
In alternativa, viene spesso usato ? per l'espressione unknown, come messaggio più compatto che indica l'impossibilità di determinare il valore della clausola test. Il simbolo ? è l'espressione che indica una quantità sconosciuta.
Se anche la else è omessa nell'espressione IF, viene assunto per essa il valore ?. Infine, se anche la then è omessa, IF ritorna 1 se l'argomento è valutato vero, altrimenti ritorna 0.
A volte per definire una funzione sono necessarie condizioni multiple: le espressioni IF possono essere nidificate

Definire una funzione che, dato un numero intero positivo in input, ne calcoli il quadrato se è pari e il cubo se è dispari
Usare la funzione MOD(n,m) che restituisce il resto della divisione n/m
Introdurre l’espressione g(x):=IF(MOD(x,2)=0,x^2,x^3)

```
      g(x) :=
        If MOD(x, 2) = 0
#113:      x^2
           x^3

#114: g(4)

#115:                                16

#116: g(3)

#117:                                27
```

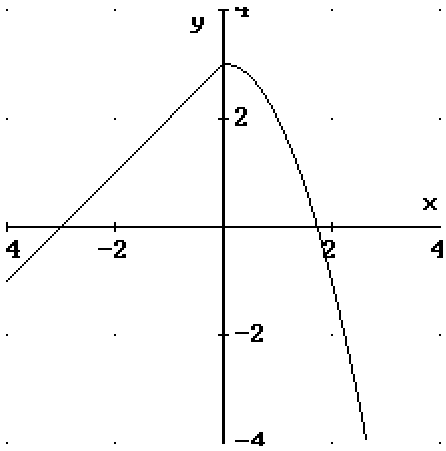
Definire una funzione che determini se un numero intero è pari o dispari, scrivendo un messaggio in risposta
I messaggi devono essere scritti fra doppi apici

```
      pari_dispari(x) :=
        If MOD(x, 2) = 0
           "numero pari"
#118:      If MOD(x, 2) = 1
              "numero dispari"
              "numero non intero"

#119: pari_dispari(6)

#120:                            numero pari

#121: pari_dispari(5)

#122:                          numero dispari

#123: pari_dispari(5.5)

#124:                         numero non intero
```

Esempio 15 – Funzioni a tratti

Definire la funzione a tratti f1(x) introducendo l’espressione f1(x):= IF(x>=0,-x^2+3,x+3)
Selezionare il primo membro dell’espressione #126 e tracciare il grafico

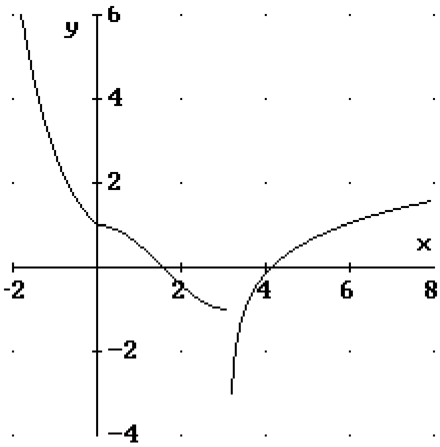
```
#125: x :ε Real

      f1(x) :=
        If x ≥ 0
#126:      - x^2 + 3
           x + 3
```



Esempio 16 – Funzioni a tratti – IF nidificate

Definire la funzione a tratti f2(x) introducendo l'espressione
f2(x):= IF(x<0,EXP(−x),IF(0<=x<=π,COS(x),LN(x−π)))
Selezionare il primo membro dell'espressione #127 e tracciare il grafico

```
        f2(x) :=
          If x < 0
             EXP(-x)
#127:        If 0 ≤ x ≤ π
                COS(x)
                LN(x - π)
```



4.9 Limiti di successioni e limiti di funzioni

Limiti di successioni

Con gli esempi seguenti si vogliono fornire alcuni spunti per introdurre il concetto di limite di una successione e di limite di una funzione servendosi di metodi numerici e grafici come supporto al calcolo effettivo del limite
Il calcolo del limite con Derive può essere fatto con il menu Calcola ed è molto semplice
Si ritiene che sia didatticamente utile ed interessante un approccio di tipo numerico–grafico, che ovviamente non esclude la spiegazione teorica classica, ma la accompagna e ne chiarisce gli aspetti di comprensione meno immediata: in questo senso Derive può essere uno strumento molto utile, purchè non ci si limiti ad un uso meccanico del comando per il calcolo del limite

Esempio 1 – Una successione celebre: il numero e

Definire una funzione uguale al termine generale della successione
a(n)=(1+1/n)^n

#1: $a(n) := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Esempi di utilizzo del termine generale della successione: calcolare l'ottavo elemento della successione
Inserire a(8) e premere Crea e Semplifica
Se nel menu Dichiara>Impostazioni di semplificazione si sceglie Precisione>Modo: Exact, si ottiene il valore in notazione razionale

#2: **a(8)**

#3: $$\frac{43046721}{16777216}$$

Se nel menu Dichiara>Impostazioni di semplificazione si sceglie Precisione>Modo: Approximate, si ottiene il valore approssimato in notazione decimale

#4: **Precision := Approximate**

#5: **a(8)**

#6: **2.565784513**

Lo stesso risultato si può ottenere in modalità Exact con Crea e Approssima

#7: **Precision := Exact**

#8: **a(8)**

#9: **2.565784513**

Calcolare i primi 10 termini della successione con la funzione VECTOR; scrivere il comando e usare Crea e approssima.

#10: VECTOR(a(n), n, 1, 10)

#11: [2, 2.25, 2.37037037, 2.44140625, 2.48832, 2.521626371, 2.546499697, 2.565784513, 2.581174791, 2.59374246]

La successione tende al numero e: una congettura numerica

#12: VECTOR([n, a(n)], n, 100, 1000, 100)

#13:
$$\begin{bmatrix} 100 & 2.704813829 \\ 200 & 2.711517122 \\ 300 & 2.713765157 \\ 400 & 2.714891744 \\ 500 & 2.71556852 \\ 600 & 2.716020048 \\ 700 & 2.716342737 \\ 800 & 2.716584846 \\ 900 & 2.716773208 \\ 1000 & 2.716923932 \end{bmatrix}$$

#14: VECTOR([n, a(n)], n, 1000, 10000, 1000)

#15:
$$\begin{bmatrix} 1000 & 2.716923932 \\ 2000 & 2.71760257 \\ 3000 & 2.717828918 \\ 4000 & 2.717942121 \\ 5000 & 2.718010046 \\ 6000 & 2.718055337 \\ 7000 & 2.718087684 \\ 8000 & 2.718111952 \\ 9000 & 2.718130828 \\ 10^4 & 2.718145926 \end{bmatrix}$$

La convergenza è lenta: nel risultato #17 ci sono 5 cifre corrette

#16: a(1000000)

#17: **2.718280469**

Un approccio grafico: calcolare e disegnare i primi 50 elementi della successione

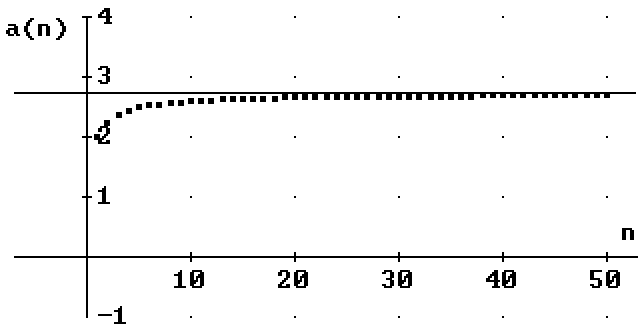
#18: $a(n) := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Inserire il comando VECTOR([n,a(n)],n,50); usare il pulsante Crea per non visualizzare tutti gli elementi della successione

#19: VECTOR([n, a(n)], n, 50)

Selezionare l'espressione #19 e aprire la finestra grafica
Nel menu Opzioni della finestra grafica selezionare Approssima prima di tracciare il grafico, poi tracciare il grafico
Con il menu Imposta>Regione del grafico controllare l'area visibile nella finestra grafica; scegliere dei valori adatti per Intervalli per avere valori semplici sugli assi
Introdurre il numero e (espressione #20); selezionare l'espressione #20 e tracciare il grafico della retta limite
Se si seleziona un valore costante k viene tracciata la retta y=k

#20: ê



Calcolo del limite della successione.
Selezionare a(n) nell'espressione #18 (primo membro)
Premere il pulsante Calcola limite (lim) nella barra degli strumenti
Nel Campo Punto limite scrivere Inf (oppure usare il pulsante ∞ nella barra dei simboli), calcolare il limite premendo Semplifica
In alternativa si può calcolare il limite aprendo il menu Calcola, dopo aver selezionato a(n)

#21: $\lim_{n\to\infty} a(n)$

#22: ê

Esempio 2 – Successioni convergenti

Definire la successione di termine generale a(n)=√(4+1/n)
Modificare la definizione della funzione a(n) definita nell'esempio precedente; aprire il menu Dichiara>Definisci funzione, nel campo Nome della funzione e argomenti scrivere a(n) e nel campo Definizione modificare l'espressione di a(n) scrivendo √(4+1/n)
Il calcolo di alcuni valori numerici della successione permette di ipotizzare che la successione sia convergente a 2

#23: $a(n) := \sqrt{\left(4 + \frac{1}{n}\right)}$

#24: VECTOR([n, a(n)], n, 100, 1000, 100)

#25:
$$\begin{bmatrix} 100 & 2.002498439 \\ 200 & 2.001249609 \\ 300 & 2.000833159 \\ 400 & 2.000624902 \\ 500 & 2.000499937 \\ 600 & 2.000416623 \\ 700 & 2.00035711 \\ 800 & 2.000312475 \\ 900 & 2.000277758 \\ 1000 & 2.000249984 \end{bmatrix}$$

Calcolare il limite: selezionare il primo membro dell'espressione #25, usare il pulsante lim

#26: $\lim_{n\to\infty} a(n)$

#27: 2

Definire la successione a(n)=(-1)^n/n

#28: $a(n) := \dfrac{(-1)^n}{n}$

Congettura numerica: per valori piccoli di n la successione sembra oscillare, ma per valori più grandi le oscillazioni sono sempre più piccole e si può ipotizzare che la successione converga a 0

#29: VECTOR([n, a(n)], n, 1, 10)

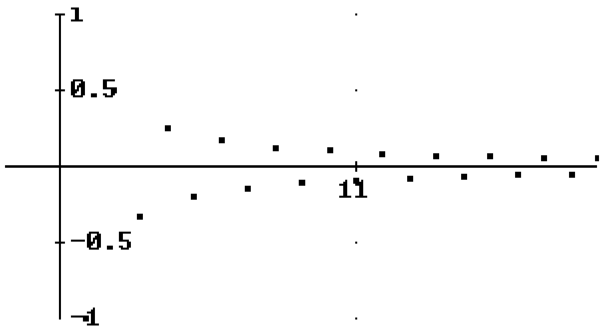
#30:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0.5 \\ 3 & -0.3333333333 \\ 4 & 0.25 \\ 5 & -0.2 \\ 6 & 0.1666666666 \\ 7 & -0.1428571428 \\ 8 & 0.125 \\ 9 & -0.1111111111 \\ 10 & 0.1 \end{bmatrix}$$

#31: VECTOR([n, a(n)], n, 100, 1000, 125)

#32:
$$\begin{bmatrix} 100 & 0.01 \\ 225 & -0.004444444444 \\ 350 & 0.002857142857 \\ 475 & -0.002105263157 \\ 600 & 0.001666666666 \\ 725 & -0.001379310344 \\ 850 & 0.001176470588 \\ 975 & -0.001025641025 \end{bmatrix}$$

Approccio grafico. Introdurre l'espressione #33, usare Crea; selezionare l'espressione #33 e tracciare il grafico

#33: VECTOR([n, a(n)], n, 20)



Il calcolo del limite conferma la congettura fatta

#34: $\lim\limits_{n\to\infty} a(n)$

#35: 0

Esempio 3 – Successione divergente

Definire la successione di termine generale a(n)=2^n−n^2

#36: $a(n) := 2^n - n^2$

Il calcolo numerico di alcuni valori della successione suggerisce chiaramente che la successione diverge

#37: VECTOR([n, a(n)], n, 5, 30, 5)

#38:
$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 924 \\ 15 & 32543 \\ 20 & 1048176 \\ 25 & 33553807 \\ 30 & 1073740924 \end{bmatrix}$$

#39: $\lim_{n\to\infty} a(n)$

#40: ∞

Esempio 4 – Successioni indeterminate

Definire la successione di termine generale a(n)=sin(nπ/2)

#41: $a(n) := \text{SIN}\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)$

Congettura numerica: successione indeterminata

#42: **VECTOR([n, a(n)], n, 1, 10)**

#43: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 1 \\ 6 & 0 \\ 7 & -1 \\ 8 & 0 \\ 9 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

Calcolo del limite: il risultato "strano" conferma la non esistenza del limite

#44: $\lim_{n\to\infty} a(n)$

#45: $\text{SIN}(\infty)$

Definire la successione di termine generale a(n)=(-1)^n

#46: $a(n) := (-1)^n$

Congettura numerica: successione indeterminata

#47: **VECTOR([n, a(n)], n, 1, 6)**

#48: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

Calcolo del limite: il risultato conferma la non esistenza del limite

#49: $\lim_{n\to\infty} a(n)$

#50: $\mathrm{SIN}(\infty) + \hat{\imath}\cdot\mathrm{SIN}(\infty)$

Limiti di funzioni

Esempio 5 – Calcolo del limite di una funzione; limite al finito

Definire la funzione f(x)=1/x^2

#51: $f(x) := \frac{1}{x^2}$

Calcolo del limite per x che tende a zero: selezionare il primo membro dell'espressione #51, premere il pulsante Calcola limite oppure usare il menu Calcola; nel Campo Punto limite inserire 0 e nel campo Limite da selezionare Destra e sinistra (limite ordinario)

#52: $\lim_{x\to 0} f(x)$

#53: ∞

Il limite può anche essere calcolato senza definire la funzione (#51), ma introducendo solo l'espressione di f(x) (#54) e calcolando il limite

#54: $\frac{1}{x^2}$

#55: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

#56: ∞

Esempio 6 – Calcolo del limite di una funzione; limiti destro e sinistro

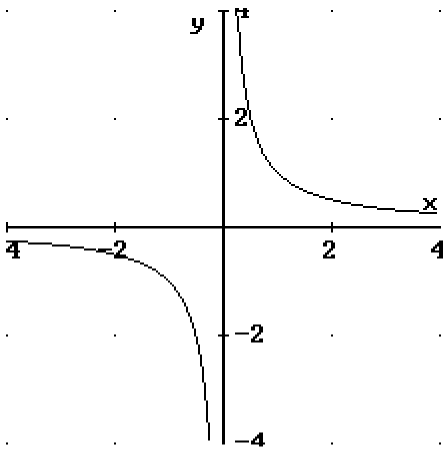
Definire la funzione f(x):=1/x; per calcolare il limite di f(x) per x che tende a 0 selezionare il primo membro dell'espressione #57, nel campo Punto Limite inserire 0 e nel campo Limite da selezionare Destra e sinistra, premere Semplifica

#57: $f(x) := \frac{1}{x}$

#58: $\lim_{x\to 0} f(x)$

#59: $\pm\infty$

Il risultato suggerisce un approccio grafico; tracciare il grafico della funzione
Dal grafico si può fare la congettura che non esista il limite ordinario, ma esistano il limite destro e sinistro e questo spiega il tipo di risultato



Anche un approccio numerico può essere un utile strumento per confermare la congettura numerica
Si noti che nel comando VECTOR i parametri sono usati in modi diversi: si può anche usare un incremento negativo, partendo dall'ultimo valore e tornando indietro
Limite sinistro

#60: VECTOR([x, f(x)], x, -0.9, -0.1, 0.2)

#61:
$$\begin{bmatrix} -0.9 & -1.111111111 \\ -0.7 & -1.428571428 \\ -0.5 & -2 \\ -0.3 & -3.333333333 \\ -0.1 & -10 \end{bmatrix}$$

Limite destro

#62: VECTOR([x, f(x)], x, 0.9, 0.1, -0.2)

#63:
$$\begin{bmatrix} 0.9 & 1.111111111 \\ 0.7 & 1.428571428 \\ 0.5 & 2 \\ 0.3 & 3.333333333 \\ 0.1 & 10 \end{bmatrix}$$

Calcolo dei limiti
Per calcolare i limiti destro e sinistro, nel campo Limite da selezionare prima Sinistra e poi Destra: i risultati confermano la congettura

#64: $\lim_{x\to 0-} f(x)$

#65: $-\infty$

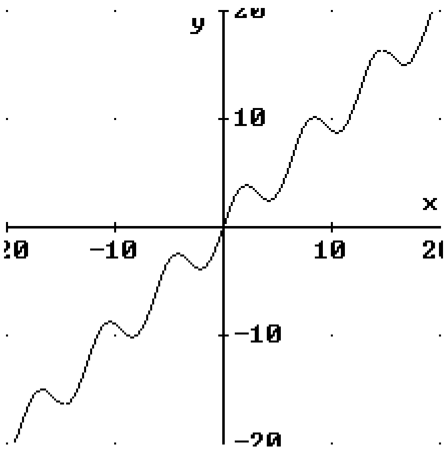
#66: $\lim_{x\to 0+} f(x)$

#67: ∞

Esempio 7 – Calcolo del limite di una funzione; limite all'infinito

Introdurre la funzione x+2sin(x) e tracciare il grafico

#68: $x + 2\cdot \mathrm{SIN}(x)$



Calcolo del limite per x che tende a +∞ e a −∞

#69: $\lim_{x\to \infty} (x + 2\cdot \mathrm{SIN}(x))$

#70: ∞

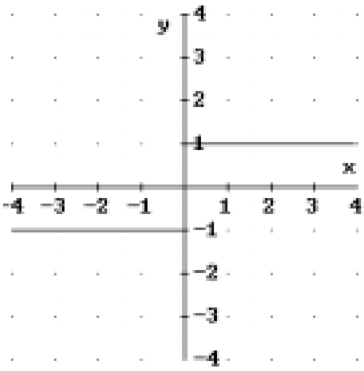
#71: $\lim_{x\to -\infty} (x + 2\cdot \mathrm{SIN}(x))$

#72: $-\infty$

Esempio 8 – Discontinuità finita; la funzione segno di x

Il grafico indica una discontinuità finita nell'origine

#73: $\mathrm{SIGN}(x)$



Calcolo del limite ordinario: verificare che non si ottiene un unico risultato

#74: $\lim_{x\to 0} \mathrm{SIGN}(x)$

#75: ± 1

Calcolo dei limiti destro e sinistro

#76: $\lim_{x\to 0+} \mathrm{SIGN}(x)$

#77: 1

#78: $\lim_{x\to 0-} \mathrm{SIGN}(x)$

#79: -1

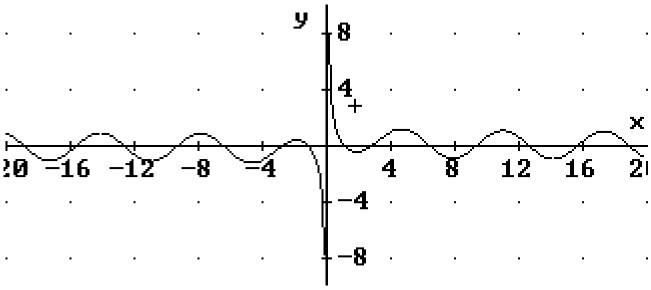
Esempio 9 – Calcolo del limite di una funzione. Non esistenza del limite

Introdurre la funzione 1/x–sin(x) e calcolare il limite per x che tende a +∞: il limite non esiste

#80: $\frac{1}{x} - \mathrm{SIN}(x)$

#81: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} - \mathrm{SIN}(x)\right)$

#82: $\mathrm{SIN}(\infty)$



Osservazione importante. In questo file sono state definite, fra le altre, le funzioni a(n) e f(x): la loro definizione rimane attiva per tutta la sessione di lavoro. Per cancellare le definizioni da questo momento in poi aprire il menu Dichiara>Valore di una variabile; nel campo Nome della variabile scrivere a (il nome della funzione), nel campo Valore della variabile non scrivere nulla e dare OK: in questo modo il nome a non corrisponde più alla funzione prima assegnata; ripetere per la funzione f

#83: a :=

#84: f :=

Più rapidamente basta introdurre le espressioni #83 e #84 nella riga di immissione e dare Invio

Esempio 10 – Calcolo del limite di una funzione. Non esistenza del limite: esempio di funzione limitata, ma priva di limite per x che tende a 0

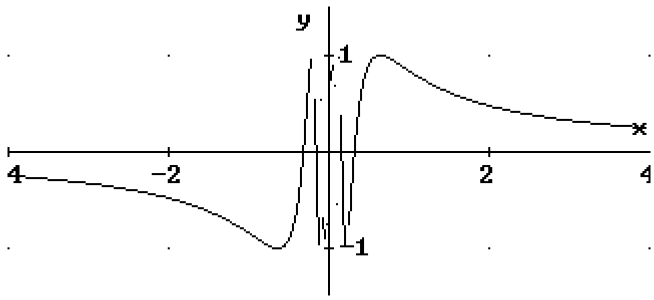
Introdurre la funzione sin(1/x) e calcolare il limite per x che tende a 0: il limite non esiste

#85: $\mathrm{SIN}\left(\frac{1}{x}\right)$

#86: $\lim_{x\to 0} \mathrm{SIN}\left(\frac{1}{x}\right)$

#87: $\mathrm{SIN}(\infty)$

Grafico della funzione
Il grafico presenta delle irregolarità nell'intorno dell'origine, dovute a motivi numerici (le funzioni vengono disegnate per punti)
Nell'intorno dell'origine la funzione assume infinite volte sia il valore 1 che il valore −1



Con Derive si trovano le ascisse di alcuni di questi punti; in generale i punti in cui la funzione assume il valore 1 e −1 sono dati rispettivamente da

sin(1/x)=1 x=2/(π+4kπ) k=0,±1,±2,..
sin(1/x)=−1 x=2/(−π+4kπ) k=0,±1,±2,..

#88: $\mathrm{SIN}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

#89: $\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{SIN}\left(\frac{1}{x}\right) = 1,\ x,\ \mathrm{Real}\right)$

#90: $x = \frac{2}{5\cdot\pi} \lor x = -\frac{2}{3\cdot\pi} \lor x = \frac{2}{\pi}$

#91: $\mathrm{SIN}\left(\frac{1}{x}\right) = -1$

#92: $\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{SIN}\left(\frac{1}{x}\right) = -1,\ x,\ \mathrm{Real}\right)$

#93: $x = -\frac{2}{5\cdot\pi} \lor x = \frac{2}{3\cdot\pi} \lor x = -\frac{2}{\pi}$

Esempio 11 – Limite di una funzione con un parametro

Derive è in grado di manipolare anche funzioni in cui compaiono altre variabili oltre alla variabile indipendente e non fa distinzione tra parametri e variabili
Introdurre la funzione f(x):=(ax–1)/x; calcolare il limite per x che tende a +∞
Nel campo Variabile specificare che la variabile indipendente è x

#94: $f(x) := \dfrac{a \cdot x - 1}{x}$

#95: $\lim_{x \to \infty} f(x)$

#96: a

Esempio 12 – Limite di una funzione con un parametro

Derive è in grado di manipolare funzioni in cui compaiono parametri, ma non sempre riesce a fornire il risultato
Introdurre la funzione (sinx)^k/x e calcolare il limite per x che tende a 0, per valori di k reali qualsiasi: Derive non può calcolare il limite se non ha altre informazioni sul parametro k
Se si precisa k>1, il limite viene calcolato correttamente

#97: $\dfrac{\mathrm{SIN}(x)^k}{x}$

#98: k :ε Real

#99: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{SIN}(x)^k}{x}$

#100: ?

#101: k :ε Real (1, ∞)

#102: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{SIN}(x)^k}{x}$

#103: 0

Esempio 13 – Funzione esponenziale a^x

Calcolare il limite della funzione a^x per x che tende a +∞

#104: $f(x) := a^x$

#105: $\lim_{x \to \infty} f(x)$

#106: $\infty^{\mathrm{LN}(a)}$

Il risultato ”strano” suggerisce di ricalcolare il limite
– per a appartenente all’intervallo aperto (0,1)
– per a appartenente all’intervallo aperto (1,+∞)
– per a=1
Per ottenere i risultati corretti:
Menu Dichiara>Dominio di una variabile; Dominio>Reale, Intervallo>
Intervallo aperto, scrivere gli estremi, premere OK, poi calcolare il limite
Ripetere per il secondo caso e calcolare il limite nel caso particolare a=1

#107: a :ε Real (0, 1)

#108: $\lim_{x \to \infty} f(x)$

#109: 0

#110: a :ε Real (1, ∞)

#111: $\lim_{x \to \infty} f(x)$

#112: ∞

#113: 1^x

#114: $\lim_{x \to \infty} 1^x$

#115: 1

Esempio 14 – Attenzione agli errori: la funzione √x non è definita per x<0, non ha senso calcolare il limite per x che tende a –∞.

Derive fornisce un risultato ”strano”, la risposta va interpretata come un messaggio di non esistenza del limite

#116: $\sqrt{x}$

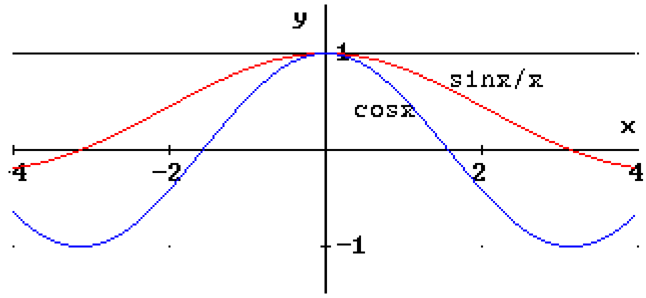
#117: $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x}$

#118: $î \cdot \infty$

Esempio 15 – Il teorema del confronto: verifica grafica nel caso del limite fondamentale della funzione sinx/x per x che tende a 0.

La dimostrazione di questo limite si basa sul teorema del confronto, servendosi della disuguaglianza
1<=sinx/x<=cosx
Tracciare un grafico delle tre funzioni nell’intorno di 0 e verificare che hanno lo stesso limite

#119: $1 \le \frac{SIN(x)}{x} \le COS(x)$



Nota: per inserire un testo sul grafico usare il menu Inserisci> Annotazione della Finestra grafica, scrivere il testo da inserire, scegliere font e colore e dare OK; posizionare la scritta nel grafico trascinando con il mouse.
Se il testo da inserire deve essere scritto su più righe, usare Ctrl*Invio per andare a capo
Per modificare o cancellare l'annotazione posizionare il puntatore del mouse sul testo e usare il tasto destro del mouse

4.10 Derivate, teoremi del calcolo differenziale, grafici di funzioni

Il calcolo delle derivate

Esempio 1 – Calcolo delle derivate di una funzione

Definire la funzione f(x)=x^3–4x^2–6x–1

#1: $x^3 - 4\cdot x^2 - 6\cdot x - 1$

Calcolo della derivata prima
Selezionare l'espressione #1, usare il Menu Calcola>Derivata (o il pulsante Calcola derivata nella barra degli strumenti)
Scegliere la variabile rispetto a cui derivare e l'ordine della derivata
Queste due scelte consentono di calcolare anche derivate di funzioni di più variabili, o di funzioni con un parametro, e di calcolare derivate di qualsiasi ordine, anche negativo (vedere Calcolo Integrale, paragrafo 4.12)

#2: $\frac{d}{dx}(x^3 - 4\cdot x^2 - 6\cdot x - 1)$

#3: $3\cdot x^2 - 8\cdot x - 6$

Calcolo della derivata seconda
Selezionare l'espressione #1 e scegliere l'ordine 2

#4: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (x^3 - 4\cdot x^2 - 6\cdot x - 1)$

#5: $6\cdot x - 8$

Si può anche introdurre la funzione con Dichiara>Definisci funzione; in questo caso per derivare selezionare il primo membro dell' espressione #6

#6: $f(x) := x^3 - 4\cdot x^2 - 6\cdot x - 1$

#7: $\frac{d}{dx} f(x)$

#8: $3\cdot x^2 - 8\cdot x - 6$

#9: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#10: $6\cdot x - 8$

Per liberare il nome f, Menu Dichiara>Valore di una variabile, nel Campo Nome della variabile inserire f(x), lasciare vuoto il Campo Valore della variabile

#11: $f :=$

Esempio 2 – Regole di derivazione

Derive è in grado di derivare funzioni generiche e di ricavare quindi le regole di derivazione di somma, prodotto, quoziente
Prima di applicare l'operatore di derivata bisogna dichiarare che f(x) e g(x) sono funzioni e non variabili; usare a questo scopo il menu Dichiara>Definisci funzione e inserire solo il nome della funzione lasciando vuoto il campo Valore della variabile

#12: $f(x) :=$

#13: $g(x) :=$

#14: $f(x) + g(x)$

#15: $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x))$

#16: $f'(x) + g'(x)$

#17: $f(x)\cdot g(x)$

#18: $\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x))$

#19: $g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$

#20: $\frac{f(x)}{g(x)}$

#21: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}$

#22: $\frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Esempio 3 – Calcolo della derivata come limite del rapporto incrementale

Calcolare la derivata della funzione f(x):=√x nell'origine, usando la definizione: questo metodo può essere didatticamente utile per verificare la comprensione del concetto di derivata e, in seguito, per studiare i punti di non derivabilità
Definire la funzione, introdurre il rapporto incrementale (#24) e premere Crea e Semplifica: il risultato (#25) è il rapporto incrementale per la funzione √x
Calcolare il limite del rapporto incrementale per h che tende a 0; selezionare l'espressione #25, nella finestra Calcola limite scegliere Variabile h, Punto limite 0, Limite da Destra e sinistra: il risultato è la derivata della funzione f(x)

#23: $f(x) := \sqrt{x}$

#24: $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$$\#25: \quad \frac{\sqrt{(x + h)} - \sqrt{x}}{h}$$

$$\#26: \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x + h)} - \sqrt{x}}{h}$$

$$\#27: \quad \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Esempio 4 – Punti di non derivabilità

In qualche caso Derive risponde in modo corretto: la funzione |x| non è derivabile in x=0; sostituendo nell'espressione #30 x=0 si ottiene ±1

Calcolando il limite sinistro e destro del rapporto incrementale si ottengono le derivate sinistra e destra (non esiste un comando per le derivale unilaterali, come nel caso del limite)

Si ha un punto angoloso

$$\#28: \quad f(x) := |x|$$

$$\#29: \quad \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\#30: \quad SIGN(x)$$

$$\#31: \quad \pm 1$$

Definire una funzione per il calcolo del rapporto incrementale nel punto x, che potrà essere usata per ogni f(x)

$$\#32: \quad rapp\_incr(x) := \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Calcolo del limite del rapporto incrementale in x=0: attenzione al calcolo del limite, scegliere la variabile h!

$$\#33: \quad x := 0$$

Derivata destra

$$\#34: \quad \lim_{h \to 0-} rapp\_incr(h)$$

$$\#35: \quad -1$$

Derivata sinistra

$$\#36: \quad \lim_{h \to 0+} rapp\_incr(h)$$

$$\#37: \quad 1$$

Liberare la variabile x (se non si fa questa assegnazione vuota, la variabile x continua ad avere il valore zero)

$$\#38: \quad x :=$$

Comportamento simile per la funzione f(x)=|sin(x)|

#39: $f(x) := |SIN(x)|$

#40: $\dfrac{d}{dx} f(x)$

#41: $COS(x) \cdot SIGN(SIN(x))$

#42: $x := 0$

#43: $\lim_{h \to 0-} rapp\_incr(h)$

#44: -1

#45: $\lim_{h \to 0+} rapp\_incr(h)$

#46: 1

#47: $x :=$

In altri casi Derive non riesce a calcolare la derivata, e in effetti la funzione non è derivabile; la funzione f(x) definita nell'espressione seguente è un esempio classico di funzione continua ma non derivabile in x=0

#48:

```
f(x) :=
  If x = 0
     0
     x·SIN(1/x)
```

#49: $\lim_{x \to 0} f(x)$

#50: 0

#51: $\dfrac{d}{dx} f(x)$

Calcolando la derivata di f(x) si ottiene una risposta nella forma della definizione di f(x); il risultato è sbagliato: la funzione non è derivabile nell'origine

#52: $$IF\left(x = 0,\ 0,\ SIN\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{COS\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)$$

Calcolo del limite del rapporto incrementale (ricordare di assegnare a x il valore zero)

#53: $x := 0$

#54: $\lim_{h \to 0-} rapp\_incr(h)$

#55: $\text{SIN}(\infty)$

#56: $\lim_{h \to 0+} \text{rapp\_incr}(h)$

#57: $\text{SIN}(\infty)$

#58: x :=

Significato geometrico della derivata

Esempio 5 – Calcolo della tangente al grafico di una funzione f(x) in un punto x=x0.

Il comando TANGENT(f(x),x,x0) restituisce l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f(x) in x=x0. Il risultato è lineare nella variabile x

#59: $f(x) := x^2$

#60: TANGENT(f(x), x, 1)

#61: $2 \cdot x - 1$

Per chiarire il significato geometrico di derivata di una funzione in un punto, può essere didatticamente utile costruire la retta tangente senza usare il comando TANGENT

#62: $f(x) := \left| x^2 - 1 \right|$

#63: $\frac{d}{dx} f(x)$

#64: $2 \cdot x \cdot \text{SIGN}(x^2 - 1)$

Notare che l'espressione della derivata indica la presenza di punti angolosi

Calcolo del coefficiente angolare m della retta tangente a f(x) in x=2: selezionare la derivata di f(x) (#64), Semplifica>Sostituisci variabili, sostituire x=2

#65: 4

Equazione della tangente in x=x0 y=f(x0)+m(x−x0)

#66: $y = f(2) + 4 \cdot (x - 2)$

#67: $y = 4 \cdot x - 5$

Verifica con la funzione TANGENT

#68: y = TANGENT(f(x), x, 2)

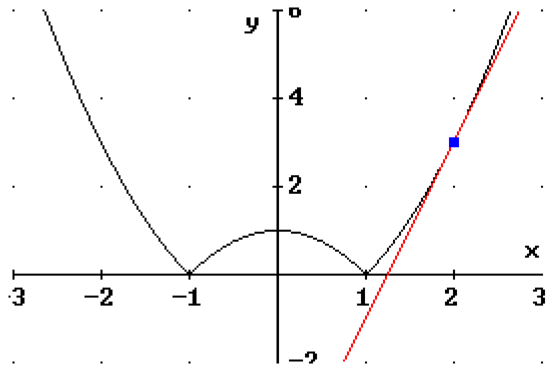
#69: $y = 4 \cdot x - 5$

Visualizzazione grafica

Punto [x0,f(x0)]

#70: [2, f(2)]

#71: [2, 3]



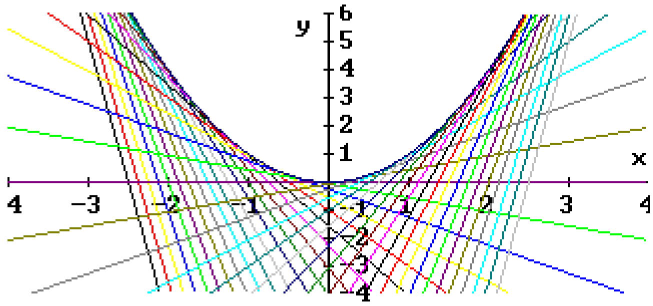
Usando la funzione VECTOR e la funzione TANGENT si può tracciare la famiglia di tangenti a una curva

Esempio 6 – Famiglia di tangenti

Famiglia di tangenti alla parabola y=x^2 nel generico punto a, al variare di a fra -5 e 5
Non calcolare le equazioni delle tangenti in modo esplicito: introdurre il comando VECTOR con Crea e nella finestra grafica selezionare Opzioni>Approssima prima di tracciare il grafico

#72: $f(x) := x^2$

#73: $\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{TANGENT}(f(x),\ x,\ a),\ a,\ -5,\ 5,\ \dfrac{1}{4}\right)$



Asintoti

Il comando TANGENT(f(x),x,inf) restituisce l'asintoto di f(x) per x che tende all'infinito

Esempio 7 – Asintoto obliquo della curva di equazione y=f(x)

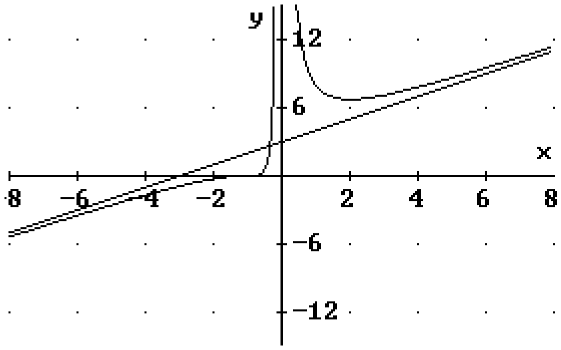
Definire la funzione f(x)=(x+1)^3/x^2

#74: $f(x) := \dfrac{(x + 1)^3}{x^2}$

#75: $y = \mathrm{TANGENT}(f(x),\ x,\ \infty)$

#76: $y = x + 3$

Grafico



Esempio 8 – Funzione con due asintoti obliqui diversi per x che tende a +∞ e a −∞

#77: $y := \sqrt{1 + 2\cdot x^2} + x - 1$

La funzione può ammettere asintoto obliquo; infatti

#78: $f(x) := \sqrt{1 + 2\cdot x^2} + x - 1$

#79: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

#80: ∞

#81: $\lim_{x\to\infty} f(x)$

#82: ∞

Calcolo dell'asintoto obliquo sinistro

#83: y = TANGENT(f(x), x, −∞)

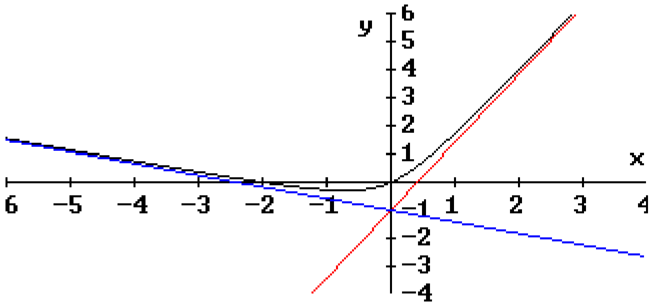
#84: $y = x\cdot(1 - \sqrt{2}) - 1$

Calcolo asintoto obliquo destro

#85: y = TANGENT(f(x), x, ∞)

#86: $y = x\cdot(\sqrt{2} + 1) - 1$

Grafico



Funzioni definite a tratti

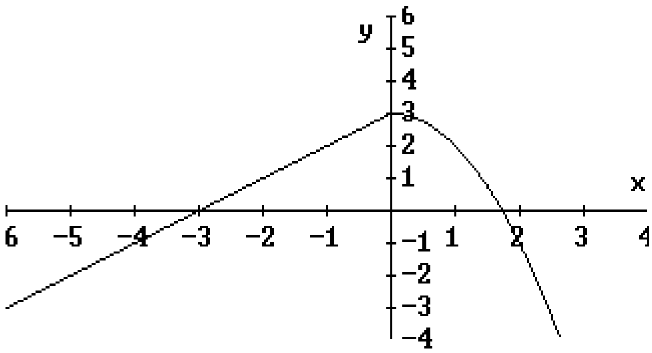
Per definire una funzione a tratti si usa l’istruzione condizionale IF, che può anche essere annidata.

Esempio 9 – Derivata di una funzione definita a tratti

Introdurre l’espressione f(x):=IF(x≥0,−x^2+3,x+3)

```
       f(x) :=
         If x ≥ 0
#87:        - x^2 + 3
            x + 3
```

La funzione è continua per ogni x, ma non è derivabile in x=0



Per calcolare la derivata selezionare f(x) nell’espressione #87

Il risultato non è corretto: nel punto x=0 la funzione non è derivabile

#88: $\frac{d}{dx} f(x)$

#89: IF(x ≥ 0, − 2·x, 1)

Per ottenere il risultato corretto bisogna usare il rapporto incrementale

Usare la funzione rapp_incr prima definita per calcolare limite sinistro e destro del rapporto incrementale nel punto x=0: i limiti sono diversi, e si ha un punto angoloso

#90: x := 0

#91: $\lim_{h \to 0-}$ rapp_incr(h)

#92: 1

#93: $\lim_{h \to 0+}$ rapp_incr(h)

#94: 0

Punti critici, monotonia, massimi e minimi relativi

Esempio 10 – Monotonia, massimi e minimi: test della derivata prima

#95: $f(x) := x^3 - 12\cdot x$

Calcolo della derivata prima e dei suoi zeri (punti critici)

#96: $\frac{d}{dx} f(x) := x^3 - 12\cdot x$

#97: $3\cdot x^2 - 12$

#98: $\text{SOLVE}(3\cdot x^2 - 12, x, \text{Real})$

#99: $x = -2 \lor x = 2$

Studio del segno della derivata prima: intervalli di monotonia
La funzione è crescente per i valori di x per cui f'(x)>0, e decrescente per i valori di x per cui f'(x)<0

#100: $3\cdot x^2 - 12 > 0$

#101: $\text{SOLVE}(3\cdot x^2 - 12 > 0, x, \text{Real})$

#102: $x < -2 \lor x > 2$

#103: $3\cdot x^2 - 12 < 0$

#104: $\text{SOLVE}(3\cdot x^2 - 12 < 0, x, \text{Real})$

#105: $-2 < x < 2$

La funzione è continua e derivabile per ogni x (polinomio); il punto x=–2 è un massimo, il punto x=2 è un minimo (grafico nell'es. 11)

Esempio 11 – Monotonia, massimi, minimi: test della derivata seconda

#106: $f(x) := x^3 - 12\cdot x$

Calcolo della derivata prima e dei suoi zeri (punti critici)

#107: $\frac{d}{dx} f(x)$

#108: $3\cdot x^2 - 12$

#109: $\text{SOLVE}(3\cdot x^2 - 12, x, \text{Real})$

#110: $x = -2 \lor x = 2$

Calcolo della derivata seconda f2(x)

#111: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#112: $6\cdot x$

Calcolo del segno della derivata seconda nei punti critici (test della derivata seconda)

#113: $f2(x) := 6\cdot x$

#114: $f2(-2) > 0$

#115: **false**

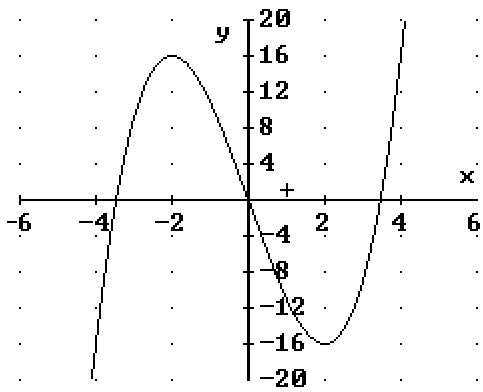
La derivata seconda è negativa, quindi il punto critico in esame è un massimo relativo

#116: $f2(2) > 0$

#117: **true**

La derivata seconda è positiva, quindi il punto critico in esame è un minimo relativo

Grafico della funzione



Esempio 12 – Test della derivata seconda: se f''(x)=0?

#118: $f(x) := x^5 - 2\cdot x^4 + 1$

#119: $\frac{d}{dx} f(x)$

#120: $5\cdot x^4 - 8\cdot x^3$

#121: $SOLVE(5\cdot x^4 - 8\cdot x^3, x, Real)$

#122: $x = \frac{8}{5} \vee x = 0$

#123: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#124: $20\cdot x^3 - 24\cdot x^2$

#125: $f2(x) := 20\cdot x^3 - 24\cdot x^2$

#126: $f2\left(\frac{8}{5}\right) > 0$

#127: true

Il punto x=8/5 è un minimo relativo

#128: $f2(0)$

#129: 0

La derivata seconda si annulla in x=0, perciò il test della derivata seconda risulta inefficace
Si può in alternativa usare il test della derivata prima

#130: $5\cdot x^4 - 8\cdot x^3 > 0$

#131: $\text{SOLVE}(5\cdot x^4 - 8\cdot x^3 > 0, x, \text{Real})$

#132: $x < 0 \vee x > \frac{8}{5}$

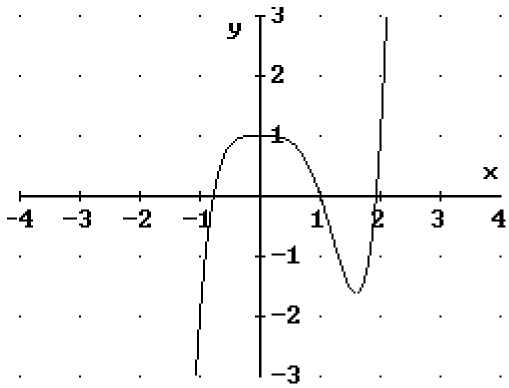
La funzione è crescente per x<0 e per x>8/5

#133: $5\cdot x^4 - 8\cdot x^3 < 0$

#134: $\text{SOLVE}(5\cdot x^4 - 8\cdot x^3 < 0, x, \text{Real})$

#135: $0 < x < \frac{8}{5}$

La funzione è decrescente per 0<x<8/5: x=0 è un massimo relativo
Grafico della funzione



Concavità, convessità, flessi

Esempio 13 – Flessi e studio della concavità

#136: $f(x) := x^3 + 2\cdot x^2 - x - 2$

#137: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#138: $6\cdot x + 4$

#139: SOLVE(6·x + 4, x, Real)

#140: $x = -\frac{2}{3}$

#141: $6\cdot x + 4 > 0$

#142: SOLVE(6·x + 4 > 0, x, Real)

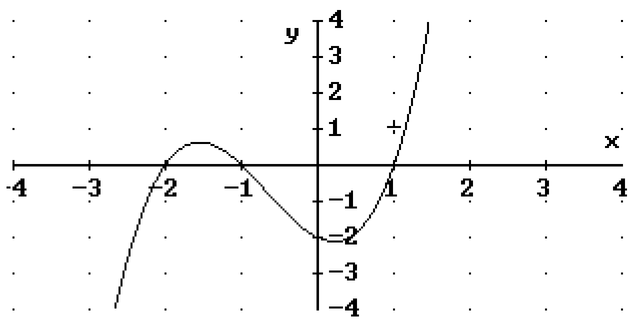
#143: $x > -\frac{2}{3}$

#144: $6\cdot x + 4 < 0$

#145: SOLVE(6·x + 4 < 0, x, Real)

#146: $x < -\frac{2}{3}$

La funzione rivolge la concavità verso l'alto per x>–2/3 e verso il basso per x<–2/3; il punto x=–2/3 è un punto di flesso
Grafico della funzione



Esempio 14 – Flessi e derivabilità

#147: f(x) :=
If $x \neq 0$
$x\cdot LN(ABS(x))$
0

La funzione è continua per ogni x reale

#148: $\lim_{x\to 0-} f(x)$

#149: 0

#150: $\lim_{x\to 0+} f(x)$

#151: 0

Calcolando la derivata di f(x) si ottiene una risposta nella forma della definizione di f(x); il risultato è in parte sbagliato: la funzione nonè derivabile nell'origine

#152: $\frac{d}{dx} f(x)$

#153: $IF\left(x \neq 0, \frac{LN(x^2)}{2} + 1, 0\right)$

Calcolo del limite del rapporto incrementale
Richiamare per comodità la funzione rapp_incr(h) (usare Dichiara> Definisci funzione)

#154: $rapp\_incr(h) := \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

#155: x := 0

#156: $\lim_{h\to 0-} rapp\_incr(h)$

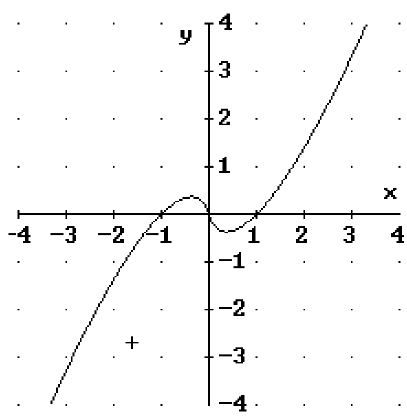
#157: $-\infty$

#158: $\lim_{h\to 0+} rapp\_incr(h)$

#159: $-\infty$

#160: x :=

Da questi risultati si deduce che la funzione ha tangente verticale nell'origine (flesso a tangente verticale)
Grafico della funzione



Didatticamente può essere utile disegnare nella stessa figura il grafico della funzione e della sua derivata prima: si può facilmente osservare la relazione fra zeri della derivata prima e punti critici Si può anche disegnare il grafico della derivata seconda e osservare il legame tra zeri della derivata seconda e punti di flesso

Esempio 15 – Confronto tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata prima

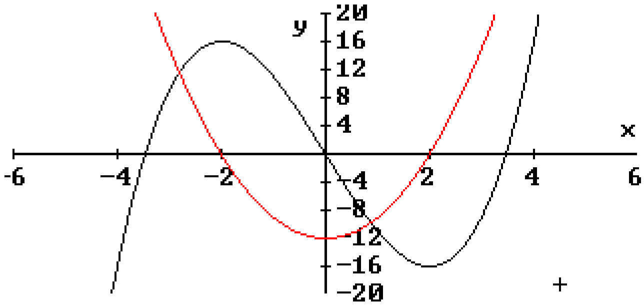
#161: $f(x) := x^3 - 12 \cdot x$

#162: $\frac{d}{dx} f(x)$

#163: $3 \cdot x^2 - 12$

#164: $\mathrm{SOLVE}(3 \cdot x^2 - 12, x, \mathrm{Real})$

#165: $x = -2 \lor x = 2$



Esempio 16 – Confronto tra il grafico di una funzione e i grafici della derivata prima e seconda

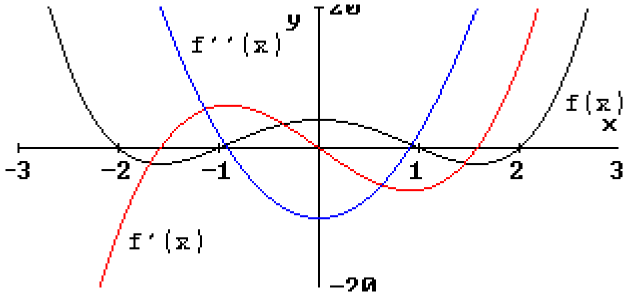
#166: $f(x) := x^4 - 5 \cdot x^2 + 4$

#167: $\frac{d}{dx} f(x)$

#168: $4 \cdot x^3 - 10 \cdot x$

#169: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#170: $12 \cdot x^2 - 10$



Un utile esercizio per lo studente consiste nel riconoscere fra i grafici che compaiono nella figura, quello corrispondente alla funzione e quelli corrispondenti alla derivata prima e seconda Ovviamente non devono essere fornite allo studente le espressioni della funzione f(x) e delle sue derivate, che qui sono fornite per comodità, ma solo il loro grafico

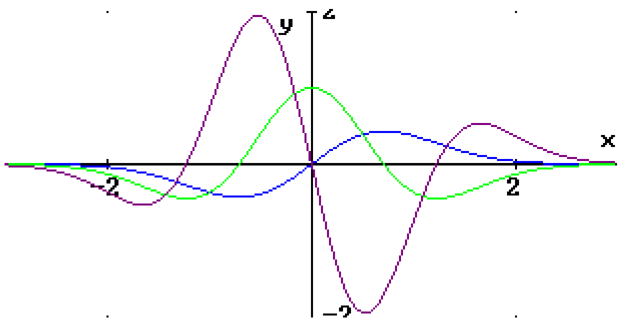
#171: $f(x) := x \cdot EXP(-x^2)$

#172: $\dfrac{d}{dx} f(x)$

#173: $$\hat{e}^{-x^2} \cdot (1 - 2 \cdot x^2)$$

#174: $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#175: $$2 \cdot x \cdot \hat{e}^{-x^2} \cdot (2 \cdot x^2 - 3)$$



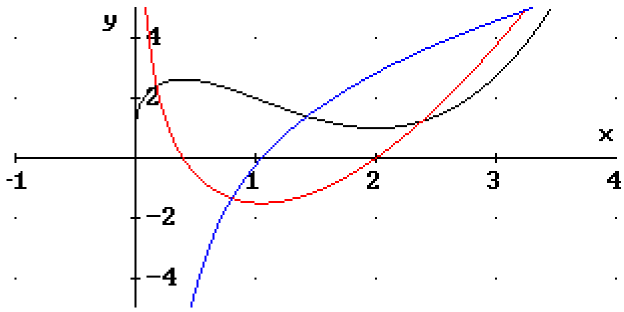
#176: $f(x) := \sqrt{x} \cdot (x - 2)^2 + 1$

#177: $\dfrac{d}{dx} f(x)$

#178: $$\frac{5 \cdot x^{3/2}}{2} - 6 \cdot \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

#179: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#180: $$\frac{15\cdot\sqrt{x}}{4} - \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^{3/2}}$$



4.11 Studio di funzioni con Derive

Premessa

In questo paragrafo saranno illustrati alcuni studi di funzione con l'obiettivo soprattutto di mettere in evidenza gli inconvenienti che possono nascere da un uso acritico di Derive.
In molti esempi si fornisce anche una traccia delle operazioni svolte con Derive, per altro già descritte in dettaglio nei paragrafi precedenti.
Le funzioni qui studiate sono state scelte in modo da fornire una specie di "catalogo" di casi tipici.
La facilità con cui in questo ambiente si può realizzare il grafico di una funzione non esime l'utente, dal conoscere i metodi analitici necessari per studiare una funzione: bisogna sempre essere consapevoli di ciò che si sta facendo!

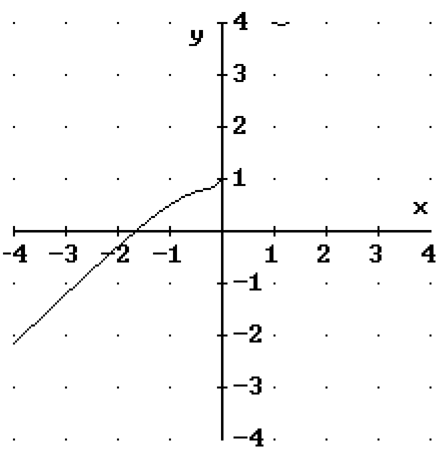
Esempio 1 – Osservazioni introduttive sulla finestra grafica di Derive

Nel tracciare il grafico di una funzione accade spesso che il grafico non compaia tutto nella finestra grafica che si apre per default
Per ottenere la visualizzazione migliore del grafico si usa il menu Imposta>Intervallo del grafico e Imposta>Rapporto di aspetto, scegliendo in modo opportuno i valori dei vari parametri.
Si possono anche usare i bottoni Riduci e Ingrandisci nella barra degli strumenti della Finestra grafica, che consentono una minor libertà di scelta, ma sono di uso immediato.
Come esempio si tracci il grafico della funzione

f(x)=2^(1/x)+x+1

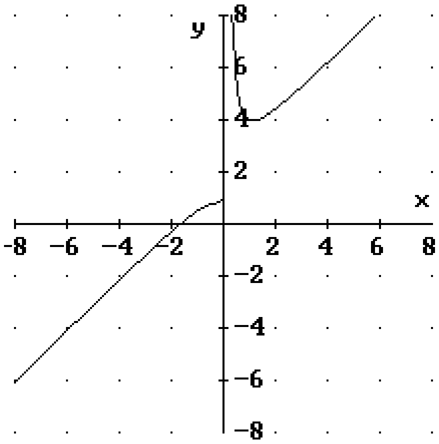
Aprire la Finestra grafica e portarsi alla situazione di default con il menu Imposta>Intervallo del grafico, premere Resetta e OK, poi tracciare il grafico

#1: $f(x) := 2^{1/x} + x + 1$



Il grafico della funzione non è tutto contenuto in questa finestra (anche se si intravede un piccolo segno all'ordinata 4)
Aprire il menu Imposta>Intervallo del grafico e scegliere come intervalli orizzontale e verticale l'intervallo (–8,8): il grafico

ora compare tutto nella finestra
(nell'esempio 7 è riportato lo studio completo della funzione)

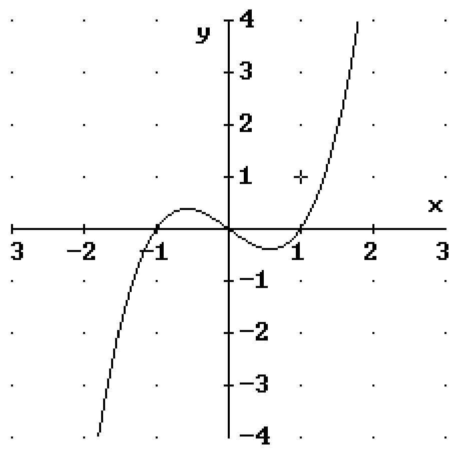


Grafici ottenibili per trasformazioni elementari

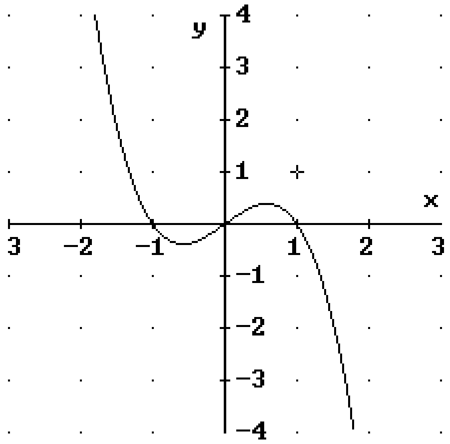
Esempio 2 – Grafici ottenibili per trasformazioni elementari (traslazione, dilatazione, ribaltamento, simmetria,...)

Un utile esercizio da proporre agli studenti consiste nel tracciare i grafici ottenibili con semplici trasformazioni elementari a partire da una funzione assegnata
Può anche essere un buon esercizio fornire il grafico di una funzione f(x) e della funzione ottenuta con una trasformazione elementare e far ritrovare allo studente il tipo di trasformazione impiegata
Si assegni una funzione f(x) e si ricavino le funzioni −f(x),f(−x), |f(x)|,f(|x|),f(x)+a,f(x+a), tracciando i relativi grafici

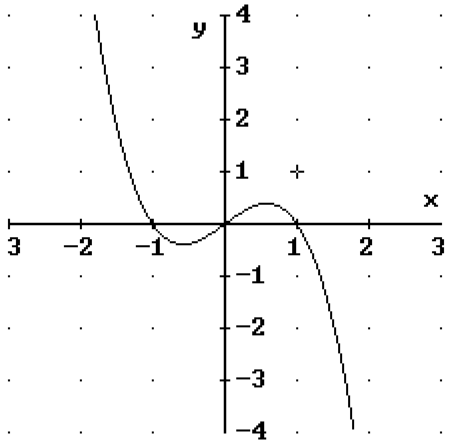
#2: $f(x) := x^3 - x$



#3: $- f(x)$



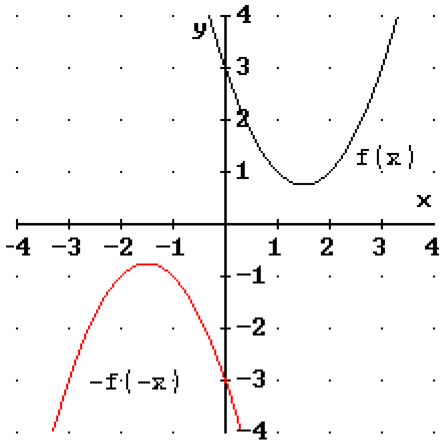
#4: $\quad$ **f(-x)**



Confrontare i grafici precedenti: la funzione è: pari? dispari?...

#5: $\quad f(x) := x^2 - 3\cdot x + 3$

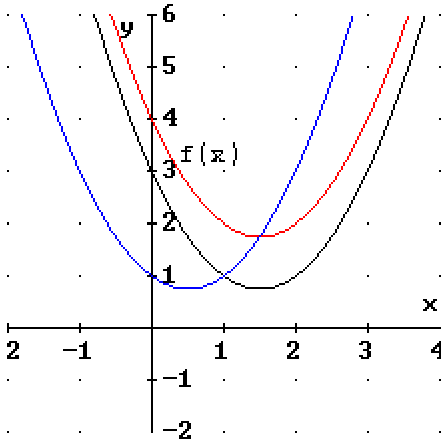
#6: $\quad - f(-x)$



Il grafico della funzione f(x) è stato sottoposto a due trasformazioni: il cambiamento di segno della funzione (simmetria assiale rispetto all'asse x) e il cambiamento di segno della variabile x (simmetria rispetto all'asse y); la commposizione di due simmetrie assiali equivale a una simmetria centrale rispetto all'origine

#7: **f(x) + 1**

#8: **f(x + 1)**

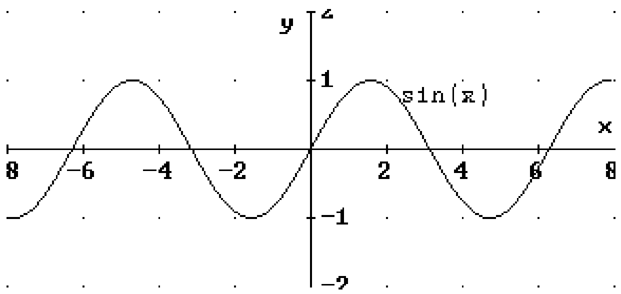


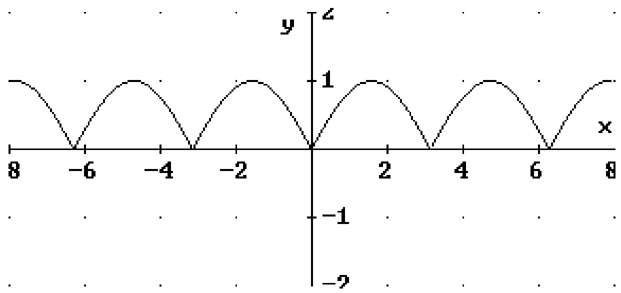
Esaminare i grafici precedenti: data la funzione f(x), qual è il grafico di f(x)+1? E il grafico di f(x+1)?

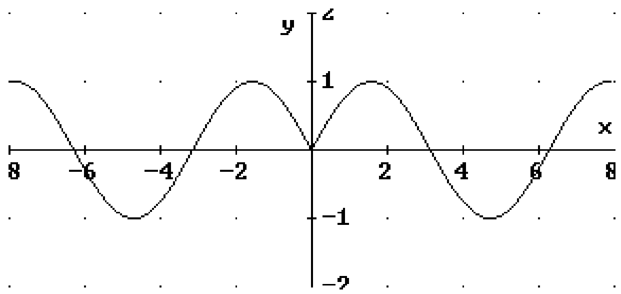
#9: **f(x) := SIN(x)**

#10: **|f(x)|**

#11: **f(|x|)**







Studi di funzione

Esempio 3 – Un semplice polinomio

f(x)=x^4–12x^3+52x^2–96x+64

#12: $f(x) := x^4 - 12\cdot x^3 + 52\cdot x^2 - 96\cdot x + 64$

Zeri della funzione

#13: $\text{SOLVE}(x^4 - 12\cdot x^3 + 52\cdot x^2 - 96\cdot x + 64, x, \text{Real})$

#14: $x = 4 \vee x = 2$

Fattorizzando la funzione si trova una semplice espressione da cui si deduce che gli zeri hanno molteplicità 2; questo dovrebbe suggerire che in questi punti si annulla anche la derivata prima

#15: $f(x) := (x - 2)^2\cdot(x - 4)^2$

Derivata prima

#16: $\dfrac{d}{dx} f(x)$

#17: $4\cdot(x - 2)\cdot(x - 3)\cdot(x - 4)$

La derivata prima si annulla anche nel punto x=3, oltre che nei due già previsti

Segno della derivata prima (monotonia della funzione)

#18: $4\cdot(x - 2)\cdot(x - 3)\cdot(x - 4) > 0$

#19: $\text{SOLVE}(4\cdot(x - 2)\cdot(x - 3)\cdot(x - 4) > 0, x, \text{Real})$

#20: $2 < x < 3 \vee x > 4$

I punti x=2 e x=4 sono due minimi, il punto x=3 è un massimo

Derivata seconda

#21: $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#22: $4\cdot(3\cdot x^2 - 18\cdot x + 26)$

Zeri della derivata seconda

#23: $\text{SOLVE}(4\cdot(3\cdot x^2 - 18\cdot x + 26), x, \text{Real})$

#24: $x = 3 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \vee x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + 3$

Segno della derivata seconda (concavità e flessi)

#25: $4\cdot(3\cdot x^2 - 18\cdot x + 26) > 0$

#26: $\text{SOLVE}(4\cdot(3\cdot x^2 - 18\cdot x + 26) > 0,\ x,\ \text{Real})$

#27: $x < 3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{\sqrt{3}}{3} + 3$

Calcolo dell'equazione delle rette tangenti nei punti di flesso

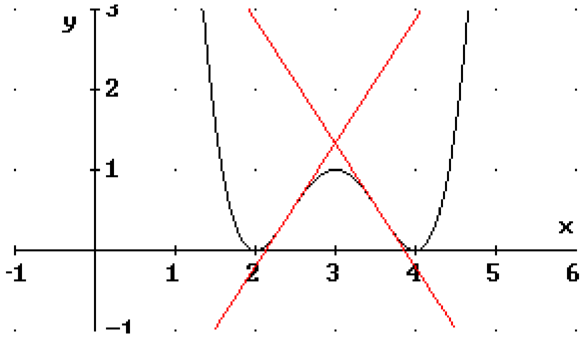
#28: $y = \text{TANGENT}\left(f(x),\ x,\ 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

#29: $y = \frac{4\cdot\sqrt{3}\cdot(2\cdot x + \sqrt{3} - 6)}{9}$

#30: $y = \text{TANGENT}\left(f(x),\ x,\ 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

#31: $y = - \frac{4\cdot\sqrt{3}\cdot(2\cdot x - \sqrt{3} - 6)}{9}$

Grafico della funzione; sul grafico sono anche tracciate le due rette tangenti nei punti di flesso



Esempio 4 – Una funzione razionale

#32: $f(x) := \frac{x^3 - 2\cdot x^2 - x + 3}{(x - 2)^2}$

Dominio: x≠2
Zeri (nella soluzione dell'equazione f(x)=0 preferire il metodo numerico al metodo algebrico, si ottiene un risultato semplice e leggibile)

#33: $\text{SOLVE}(f(x),\ x,\ \text{Real})$

#34: $x = - \left(\frac{47}{54} - \frac{\sqrt{93}}{18}\right)^{1/3} - \left(\frac{\sqrt{93}}{18} + \frac{47}{54}\right)^{1/3} + \frac{2}{3}$

#35: NSOLVE(f(x), x, Real)

#36: $x = -1.147899031$

Segno di f(x); nella soluzione della disequazione scegliere il metodo Algebrico e numerico

#37: $f(x) > 0$

#38: APPROX(SOLVE(f(x) > 0, x, Real))

#39: $x > -1.147899035$

Limiti e asintoto verticale

#40: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

#41: $-\infty$

#42: $\lim_{x\to\infty} f(x)$

#43: ∞

#44: $\lim_{x\to 2-} f(x)$

#45: ∞

#46: $\lim_{x\to 2+} f(x)$

#47: ∞

Asintoto obliquo (un solo asintoto)

#48: y = TANGENT(f(x), x, ∞)

#49: $y = x + 2$

#50: y = TANGENT(f(x), x, -∞)

#51: $y = x + 2$

Derivata prima

#52: $\frac{d}{dx} f(x)$

#53: $$\frac{x^3 - 6\cdot x^2 + 9\cdot x - 4}{(x - 2)^3}$$

Zeri della derivata prima (massimi–minimi?)

#54: $\mathrm{SOLVE}\left(\frac{x^3 - 6\cdot x^2 + 9\cdot x - 4}{(x - 2)^3}, x, \mathrm{Real}\right)$

#55: $x = 4 \lor x = 1$

Monotonia

#56: $$\frac{x^3 - 6\cdot x^2 + 9\cdot x - 4}{(x - 2)^3} > 0$$

#57: $$\text{SOLVE}\left(\frac{x^3 - 6\cdot x^2 + 9\cdot x - 4}{(x - 2)^3} > 0, x, \text{Real}\right)$$

#58: $(x \neq 1 \land x < 2) \lor x > 4$

Il punto x=4 è un minimo relativo, il punto x=1 non è nè un minimo nè un massimo relativo
Derivata seconda

#59: $$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$$

#60: $$\frac{6\cdot(x - 1)}{(x - 2)^4}$$

Zeri della derivata seconda

#61: $$\text{SOLVE}\left(\frac{6\cdot(x - 1)}{(x - 2)^4}, x, \text{Real}\right)$$

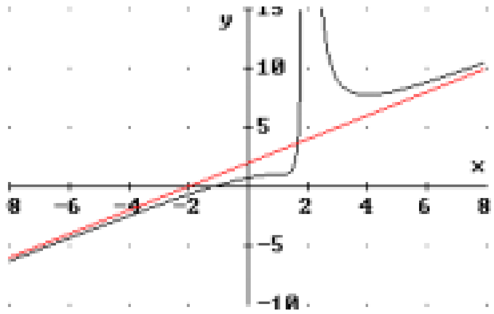
#62: $x = \pm\infty \lor x = 1$

Il punto x=1 è un flesso; in x=1 si annulla anche la derivata prima, quindi un flesso a tangente orizzontale
Calcolo dell'equazione della retta tangente nel punto di flesso (per verifica)

#63: $y = \text{TANGENT}(f(x), x, 1)$

#64: $y = 1$

Grafico della funzione (si traccia anche l'asintoto obliquo)



Esempio 5 – Una funzione irrazionale

#65: $f(x) := \sqrt{1 + 3\cdot x^2} + 2\cdot x - 1$

La funzione è definita per ogni x reale
Zeri e segno

#66: $\text{SOLVE}(\sqrt{1 + 3\cdot x^2} + 2\cdot x - 1, x)$

#67: $x = 0$

#68: $f(x) > 0$

#69: $\text{SOLVE}(f(x) > 0, x, \text{Real})$

#70: $x > 0$

Limiti e asintoti

#71: $\lim_{x\to\infty} f(x)$

#72: ∞

#73: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

#74: $-\infty$

#75: $y = \text{TANGENT}(f(x), x, \infty)$

#76: $y = x\cdot(\sqrt{3} + 2) - 1$

#77: $y = \text{TANGENT}(f(x), x, -\infty)$

#78: $y = x\cdot(2 - \sqrt{3}) - 1$

La funzione ha due asintoti obliqui diversi per x che tende a +∞ e a −∞
Derivata prima e monotonia

#79: $\frac{d}{dx} f(x)$

#80: $$\frac{2\cdot\sqrt{3\cdot x^2 + 1} + 3\cdot x}{\sqrt{3\cdot x^2 + 1}}$$

Zeri e segno della derivata prima

#81: $\text{SOLVE}(2\cdot\sqrt{3\cdot x^2 + 1} + 3\cdot x, x, \text{Real})$

#82: false

#83: $2\cdot\sqrt{3\cdot x^2 + 1} + 3\cdot x > 0$

#84: $\text{SOLVE}(2\cdot\sqrt{3\cdot x^2 + 1} + 3\cdot x > 0, x, \text{Real})$

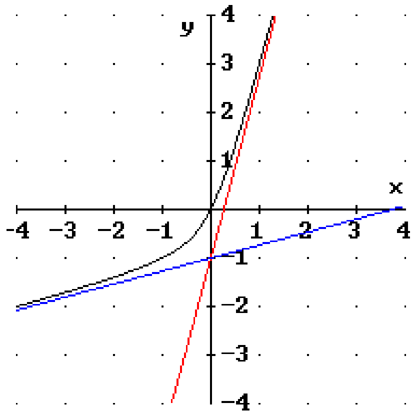
#85: **true**

La derivata prima non si annulla mai, ha sempre segno positivo; la funzione è crescente
Derivata seconda e concavità

#86: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#87: $$\frac{3}{(3\cdot x^2 + 1)^{3/2}}$$

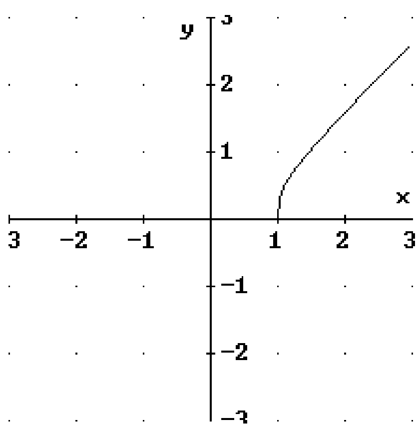
La derivata seconda non si annulla mai, è sempre positiva; la concavità è rivolta verso l'alto
Grafico della funzione e degli asintoti obliqui



Esempio 6 – Una funzione irrazionale. La radice cubica

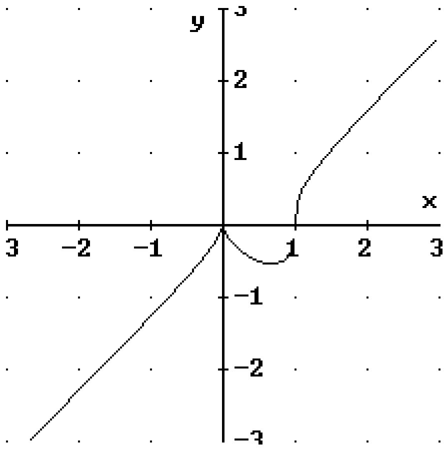
#88: $f(x) := (x^3 - x^2)^{1/3}$

Tracciando il grafico con Derive (selezionare l'espressione a destra dell'uguale) si ottiene solo una parte del grafico, quella relativa ai valori $x \geq 1$; per ottenere il grafico corretto aprire il menu Dichiara>Impostazioni di semplificazione e nel campo Radice n-esima numero complesso scegliere Real
Questo problema è stato esaminato in dettaglio nel paragrafo sulle funzioni elementari



#89: Branch := Real

Tracciare di nuovo il grafico, selezionando l'espressione a destra dell'uguale: si ottiene il grafico corretto



Lo studio dettagliato della funzione fornisce i seguenti risultati
Dominio: la funzione è definita per ogni x reale
Zeri e segno

#90: $\mathrm{SOLVE}((x^3 - x^2)^{1/3}, x, \mathrm{Real})$

#91: $x = 1 \vee x = 0$

#92: $(x^3 - x^2)^{1/3} > 0$

#93: $\mathrm{SOLVE}((x^3 - x^2)^{1/3} > 0, x, \mathrm{Real})$

#94: $x > 1$

Limiti e asintoti

#95: $\lim_{x \to \infty} f(x)$

#96: ∞

#97: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

#98: $-\infty$

Asintoto obliquo (c'è un solo asintoto)

#99: $y = \mathrm{TANGENT}(f(x), x, \infty)$

#100: $y = \dfrac{3 \cdot x - 1}{3}$

#101: $y = \mathrm{TANGENT}(f(x), x, -\infty)$

#102: $y = \dfrac{3 \cdot x - 1}{3}$

L'esame del grafico tracciato in precedenza suggerisce che la funzione non sia derivabile per x=0 e x=1
Derivata prima

#103: $\frac{d}{dx} f(x)$

#104: $$\frac{3\cdot x - 2}{3\cdot x^{1/3}\cdot(x - 1)^{2/3}}$$

#105: SOLVE(3·x - 2, x, Real)

#106: $$x = \frac{2}{3}$$

#107: $\frac{3\cdot x - 2}{3\cdot x^{1/3}\cdot(x - 1)^{2/3}} > 0$

#108: $\mathrm{SOLVE}\left(\frac{3\cdot x - 2}{3\cdot x^{1/3}\cdot(x - 1)^{2/3}} > 0, x, \mathrm{Real}\right)$

#109: $$x < 0 \vee x > \frac{2}{3}$$

La funzione ha un minimo relativo nel punto x=2/3 e un massimo relativo in x=0, ma in x=0 non è derivabile
Per studiare la derivabilità si introduce la funzione rapporto incrementale e se na calcola il limite destro e sinistro per h che tende a zero (ricordare di scegliere la variabile h nella finestra Calcola limite)

#110: $\mathrm{rapp\_incr}(h) := \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Derivabilità in x=0: la funzione presenta una cuspide

#111: x := 0

#112: $\lim_{h\to 0-} \mathrm{rapp\_incr}(h)$

#113: $$\infty$$

#114: $\lim_{h\to 0+} \mathrm{rapp\_incr}(h)$

#115: $$-\infty$$

Derivabilità in x=1: la funzione presenta un flesso a tangente verticale

#116: $x := 1$

#117: $\lim_{h \to 0-} \text{rapp\_incr}(h)$

#118: ∞

#119: $\lim_{h \to 0+} \text{rapp\_incr}(h)$

#120: ∞

Liberare la variabile x

#121: $x :=$

Derivata seconda

#122: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#123: $$- \frac{2}{9 \cdot x^{4/3} \cdot (x - 1)^{5/3}}$$

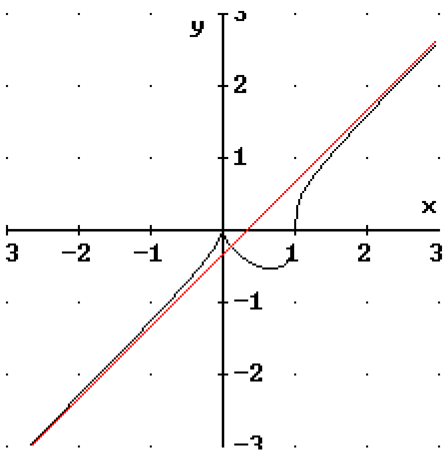
La derivata seconda non si annulla mai
Concavità

#124: $$- \frac{2}{9 \cdot x^{4/3} \cdot (x - 1)^{5/3}} > 0$$

#125: $$\text{SOLVE}\left(- \frac{2}{9 \cdot x^{4/3} \cdot (x - 1)^{5/3}} > 0, x, \text{Real}\right)$$

#126: $x < 1$

Grafico della funzione e dell'asintoto obliquo



Esempio 7 – Una funzione esponenziale

#127: $f(x) := 2^{1/x} + x + 1$

Dominio: la funzione è definita per ogni x≠0
Zeri
Derive non è in grado di risolvere algebricamente l'equazione f(x)=0
L'equazione deve essere risolta numericamente: si trova una sola soluzione reale

#128: $\mathrm{SOLVE}(2^{1/x} + x + 1, x, \mathrm{Real})$

#129: $$2^{1/x} + x = -1$$

#130: $\mathrm{NSOLVE}(2^{1/x} + x + 1, x, \mathrm{Real})$

#131: $$x = -1.658385185$$

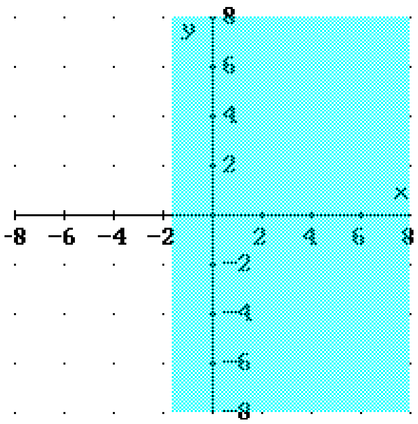
Segno

#132: $2^{1/x} + x + 1 > 0$

#133: $\mathrm{NSOLVE}(2^{1/x} + x + 1 > 0, x, \mathrm{Real})$

#134: $$\mathrm{NSOLVE}(2^{1/x} + x + 1 > 0, x, \mathrm{Real})$$

Derive non è in grado di risolvere la disequazione; un modo per risolvere il problema consiste nel tracciare il grafico dell' espressione #132 (la disequazione).



Limiti e asintoti (un solo asintoto obliquo)

#135: $\lim_{x\to 0-} f(x)$

#136: $$1$$

#137: $\lim_{x\to 0+} f(x)$

#138: $$\infty$$

#139: $\lim_{x \to \infty} f(x)$

#140: ∞

#141: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

#142: $-\infty$

#143: y = TANGENT(f(x), x, ∞)

#144: $y = x + 2$

#145: y = TANGENT(f(x), x, -∞)

#146: $y = x + 2$

Derivata prima

#147: $\frac{d}{dx} f(x)$

#148: $1 - \frac{2^{1/x} \cdot LN(2)}{x^2}$

Zeri e segno della derivata prima

#149: $SOLVE\left(1 - \frac{2^{1/x} \cdot LN(2)}{x^2}, x, Real\right)$

#150: $2^{1/x} \cdot LN(2) - x^2 = 0$

Derive non riesce a risolvere l'equazione con metodo algebrico; risolvere in modo numerico

#151: $NSOLVE\left(1 - \frac{2^{1/x} \cdot LN(2)}{x^2}, x, Real\right)$

#152: $x = 1.13106271$

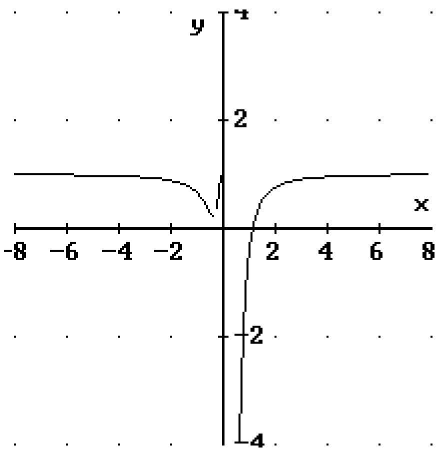
#153: $1 - \frac{2^{1/x} \cdot LN(2)}{x^2} > 0$

Derive non riesce a risolvere la disequazione

#154: $\text{NSOLVE}\left(1 - \dfrac{2^{1/x}\cdot \text{LN}(2)}{x^2} > 0, x, \text{Real}\right)$

#155: $\text{NSOLVE}\left(1 - \dfrac{2^{1/x}\cdot \text{LN}(2)}{x^2} > 0, x, \text{Real}\right)$

Per risolvere questo problema si può ricorrere al grafico della derivata prima



L'esame del grafico della derivata prima ci consente di dedurre informazioni sulla monotonia della funzione f(x): la funzione è crescente per x<0 e per x>1.131062710 (il valore trovato numericamente) ed è decrescente per 0<x<1.131062710
Il punto x=1.131062710 è un minimo relativo
Derivata seconda

#156: $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

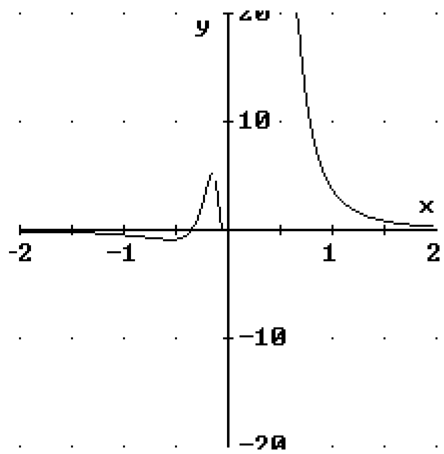
#157: $2^{1/x}\cdot\left(\dfrac{\text{LN}(2)^2}{x^4} + \dfrac{2\cdot \text{LN}(2)}{x^3}\right)$

Zeri e segno della derivata seconda

#158: $\text{NSOLVE}\left(2^{1/x}\cdot\left(\dfrac{\text{LN}(2)^2}{x^4} + \dfrac{2\cdot \text{LN}(2)}{x^3}\right), x, \text{Real}\right)$

#159: $x = -0.3465735902$

Grafico della derivata seconda



Dall'esame del grafico della derivata seconda si deduce che la funzione ha un flesso nel punto x=-0.3465735902; la concavità è rivolta verso l'alto a destra di tale punto e verso il basso a sinistra

Nello studio dei limiti si è trovato che

#161: $\lim_{x \to 0-} f(x)$

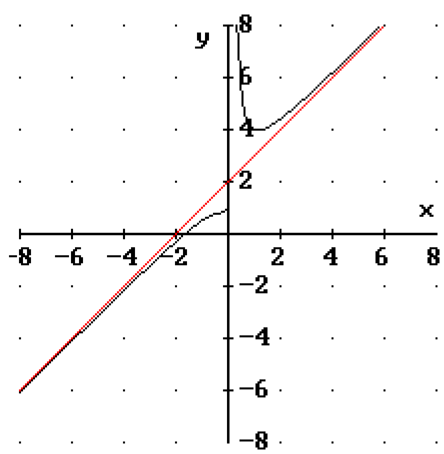
#160: 1

La funzione si arresta all'ordinata 1 a sinistra dell'origine; il coefficiente angolare della tangente alla curva da sinistra ha il coefficiente angolare uguale a uno

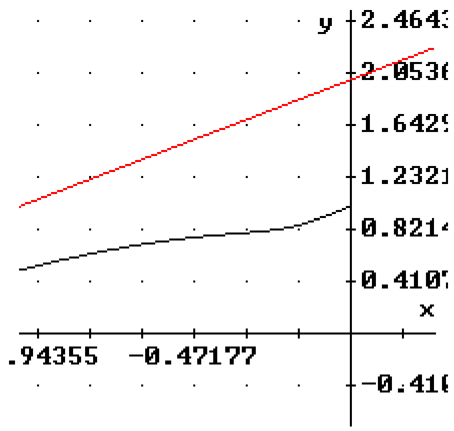
#162: $$\lim_{x \to 0-} \left(1 - \frac{2^{1/x} \cdot \mathrm{LN}(2)}{x^2} \right)$$

#163: 1

Grafico della funzione



Per visualizzare meglio la presenza del punto di flesso si può fare uno zoom sulla zona del grafico interessata (aprire il grafico con doppio clic, usare il pulsante Imposta intervallo con il mouse, poi incorporare il nuovo grafico)



Esempio 8 – Una funzione di tipo esponenziale

#164: $f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Dominio di f(x)

#165: $1 + \frac{1}{x} > 0$

#166: $\text{SOLVE}\left(1 + \frac{1}{x} > 0,\ x,\ \text{Real}\right)$

#167: $x < -1 \vee x > 0$

La funzione non ha zeri ed è sempre positiva

#168: $\text{SOLVE}(f(x) > 0,\ x)$

#169: true

Limiti e asintoti

#170: $\lim_{x \to 0+} f(x)$

#171: 1

#172: $\lim_{x \to -1-} f(x)$

#173: ∞

#174: $\lim_{x \to \infty} f(x)$

#175: ê

#176: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

#177: ê

La retta y=e è asintoto orizzontale; la retta x=–1 è asintoto verticale sinistro
Derivata prima

#178: $\frac{d}{dx} f(x)$

#179: $$\left(\frac{x + 1}{x}\right)^x \cdot \left(LN\left(\frac{x + 1}{x}\right) - \frac{1}{x + 1}\right)$$

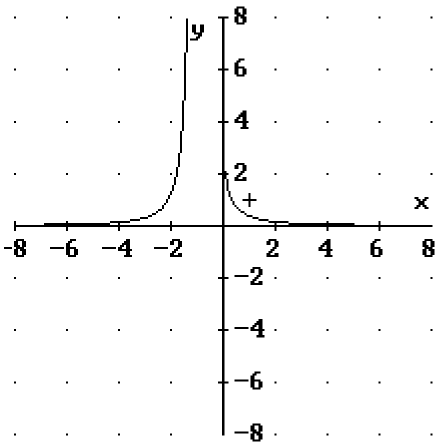
Per studiare il segno di f'(x) basta studiare il segno del secondo fattore della #179, ma Derive non riesce a risolvere la disequazione

#180: $LN\left(\frac{x + 1}{x}\right) - \frac{1}{x + 1} > 0$

#181: $SOLVE\left(LN\left(\frac{x + 1}{x}\right) - \frac{1}{x + 1} > 0, x, Real\right)$

#182: $$\left((x + 1)\cdot LN\left(\frac{x + 1}{x}\right) < 1 \wedge x < -1\right) \vee \left((x + 1)\cdot LN\left(\frac{x + 1}{x}\right) > 1 \wedge x > -1\right)$$

Un modo per risolvere il problema consiste nel tracciare il grafico della derivata prima



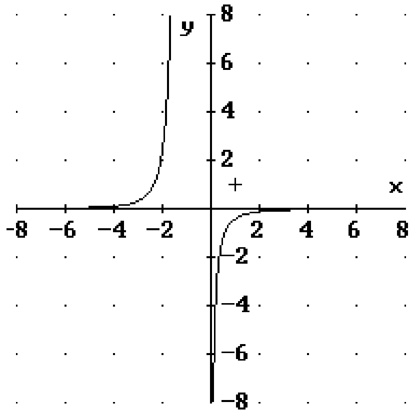
La derivata prima non si annulla mai ed è sempre positiva, perciò la funzione f(x) è sempre crescente nel suo dominio e non ci sono punti di massimo o minimo relativo, nè flessi a tangente orizzontale

Derivata seconda

$$\#183: \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$$

$$\#184: \left(\frac{x + 1}{x}\right)^x \cdot \left(LN\left(\frac{x + 1}{x}\right)^2 - \frac{2 \cdot LN\left(\frac{x + 1}{x}\right)}{x + 1} + \frac{x - 1}{x \cdot (x + 1)^2}\right)$$

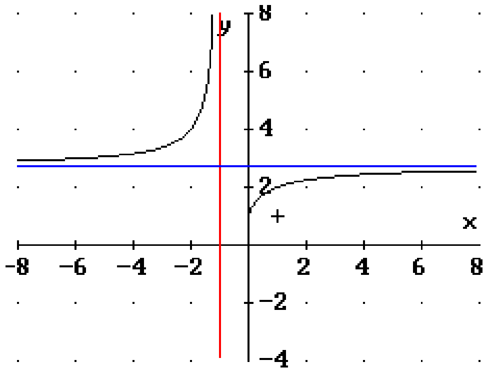
Anche con la derivata seconda si presenta lo stesso problema della derivata prima: non si riesce a studiarne il segno; ricorriamo quindi al grafico di f''(x)



La derivata seconda non si annulla mai, è positiva per x<–1 (concavità verso l'alto) e negativa per x>0 (concavità verso il basso).
Grafico di f(x) (con gli asintoti)

$\#185: x = -1$

$\#186: y = ê$



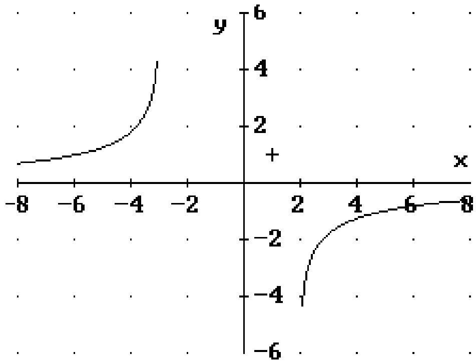
Il grafico (e il limite #171) suggerisce di calcolare il limite della derivata prima per x che tende a 0 da destra; si trova che la tangente alla curva è verticale

$$\#187: \lim_{x \to 0+} \left(\frac{x + 1}{x}\right)^x \cdot \left(LN\left(\frac{x + 1}{x}\right) - \frac{1}{x + 1}\right)$$

$$\#188: \infty$$

Esempio 9 – La funzione logaritmo

#189: f(x) := LN(x - 2) - LN(x + 3)

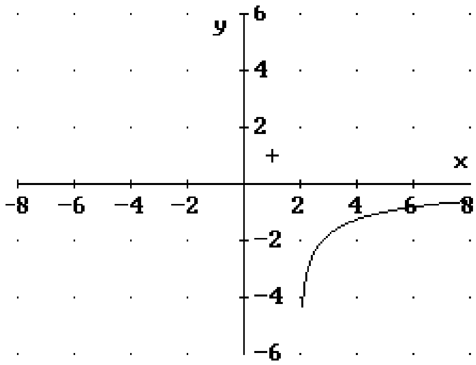


Il grafico che si ottiene con Derive è sbagliato; infatti il dominio della funzione è dato dalla soluzione del sistema di disequazioni $x-2>0$ e $x+3>0$; la soluzione è l'intervallo $(2,+\infty)$. Derive traccia il grafico anche nell'intervallo $(-\infty,-3)$ e ciò è dovuto al fatto che si opera in campo complesso (si veda il paragrafo 4.8 sulle funzioni elementari)
Il modo per risolvere questo problema è suggerito nel paragrafo 4.8 citato.
Si definisce la funzione REAL_ONLY(x), poi si ridefinisce il logaritmo

```
      real_only(x) :=
#190:   If IM(x) = 0
           x
```

#191: real_ln(x) := real_only(LN(x))

#192: f(x) := real_ln(x - 2) - real_ln(x + 3)



Il grafico ottenuto ora è corretto: lo studio della funzione conferma la correttezza del grafico
Per svolgere lo studio di funzione si deve utilizzare l'espressione #189 e non la #192 che darebbe origine a problemi ad esempio nel calcolo delle derivate
Dominio, zeri e segno
La funzione è definita per $x>2$ e non ha intersezioni con l'asse x; i comandi seguenti non portano ad alcun risultato per la ricerca degli zeri: Derive è in difficoltà nel risolvere questa semplice equazione (che, attenzione,non ha soluzione!)

#193: $\mathrm{NSOLVE}(\mathrm{LN}(x - 2) - \mathrm{LN}(x + 3), x, Real)$

#194: $\mathrm{NSOLVE}\left(\mathrm{LN}\left(\dfrac{x - 2}{x + 3}\right), x, Real\right)$

Per verificare che non ci sono intersezioni riscrivere l'equazione LN(x-2)-LN(x+3)=0 nella forma LN((x-2)/(x+3))=0 e osservare che l'equazione equivale a (x-2)/(x+3)=1.
Questa equazione viene finalmente risolta e si trova che non ci sono soluzioni

#195: $\dfrac{x - 2}{x + 3} = 1$

#196: $\mathrm{SOLVE}\left(\dfrac{x - 2}{x + 3} = 1, x, Real\right)$

#197: $false$

Limiti e asintoto orizzontale

#198: $f(x) := \mathrm{LN}(x - 2) - \mathrm{LN}(x + 3)$

#199: $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)$

#200: $-\infty$

#201: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

#202: 0

Derivate, massimi, minimi, flessi

#203: $f(x) := \mathrm{LN}(x - 2) - \mathrm{LN}(x + 3)$

#204: $\dfrac{d}{dx} f(x)$

#205: $\dfrac{5}{(x - 2)\cdot(x + 3)}$

La funzione è crescente nel suo dominio e non ha punti di massimo o minimo relativo

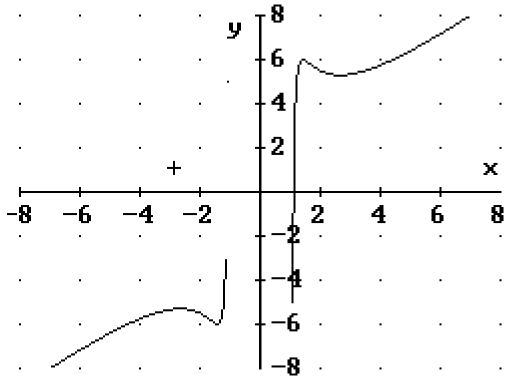
#206: $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#207: $-\dfrac{5\cdot(2\cdot x + 1)}{(x - 2)^2\cdot(x + 3)^2}$

La funzione non ha flessi e rivolge la concavità verso in basso

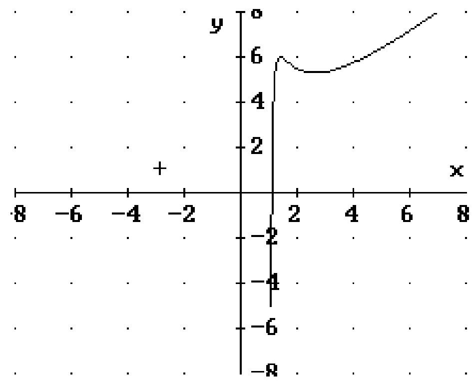
Esempio 10 – La funzione logaritmo

$$\#208:\ f(x) := \frac{x^3 - 4\cdot x}{x^2 - 1} + 5\cdot(\mathrm{LN}(x + 1) - \mathrm{LN}(x - 1))$$



Il grafico ottenuto con Derive è "sbagliato": il dominio della funzione è l'intervallo $(1,+\infty)$, mentre Derive traccia il grafico anche nell'intervallo $(-\infty,-1)$
Per ottenere il grafico corretto occorre ridefinire la funzione

$$\#209:\ f(x) := \frac{x^3 - 4\cdot x}{x^2 - 1} + 5\cdot(\mathrm{real\_ln}(x + 1) - \mathrm{real\_ln}(x - 1))$$



Per svolgere lo studio della funzione si utilizza l'espressione #208 e non la #209

$$\#210:\ f(x) := \frac{x^3 - 4\cdot x}{x^2 - 1} + 5\cdot(\mathrm{LN}(x + 1) - \mathrm{LN}(x - 1))$$

Dominio: $x>1$
Zeri: risolvendo l'equazione si trova uno zero negativo che non appartiene al dominio della funzione (ricordare che Derive opera in campo complesso); per trovare lo zero che interessa limitare la ricerca ad un intervallo che contiene lo zero

#211: NSOLVE(f(x), x, Real)

#212: $x = -1.094519583$

#213: NSOLVE(f(x), x, 0, 2)

#214: $x = 1.094519583$

Limiti e asintoti

#215: $\lim_{x \to 1+} f(x)$

#216: $-\infty$

#217: $\lim_{x \to \infty} f(x)$

#218: ∞

#219: TANGENT(f(x), x, ∞)

#220: x

La retta y=x è asintoto obliquo destro
Derivate, massimi, minimi, flessi

#221: $\frac{d}{dx} f(x)$

#222: $$\frac{x^4 - 9\cdot x^2 + 14}{(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 - 1)}$$

#223: NSOLVE($x^4 - 9\cdot x^2 + 14$, x, Real)

#224: $x = -1.414213562 \vee x = 1.414213562 \vee x = -2.645751311 \vee x = 2.645751311$

Il punto x=1.414213562 è un massimo relativo, il punto x=2.645751311 è un minimo relativo

#225: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#226: $$\frac{2\cdot x\cdot(7\cdot x^2 - 19)}{(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 - 1)^2}$$

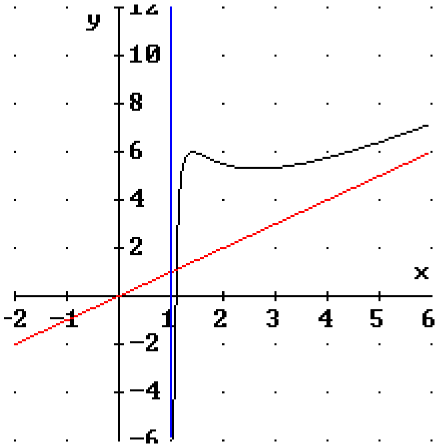
#227: NSOLVE($2\cdot x\cdot(7\cdot x^2 - 19)$, x, Real)

#228: $x = -1.647508942 \vee x = 1.647508942 \vee x = 0$

Il punto x=1.647508942 è un flesso
Grafico della funzione e degli asintoti

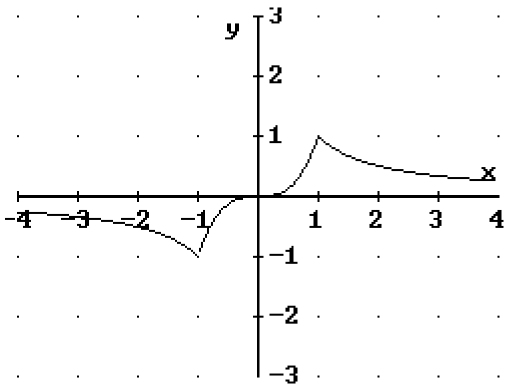
#229: $y = x$

#230: x = 1



Esempio 11 – Una funzione definita a tratti

```
         f(x) :=
           If -1 < x < 1
#231:         x^3
              1/x
```



Le funzioni definite a tratti si prestano bene allo studio della continuità e della derivabilità
Il grafico suggerisce che la funzione sia continua per ogni x, ma non derivabile nei punti x=-1 e x=1
Poichè la funzione è dispari, basta studiare continuità e derivabilità in x=1
Continuità

#232: $\lim_{x\to 1-} f(x)$

#233: 1

#234: $\lim_{x\to 1+} f(x)$

#235: 1

Derivabilità

#236: $\dfrac{d}{dx} f(x)$

#237: $$\text{IF}\left(-1 < x < 1,\ 3\cdot x^2,\ -\frac{1}{x^2}\right)$$

Derive non calcola in modo corretto la derivata nei punti x=−1 e x=1
In realtà la funzione non è derivabile in tali punti; si può usare il rapporto incrementale e calcolare il limite destro e sinistro

#238: $$\text{rapp\_incr}(h) := \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

#239: $x := 1$

#240: $$\lim_{h\to 0-} \text{rapp\_incr}(h)$$

#241: $$3$$

#242: $$\lim_{h\to 0+} \text{rapp\_incr}(h)$$

#243: $$-1$$

Liberare la variabile x

#244: **x :=**

Si possono anche calcolare derivata destra e sinistra come limite delle derivate destra e sinistra per x che tende a 1; le derivate destra e sinistra nell'intorno di 1 (con x≠1) sono calcolate nel risultato #237, usare le sottoespressioni

#245: $3\cdot x^2$

#246: $$\lim_{x\to 1-} 3\cdot x^2$$

#247: $$3$$

#248: $$-\frac{1}{x^2}$$

#249: $$\lim_{x\to 1+} -\frac{1}{x^2}$$

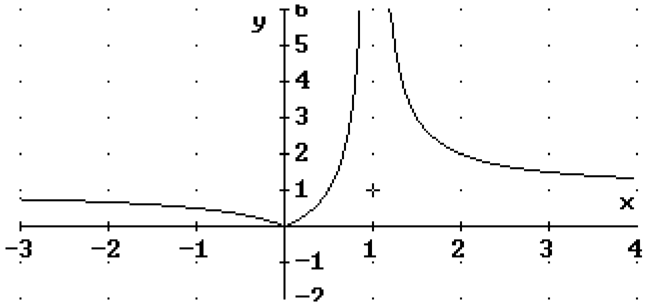
#250: $$-1$$

In entrambi i modi si trova che le derivate destra e sinistra sono diverse, ma finite: il punto x=1 è un punto angoloso

Esempio 12 – Il valore assoluto

Anche le funzioni con il valore assoluto costituiscono esempi adatti per lo studio della continuità e derivabilità

#251: $$f(x) := \left|\frac{x}{x - 1}\right|$$



La funzione è continua ma non derivabile in x=0 (punto angoloso)

#252: x := 0

#253: $\lim_{h \to 0-} \text{rapp\_incr}(h)$

#254: -1

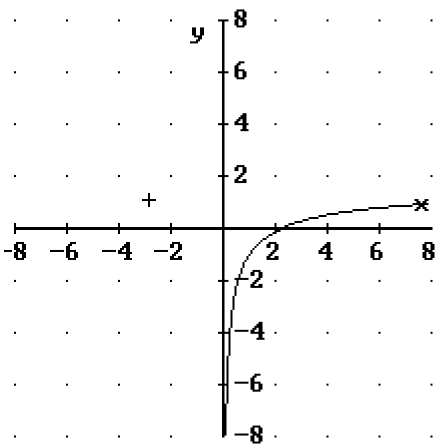
#255: $\lim_{h \to 0+} \text{rapp\_incr}(h)$

#256: 1

#257: x :=

Esempio 13 – Il valore assoluto

#258: $f(x) := \dfrac{2\cdot\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}}$



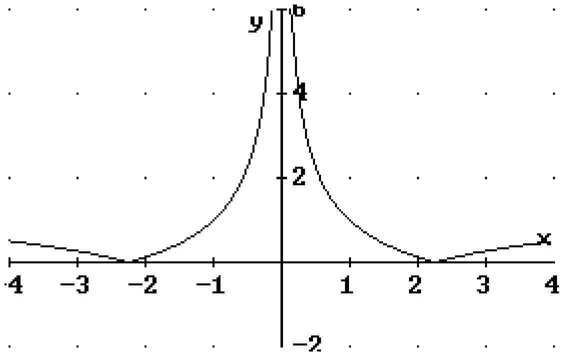
Zeri di f(x)

#259: SOLVE(f(x), x, Real)

#260: $x = \dfrac{9}{4}$

Definire la funzione |f(|x|)|

#261: $f(x) := \left| \dfrac{2\cdot\sqrt{(|x|)} - 3}{\sqrt{(|x|)}} \right|$



La funzione non è derivabile in x=9/4
Calcolando il limite sinistro e destro del rapporto incrementale si ottiene

#262: $\text{rapp\_incr}(h) := \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

#263: $x := \dfrac{9}{4}$

#264: $\lim_{h \to 0-} \text{rapp\_incr}(h)$

#265: $-\dfrac{4}{9}$

#266: $\lim_{h \to 0+} \text{rapp\_incr}(h)$

#267: $\dfrac{4}{9}$

Il punto x=9/4 è un punto angoloso

#268: x :=

Conclusioni

Le potenzialità grafiche di Derive possono far apparire lo studio di una funzione un'operazione immediata e di facile esecuzione anche per un utente inesperto. In realtà la facilità con cui si ottiene il grafico (a volte "sbagliato"...) non deve trarre in inganno.
Il calcolo, effettuato eventualmente con l'aiuto di Derive, resta indispensabile: le coordinate di massimi, minimi e flessi, la presenza di asintoti e la loro equazione non sono sempre così evidenti dall'esame del grafico; inoltre spesso il grafico non appare tutto nella finestra grafica di default e deve essere "cercato" altrove; infine, come già osservato, il funzionamento di Derive porta a volte a grafici "sbagliati" che devono essere corretti. In particolare occorre attenzione e spirito critico nello studio di funzioni in cui compare il logaritmo o altre funzioni che Derive tratta come funzioni di variabile complessa.

4.12 Calcolo di integrali

Integrali indefiniti

Esempio 1 – Calcolo di una primitiva

Inserire la funzione integranda

#1: $f(x) := x^2 \cdot EXP(x)$

Selezionare la funzione f(x), aprire il Menu Calcola>Integrale, selezionare Indefinito e premere Semplifica
In alternativa si può usare il pulsante Calcola integrale nella barra degli strumenti

#2: $\int f(x)\ dx$

#3: $ê^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 2)$

Si può anche usare il pulsante Calcola derivata scegliendo l'ordine –1

#4 $\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} f(x)$

#5 $ê^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 2)$

Verifica con la definizione di primitiva

#6: $\frac{d}{dx}(ê^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 2))$

#7: $x^2 \cdot ê^x$

L'espressione #3 fornisce una primitiva della funzione assegnata, e non l'integrale indefinito (ossia la totalità delle primitive)
Per la costante di integrazione Derive propone per default C=0; si può scegliere ogni altro valore, o anche il simbolo C: in tal caso si ottiene l'integrale indefinito

#8: INT(f(x), x, c)

#9: $ê^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 2) + c$

Esempio 2 – Funzione integrale

La funzione INT(f(t),t,a,x) permette di trovare la funzione integrale, per un valore a assegnato ad arbitrio
La funzione integrale rappresenta una primitiva di f(x); per trovare la funzione integrale per il valore a=1 (valore scelto ad arbitrio)
Introdurre il comando INT(f(t),t,1,x) e premere Crea e semplifica
La funzione f(x) è definita nell'esempio 1

#10: $\int_1^x f(t)\ dt$

#11: $\hat{e}^x \cdot (x^2 - 2\cdot x + 2) - \hat{e}$

Esempio 3 – Rappresentare sullo stesso grafico la primitiva di una funzione calcolata con il comando Calcola>Integrale e la funzione integrale calcolata per alcuni valori di a (comando INT – esempio 2)

Definire la funzione f(x):=1/3x

#12: $f(x) := \frac{1}{3}\cdot x$

Calcolo della primitiva: pulsante Calcola integrale, costante c=0 (default)

#13: $\int f(x)\ dx$

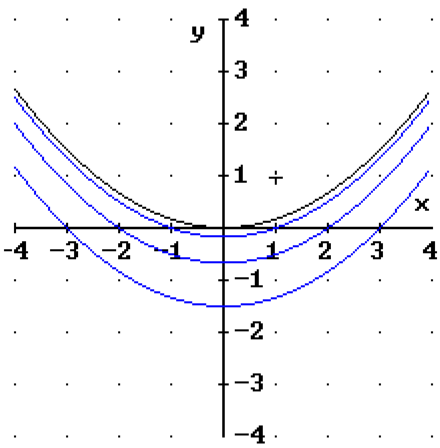
#14: $\frac{x^2}{6}$

Calcolo della funzione integrale per i valori a=1,2,3; introdurre la funzione
VECTOR(INT(f(t),t,a,x),a,1,3)

#15: $\text{VECTOR}\left(\int_a^x f(t)\ dt,\ a,\ 1,\ 3\right)$

#16: $\left[\frac{x^2 - 1}{6},\ \frac{x^2 - 4}{6},\ \frac{x^2 - 9}{6}\right]$

Selezione l'espressione #14, tracciare il grafico, selezionare la #16, tracciare il grafico



Il grafico mette in rilievo il fatto che la funzione integrale per i tre valori scelti di a e la primitiva differiscono per una costante (sono tutte primitive di f(x)): i loro grafici possono essere sovrapposti con una traslazione verticale
Osservare sul grafico che le tre primitive trovate con il comando #15 passano per i punti x=1, x=2, x=3 (valori scelti per a): vedere esempio 4

Esempio 4 – Ricerca di una primitiva soddisfacente una condizione assegnata

Data f(x)=cos(x)−1 trovare la primitiva F(x) tale che F(π)=0
Si determina dapprima la totalità delle primitive della funzione f(x)

#17: f(x) := COS(x) – 1

#18: INT(f(x), x, c)

#19: SIN(x) – x + c

La totalità delle primitive di f(x) è data dalla funzione F(x) al variare di C

#20: F(x) := SIN(x) – x + c

Si impone la condizione F(π)=0 e si ricava C

#21: F(π) = 0

#22: c – π = 0

#23: SOLVE(c – π = 0, c, Real)

#24: c = π

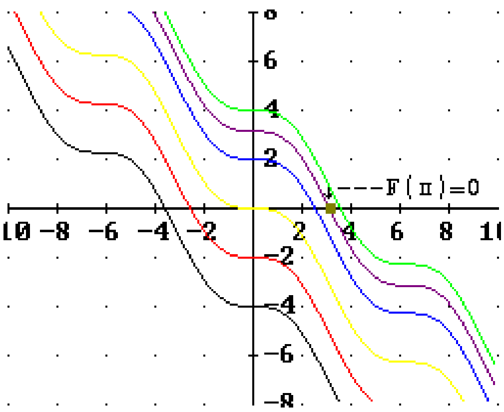
La primitiva richiesta è la funzione
F(x)=sin(x)−x+π

Rappresentazione grafica; sul grafico sono rappresentate alcune primitive (per c=−4,−2,0,2,4) e la primitiva tale che F(π)=0

#25: SIN(x) – x + π

#26: VECTOR(F(x), c, -4, 4, 2)

#27: [π, 0]



Esempio 5 – Primitiva e derivata

Introdurre la funzione x/(x+1) e calcolare la derivata

#28: $\dfrac{x}{x + 1}$

#29: $\dfrac{d}{dx} \dfrac{x}{x + 1}$

#30: $\dfrac{1}{(x + 1)^2}$

Selezionare questo risultato e calcolare la primitiva (pulsante Calcola integrale>Indefinito)

#31: $\displaystyle\int \frac{1}{(x + 1)^2}\, dx$

#32: $-\dfrac{1}{x + 1}$

Questo risultato dovrebbe essere uguale alla funzione introdotta con l'espressione #28; infatti è la primitiva della derivata calcolata in precedenza.
Non si tratta di un errore: la differenza fra le due funzioni è una costante

#33: $\dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{-1}{x + 1}$

#34: 1

A volte il risultato della ricerca della primitiva calcolato con Derive può essere diverso da quello calcolato manualmente; per stabilire se si tratta di un errore nel calcolo manuale, verificare che i due risultati differiscano per una costante

Ripetere con la funzione ln(3x): la differenza fra le due primitive è ancora una costante

#35: $LN(3\cdot x)$

#36: $\dfrac{d}{dx} LN(3\cdot x)$

#37: $\dfrac{1}{x}$

#38: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx$

#39: $\ln(x)$

#40: $\ln(3\cdot x) - \ln(x)$

#41: $\ln(3)$

Attenzione: la primitiva di 1/x non è ln(x), ma ln(|x|)
Derive come al solito opera in campo complesso e non calcola la primitiva in modo corretto; la primitiva dovrebbe essere la funzione

#42: $\ln(|x|)$

e non la funzione #39

Esempio 6 – Un altro esempio con il logaritmo

#43: $$\frac{4}{(x - 1)\cdot(5 - x)}$$

#44: $$\int \frac{4}{(x - 1)\cdot(5 - x)}\, dx$$

#45: $$-\ln\left(\frac{x - 5}{x - 1}\right)$$

La primitiva corretta è la seguente (con il valore assoluto)

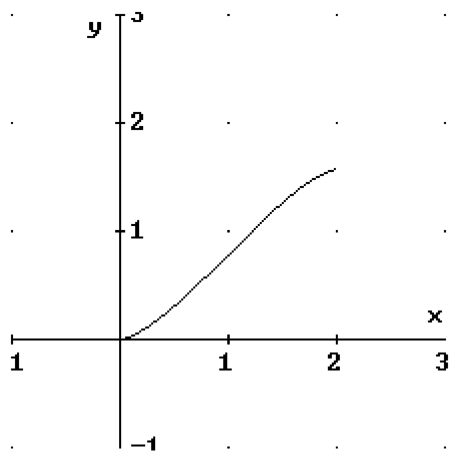
#46: $$\ln\left(\left|\frac{x - 1}{x - 5}\right|\right)$$

Esempio 7 – Studio della funzione integrale

Definire la funzione con Dichiara>Definisci funzione; nel campo Definizione scrivere l'espressione
INT(√(t(2–t)),t,0,x)

#47: $$f(x) := \int_0^x \sqrt{t\cdot(2 - t)}\, dt$$

Per disegnare il grafico della funzione integrale selezionare f(x) nella #47



La funzione può essere studiata con i metodi dello studio di funzione
Il dominio della funzione integrale è l'intervallo [0,2] in cui risulta definita la funzione integranda
La funzione integranda è non negativa nel dominio, perciò la funzione integrale è anch'essa non negativa e crescente (perchè?)
Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la derivata f'(x) è uguale a √(x(2−x)); si può verificare con Derive

#48: $\frac{d}{dx} f(x)$

#49: $\sqrt{(x\cdot(2-x))}$

La derivata prima si annulla solo agli estremi del dominio, perciò non ci sono massimi e minimi relativi interni
La derivata seconda è

#50: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$

#51: $\frac{1-x}{\sqrt{(x\cdot(2-x))}}$

La derivata seconda si annulla in x=1, dove c'è un flesso
I risultati trovati con lo studio di funzione trovano conferma nel grafico tracciato con Derive

Integrali definiti e area

Esempio 8 – Calcolo di integrali definiti

Calcolare l'integrale definito fra 0 e 1 della funzione
f(x):=1/√(1+x)

#52: $f(x) := \frac{1}{\sqrt{(1+x)}}$

Selezionare la funzione, aprire il menu Calcola>Integrale>Definito, inserire gli estremi di integrazione e premere Semplifica

#53: $\int_0^1 f(x)\, dx$

#54: $2\cdot\sqrt{2} - 2$

Calcolare l'integrale definito fra 0 e 2 della funzione
f(x):=ln(x^2+1)

#55: $f(x) := LN(x^2 + 1)$

#56: $\int_0^2 f(x)\, dx$

#57: $$2\cdot \mathrm{ATAN}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\cdot \mathrm{LN}(5) + \frac{\pi}{2} - 4$$

Si ottiene la soluzione esatta (integrazione simbolica); per ottenere il valore approssimato, selezionare il risultato e usare il menu Semplifica>Approssima

#58: $$1.43317326$$

Calcolare l'integrale definito fra π e 2π della funzione

f(x):=x^2*cos(x)

#59: $f(x) := x^2 \cdot \mathrm{COS}(x)$

#60: $$\int_{\pi}^{2\cdot\pi} f(x)\,dx$$

#61: $$6\cdot\pi$$

Calcolare il valore approssimato con Semplifica>Approssima

#62: $$18.84955592$$

Esempio 9 – Integrale definito e area

Per studiare la relazione tra il risultato dell'integrale definito (#61) e l'area della regione di piano limitata dalla curva

f(x)=x^2*cos(x)

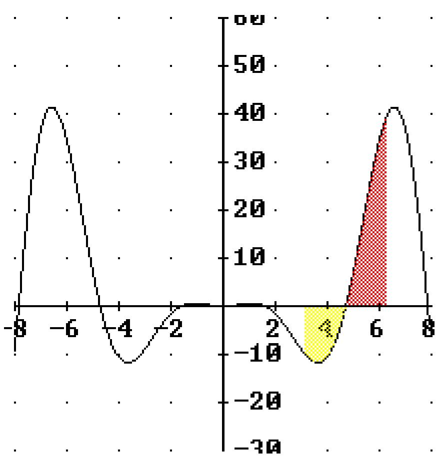
nell'intervallo (π,2π) si può usare la funzione PLOTINT

PLOTINT(f(x),x,a,b) traccia l'area associata all'integrale definito della funzione f(x) nell'intervallo (a,b), con a<b. Affinchè PLOTINT funzioni, nella Finestra grafica 2D bisogna che sia attiva l'opzione Semplifica prima di tracciare il grafico (menu Opzioni). Se il comando Opzioni>Cambia colore dei grafici è attivato, allora la parte positiva dell'integrale viene tracciata con un colore, e quella negativa con un colore diverso.

Inserire l'espressione #64, selezionare e tracciare il grafico

#63: $f(x) := x^2 \cdot \mathrm{COS}(x)$

#64: $\mathrm{PlotInt}(f(x),\ x,\ \pi,\ 2\cdot\pi)$



Poichè la funzione non assume sempre valori positivi nell'intervallo di integrazione, l'integrale definito e l'area non sono uguali
Si osserva che la funzione ha uno zero nell'intervallo di integrazione; per calcolare l'area prima si trova lo zero, poi si spezza l'intervallo di integrazione nei due intervalli a sinistra e a destra dello zero e si calcolano separatamente i due integrali definiti; infine si sommano i valori assoluti dei due integrali definiti e si ottiene l'area rappresentata in figura
Calcolo dello zero (lo zero che interessa è x=3π/2)

#65: **SOLVE(f(x), x, Real)**

#66: $$x = \frac{3\cdot\pi}{2} \lor x = -\frac{\pi}{2} \lor x = \frac{\pi}{2} \lor x = 0$$

Calcolo dei due integrali definiti
Integrale fra π e 3π/2

#67: $$\int_{\pi}^{3\cdot\pi/2} f(x)\, dx$$

#68: $$-\frac{9\cdot\pi^2 - 8\cdot\pi - 8}{4}$$

Integrale fra 3π/2 e 2π

#69: $$\int_{3\cdot\pi/2}^{2\cdot\pi} f(x)\, dx$$

#70: $$\frac{9\cdot\pi^2 + 16\cdot\pi - 8}{4}$$

L'integrale definito (già calcolato nell'esempio precedente) vale

#71: $$\int_{\pi}^{2\cdot\pi} f(x)\, dx$$

#72: $$6\cdot\pi$$

Per trovare l'area (colorata nella figura) sommare i valori assoluti dei risultati #68 e #70 e premere Crea e approssima

#73: $$\left|-\frac{9\cdot\pi^2 - 8\cdot\pi - 8}{4}\right| + \left|\frac{9\cdot\pi^2 + 16\cdot\pi - 8}{4}\right|$$

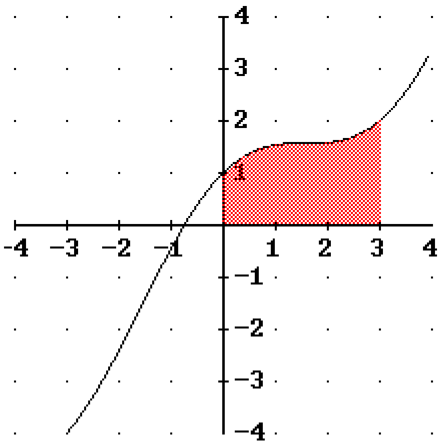
#74:
$$\frac{9\cdot\pi^2 + 4\cdot\pi - 8}{2}$$

#75: **46.69640511**

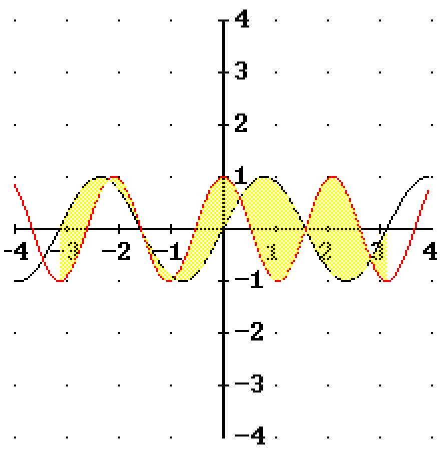
Esempio 10 – Area al di sotto di una curva, area fra due curve: grafici

La funzione
AREAUNDERCURVE(f(x),x,a,b)
traccia l'area sotto al grafico della funzione y = f(x) e sopra all' asse x, nell'intervallo (a,b), con a<b.
Ad esempio, per tracciare l'area sotto alla funzione f(x)=x+cos(x) nell'intervallo (0,3), tracciare l'espressione #76
La funzione
AREABETWEENCURVES(f(x),g(x),x,a,b)
traccia l'area compresa tra i grafici delle due funzioni f(x) e g(x) nell'intervallo (a,b), con a<b.
Ad esempio, per tracciare l'area compresa tra f(x)=sin(2x) e g(x)=cos(3x) nell'intervallo x da –π a π, tracciare l'espressione #77

#76: AreaUnderCurve(x + COS(x), x, 0, 3)



#77: AreaBetweenCurves(SIN(2·x), COS(3·x), x, -π, π)

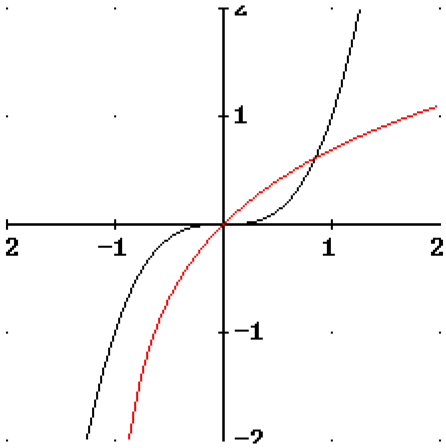


Esempio 11 – Calcolo dell'area compresa fra due curve

Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle due curve di equazione f(x):=x^3 e g(x):=ln(x+1) nell'intervallo delimitato dai due punti di intersezione fra le curve

#78: $f(x) := x^3$

#79: $g(x) := LN(x + 1)$



Per poter calcolare l'area è necessario stabilire la posizione delle due curve (quale ha ordinate maggiori rispetto all'altra); un grafico può essere di aiuto

Dal grafico si deduce che la curva ln(x+1) ha ordinata maggiore di x^3 nell'intervallo fra i due punti di intersezione

Calcolo delle ascisse dei punti di intersezione

#80: $f(x) = g(x)$

#81: NSOLVE(f(x) = g(x), x)

#82: $x = 0$

Derive trova un solo punto di intersezione; per trovare anche il secondo si usa la funzione NSOLVE nella forma #83, dove 0.5 e 1 sono gli estremi di un intervallo che contiene il punto x da approssimare

#83: NSOLVE(f(x) = g(x), x, 0.5, 1)

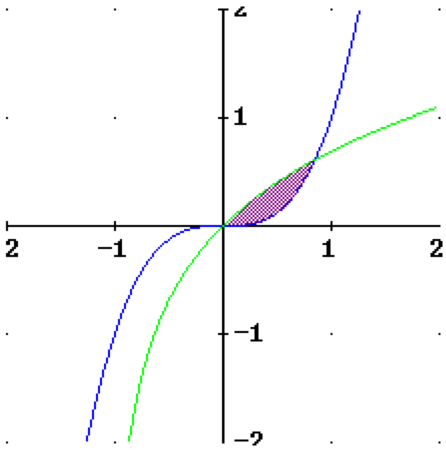
#84: $x = 0.8506512119$

#85: $$\int_0^{0.8506512119} (g(x) - f(x))\, dx$$

#86: 0.1575922152

Grafico dell'area

#87: AreaBetweenCurves(f(x), g(x), x, 0, 0.8506512119)



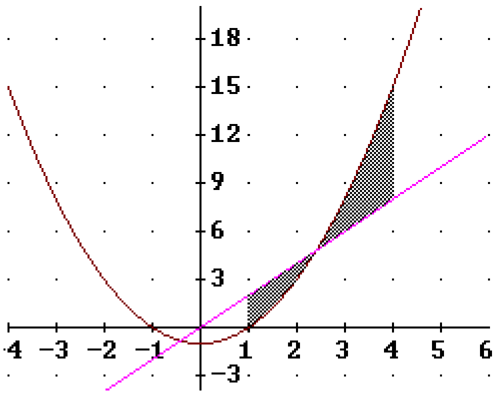
Esempio 12 – Calcolo dell'area compresa fra due curve

Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle due curve di equazione f(x):=x^2−4x+5 e g(x):=2x nell'intervallo [0,4]

#88: $f(x) := x^2 - 1$

#89: $g(x) := 2 \cdot x$

#90: AreaBetweenCurves(f(x), g(x), x, 1, 4)



Calcolo del punto di intersezione fra le due curve (la soluzione cercata è la seconda)

#91: SOLVE(f(x) = g(x), x)

#92: $x = 1 - \sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} + 1$

L'area deve essere spezzata in due parti

#93: $\displaystyle\int_{1}^{1+\sqrt{2}} (g(x) - f(x))\, dx + \int_{1+\sqrt{2}}^{4} (f(x) - g(x))\, dx$

#94: $\dfrac{8 \cdot \sqrt{2}}{3} + 3$

Esempio 13 – Integrali di funzioni razionali

Derive è in grado di calcolare integrali di funzioni razionali (attenzione al caso del logaritmo)

Per ragioni didattiche può essere utile ricavare prima lo sviluppo in fratti semplici (che è sempre noioso da calcolare e fonte di errori di calcolo); per ottenerlo, dopo aver introdotto la funzione, usare il menu Semplifica>Sviluppa>Razionale (default)

Caso del denominatore con zeri reali e distinti

#95: $$\frac{x - 1}{2\cdot x^2 + 5\cdot x + 3}$$

Calcolo dell'integrale con Derive: si noti che nel risultato non compaiono i valori assoluti degli argomenti!

#96: $$\int \frac{x - 1}{2\cdot x^2 + 5\cdot x + 3}\, dx$$

#97: $$\frac{5\cdot LN(2\cdot x + 3)}{2} - 2\cdot LN(x + 1)$$

Sviluppo in fratti semplici: selezionare l'espressione della funzione e usare Semplifica>Sviluppa>Razionale

#98: $$\frac{5}{2\cdot x + 3} - \frac{2}{x + 1}$$

Caso del denominatore con zeri reali di cui due coincidenti

#99: $$\frac{x^4 + 3\cdot x + 1}{x^3 - 3\cdot x^2 + 4}$$

Integrale con Derive (il logaritmo...)

#100: $$\int \frac{x^4 + 3\cdot x + 1}{x^3 - 3\cdot x^2 + 4}\, dx$$

#101: $$\frac{82\cdot LN(x - 2)}{9} - \frac{LN(x + 1)}{9} - \frac{23}{3\cdot(x - 2)} + \frac{x^2}{2} + 3\cdot x$$

Sviluppo in fratti semplici

#102: $$\frac{23}{3\cdot(x - 2)^2} + \frac{82}{9\cdot(x - 2)} - \frac{1}{9\cdot(x + 1)} + x + 3$$

Caso del denominatore con zeri complessi coniugati

#103: $$\frac{x + 2}{x^3 - 2\cdot x^2 + 3\cdot x - 6}$$

Integrale con Derive (il logaritmo...)

#104: $$\int \frac{x + 2}{x^3 - 2\cdot x^2 + 3\cdot x - 6}\, dx$$

Sviluppo in fratti semplici

#105: $$-\frac{4\cdot x}{7\cdot(x^2 + 3)} - \frac{1}{7\cdot(x^2 + 3)} + \frac{4}{7\cdot(x - 2)}$$

#106: $$-\frac{\sqrt{3}\cdot \mathrm{ATAN}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot x}{3}\right)}{21} - \frac{2\cdot \mathrm{LN}(x^2 + 3)}{7} + \frac{4\cdot \mathrm{LN}(x - 2)}{7}$$

Funzioni non integrabili elementarmente

Esempio 14 – Calcolo approssimato dell'integrale definito di una funzione non integrabile elementarmente

Calcolare l'integrale definito fra 0 e 2π della funzione
f(x)=exp(−x^2)
La funzione f(x)=exp(−x^2) è un esempio particolarmente importante di funzione non integrabile elementarmente (la distribuzione di probabilità gaussiana è definita per mezzo di questa funzione)

#107: $\mathrm{EXP}(-\ x^2)$

#108: $\int \mathrm{EXP}(-\ x^2)\ dx$

#109: $$\frac{\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{ERF}(x)}{2}$$

Il risultato è espresso con il simbolo ERF(x)
ERF(x) è l'integrale della distribuzione gaussiana da 0 a x
Si può ottenere un valore approssimato dell'integrale definito della funzione f(x)=exp(−x^2), tale valore viene calcolato con la formula di quadratura di Simpson

Calcolare l'integrale definito fra 0 e 2 della funzione f(x)
Selezionare la funzione (#107), introdurre l'integrale definito (#110), selezionare il risultato #111 e approssimare con Semplifica> Approssima

#110: $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{EXP}(-x^2)\,dx$

#111: $\dfrac{\sqrt{\pi}\cdot \mathrm{ERF}(2)}{2}$

#112: 0.8820813907

Questo è uno dei numerosi esempi di funzioni non integrabili elementarmente; per questo tipo di funzioni è sempre possibile trovare un valore approssimato di un integrale definito; il valore approssimato è calcolato con la formula di quadratura di Simpson

5. *Elenco di siti*

5.1 Matematica in rete

- http://mathforum.org/
  Il sito ha un motore di ricerca e un link Mathematics
  Il motore di ricerca
- http://mathforum.org/grepform.html
  Il link alla biblioteca virtuale (Mathematics)
- http://mathforum.org/library/

- http://www.univie.ac.at/future.media/moe/
  Sito dell'Università di Vienna. Una ricca raccolta di materiale su argomenti di matematica, con numerosi link ad altri siti

- http://www.cut-the-knot.org/content.shtml
  Un portale matematico molto ricco e interessante

- http://xahlee.org/PageTwo_dir/MathPrograms_dir/mathPrograms.html
  Raccolta e recensione dei migliori software matematici disponibili: immagini, link

- http://mathworld.wolfram.com/
  Un sito molto ricco: una specie di enciclopedia della matematica, suddivisa per argomenti; non riguarda Derive, ma il software Matematica; può fornire molto materiale interessante.
  Questo sito è parte di un più ampio sito dedicato alle scienze, all'indirizzo
- http://www.treasure-troves.com/

- http://directory.google.com/Top/Science/Math/
  La directory di Google dedicata alla matematica: raccolta molto ricca di link

- http://dir.yahoo.com/Science/Mathematics/
  La directory di Yahoo dedicata alla matematica

- http://guide.supereva.it/matematica_risorse_in_rete/matematica_risorse_in_rete_11_/
  La directory matematica di Supereva

- http://www.math.temple.edu/~cow/
  Bella raccolta di esercizi da svolgersi on-line, suddivisi per argomenti: da visitare!

- http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/
  Un'altra raccolta simile alla precedente

- http://www.math.it/bookmark.htm
  Una raccolta di link matematici e non, in italiano: c'è di tutto, cose valide e spam, tutto sulla scuola.

5.2 Derive in rete

- http://www.acdca.ac.at
  Il sito dell'Austrian Center for Didactics of Computer Algebra
  L'Austria è una nazione all'avanguardia nelle sperimentazioni scolastiche sull'uso dei CAS (Computer Algebra Systems). Nell'ambito del sito precedente si trovano i seguenti link interessanti
- http://www.acdca.ac.at/links/index.htm
  Un ricco elenco di indirizzi e link a siti matematici su vari argomenti. Cliccando su
- DERIVE-relevante Literatur
  si trova un lungo elenco di libri e pubblicazioni su Derive (non molto aggiornato), molti in tedesco, alcuni disponibili in rete
- http://www.acdca.ac.at/t3/dergroup/index.htm
  La home page dell'International Derive User Group. Qui è possibile abbonarsi alla rivista DNL (Derive Newsletter), e scaricare i file descritti negli articoli

- http://www.can.nl/
  Il sito dell'associazione Computer Algebra Nederland
  Nell'ambito del sito precedente si trova
- http://www.can.nl/systems_and_packages/systems_and_packages.html
  Il Computer Algebra Information Network dà informazioni sui software matematici e le loro applicazioni. In particolare si trova materiale su Derive (purtroppo non aggiornato)

- http://b.kutzler.com/main.asp
  Il sito personale di Bernhard Kutzler

- http://www.mediadirect.it
  Il sito del distributore italiano di Derive.
  Nella pagina di Derive (cliccare sul logo di Derive) molte informazioni, downloads di una versione demo e degli aggiornamenti, articoli, ecc

- www.derive.com
  Il sito di Derive (Texas Instruments)

- http://www.derive-europe.com
  Il sito europeo di Derive

- http://www.chartwellyorke.com
  Il sito di un distributore inglese: materiale, ricco elenco di libri sull'argomento in inglese.

- http://www.jiscmail.ac.uk/lists/derive-news.html
- http://www.jiscmail.ac.uk/
  Mailing list libere

- http://www.dm.unito.it/quadernididattici/2001d.html
  Il sito da cui si può scaricare questo quaderno

- http://www.ciram.unibo.it/~barozzi/Net_Elenco_schede.html
  Una collezione di schede di lavoro in parte basate su Derive (purtroppo non aggiornate alla versione 5, ma con molti spunti didattici interessanti)

- http://www.ciram.unibo.it/~barozzi/www_did.html
  Un elenco di siti per la didattica della matematica, ricco ma non aggiornato

- http://www.cms.livjm.ac.uk/deriveprogramming/
  Un bel sito sulla programmazione in ambiente Derive con link, materiale, liste di funzioni della programmazione con esempi, help, ecc.

- http://www.matematicamente.it/derive/
  Esempi e file con Derive; questo sito è parte del sito seguente, in cui si trova anche molto altro
- http://www.matematicamente.it/

- http://www.cartesionline.it/html/home.html
  Materiale vario sulle calcolatrici

- http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto/
  Risorse in rete per l’area matematica. In particolare all’indirizzo
- http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto/eccellenza/pagina2.htm
  Matematica e software didattici (materiali relativi alle attività dell'anno 2000). Da questa pagina è possibile scaricare esercizi e soluzioni

- http://www.provincia.parma.it/~ssrondan/coniche/parabola/esercita.htm
  Esercitazioni con Derive: molti esercizi, interessante

- http://www.irrsae.lazio.it/matema/
  Sito con numerosi link utili

- http://www.cpdm.unina.it/corsi-online/deriveweb/home.htm
  Un bel sito: materiale per l’apprendimento, schede, esercizi.

- http://www.provincia.milano.it/scuole/vittorioveneto/files/guida_derive.pdf
  Breve tutorial per usare Derive

5.3 Articoli in rete

- http://matematica.uni-bocconi.it/derive/DERIVE5g.htm
  L’articolo di S. Cappuccio citato nella bibliografia

- http://www.bdp.it/~tnir0006/convegni/1999/irst_iprase/materiale/relazioni/dorigotti.doc
  L’articolo di G. Dorigotti citato nella bibliografia

- http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/garetto/sis/2001/Nav_Mat.pdf
  Il quaderno citato nella bibliografia, con l’elenco di siti matematici divisi per argomento, motori di ricerca, browser, software

Bibliografia

Manuali

- Derive 5, *L'assistente di Matematica per il tuo PC, Guida di riferimento*, Texas Instruments, 2000

Libri

- *Presentazione del Progetto Labclass* , Quaderno n° 44 del M.P.I, 2001
- Arney D.C., *Exploring Calculus with Derive*, Addison Wesley Pub. Comp., 1991
- Bacchelli B., Lorenzi A, Perotti A., *Analisi Matematica con Derive*, McGraw-Hill Italia, 1992
- Boieri P., *Laboratorio informatico per la Matematica*, Loescher, 2003
- Di Stefano C., *Derive, Matematica in laboratorio*, A, Ghisetti e Corvi, 2000
- Di Stefano C., *Derive, Matematica in laboratorio*, B, Ghisetti e Corvi, 2002
- Kutzler B., *Risoluzione di Sistemi di Equazioni Lineari con Derive per Windows*, Bk Teachware Series "Support in Learning"n. SL-06 1998, ed. it. Media Direct
- Kutzler B., *Risoluzione di Equazioni Lineari con Derive per Windows*, Bk Teachware Series "Support in Learning" n. SL-05, 1998, ed. it. Media Direct
- Kutzler B, Kokol-Voljc, *Introduzione a Derive 5*, Ti Explorations Software, Texas Instruments, ed. it. Media Direct, 2000
- Lolli G., *Il riso di Talete*, Bollati Boringhieri, Torino, 1998
- Miele A., Benaglia L.M., *Matematica con Derive, 1. Dagli insiemi all'iperbole*, RCS Scuola Etas, 2000
- Miele A., Benaglia L.M., *Matematica con Derive, 1. Dal calcolo matriciale alle equazioni differenziali* , RCS Scuola Etas, 2000
- Russo L., *Segmenti e Bastoncini*, Feltrinelli, 1998

Riviste e articoli in rete

- Arzarello F., Ciarrapico L., *Presentazione del Progetto Labclass* , Quaderno n° 44 del M.P.I, 2001
- Boieri P., *I grafici "sbagliati" di DERIVE*, Archimede, 1996,4,197-207
- Bowers D., *Review of Derive 5*, articolo in rete all'indirizzo www.derive.com
- Costanzo M., Garetto M., *Navigando nella matematica. Laboratorio S.I.S. 2000/2001*, Quaderni Didattici del Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino, Quaderno n° 1, Maggio 2001
- Dorigotti G., *Matematica e informatica nel triennio amministrativo*, 1999, articolo in rete all'indirizzo
http://www.bdp.it/~tnir0006/convegni/1999/irst_iprase/materiale/relazioni/dorigotti.doc
- Herget W., Heugl H., Kutzler B., Lehman E. *Abilità di calcolo manuale indispensabili in un ambiente CAS*, articolo in rete all'indirizzo www.campustore.it

- Cappuccio S., *DERIVE Versione 5*, La matematica e la sua didattica, ed. Pitagora, Bologna, 3, 2001, articolo in rete, all'indirizzo http://matematica.uni-bocconi.it/derive/DERIVE5g.htm
- Pezzini P.L., Garetto M., *Tecnologie per la didattica: Cabri*. *Laboratorio S.I.S. 2002/2003*, Quaderni Didattici del Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino, Quaderno n° 22, Ottobre 2003
- Ruhal Floris, *Valutare le conoscenze matematiche teoriche degli allievi in un corso di analisi fatto usando la tecnologia simbolica*, Ipotesi n° 1/2002
- Trouche L., *Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse, IREM de Montpellier