# La densità degli zeri della funzione zeta di Riemann

**Marcello Colozzo**

Nel file precedente abbiamo introdotto la nozione di *punti di Gram* lungo la linea critica della funzione zeta di Riemann. Cerchiamo ora di estendere tale definizione alla semistriscia critica $\Sigma = [0,1] \times [0,+\infty)$, rammentando che non ci sono zeri su $\partial\Sigma$. Abbiamo poi tenuto conto della simmetria della distribuzione degli zeri rispetto all'asse reale, da qui la scelta dell'intervallo $[0,+\infty)$ anziché $(-\infty,+\infty)$.

**Definition 1** *Dicesi* **punto di Gram di ordine** $N \in \mathbb{N} - \{0\}$*, il punto*

$$G_N\left(\frac{1}{2}, g_N\right) \in \Sigma$$

*tale che esistono $N$ zeri non banali nel dominio rettangolare $D_N = [0,1] \times [0,g_N]$, come illustrato in fig. .*

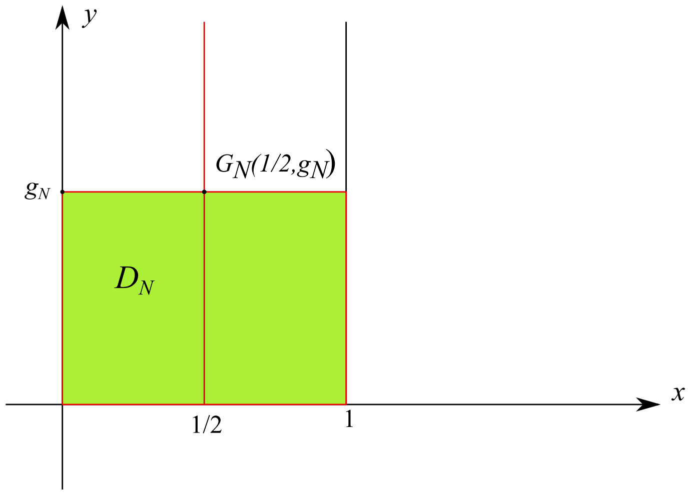


Figura 1: L'*N-esimo* punto di Gram ci dice che nel dominio $D_N$ cadono $N$ zeri non banali.

Come è noto, l'insieme $H$ degli zeri è infinito numerabile, per cui risulta discreto il seguente insieme

$$H_N \overset{def}{=} \{\rho \in D_N \mid \zeta(\rho) = 0\} \tag{1}$$

Definiamo una *densità degli zeri* nel senso delle distribuzioni:

$$\sigma(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \delta(x - x_k)\,\delta(x - y_k),$$

dove $\delta$ denota la delta di Dirac, mentre $x_k$, $y_k$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del *k-esimo* zero. Segue per definizione di densità:

$$N = \iint_{D_N} \sigma(x,y)\,dxdy \tag{2}$$

Infatti, per una nota proprietà della funzione delta:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{N} \iint_{D_N} \delta(x - x_k)\,\delta(x - y_k)\,dxdy \\ &= \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\iint_{\mathbb{R}^2} \delta(x - x_k)\,\delta(x - y_k)\,dxdy}_{=1} \end{aligned}$$

Cioè l'identità $N = N$.