
Formula di Grassmann

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Teorema 1 Se V, W sono due sottospazi di uno spazio vettoriale E finito-dimensionale su un campo $\mathbb{K}$, si ha:

$$\dim V + \dim W = \dim (V + W) + \dim (V \cap W) \quad (1)$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\dim (V \cap W) = m$$

Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ una base di $V \cap W$. Per il [corollario al teorema di completamento della base](#):

$$V \cap W \subseteq V \implies \exists \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m'}\} \text{ base di } V$$

$$V \cap W \subseteq W \implies \exists \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{m''}\} \text{ base di } W,$$

essendo $m + m' = \dim V$, $m + m'' = \dim W$.

Posto $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m'}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{m''}\}$ è manifestamente $V + W = \mathcal{L}(\Sigma)$, essendo $\Sigma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m'}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{m''}\}$. Dimostriamo che Σ è una base di $V + W$. A tale scopo consideriamo la relazione vettoriale:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m'} \mu_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{m''} \nu_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \quad (2)$$

Da cui:

$$\sum_{i=1}^{m'} \mu_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^m (-\lambda_i) \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m''} (-\nu_i) \mathbf{w}_i$$

È chiaro che $\sum_{i=1}^{m'} \mu_i \mathbf{u}_i \in V \cap W$, per cui $\exists \beta_i \in \mathbb{K} \mid \sum_{i=1}^{m'} \mu_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{v}_i$

Quindi:

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m'} (-\mu_i) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

Ma $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m'}\}$ è linearmente indipendente, quindi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m'} (-\mu_i) \mathbf{u}_i = \mathbf{0} &\implies \beta_1 = \dots = \beta_m = -\mu_1 = \dots = -\mu_{m'} = 0 \\ &\implies \mu_1 = \dots = \mu_{m'} = 0 \end{aligned}$$

La (2) diventa:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m''} \nu_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}$$

Ma $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{m''}\}$ è linearmente indipendente, quindi:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m''} \nu_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = \nu_1 = \dots = \nu_{m''} = 0$$

Ne concludiamo che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m'}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{m''}\}$ è linearmente indipendente.

Abbiamo così dimostrato che Σ è una base di $V + W$. Siamo ora in grado di calcolare la dimensione di $V + W$:

$$\dim(V + W) = m + m' + m'' = \underbrace{(m + m')}_{=\dim V} + \underbrace{(m + m'')}_{=\dim W} = \underbrace{m}_{=\dim(V \cap W)},$$

donde l'asserto. ■