Gioco del Caos

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Siano V_1, V_2 e V_3 i vertici di un triangolo equilatero. Senza perdita di generalità, poniamo:

$$V_1\left(0,0\right), \ V_2\left(1,0\right), \ V_3\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

avendo introdotto un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Preso ad arbitrio un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$, consideriamo il segmento P_0V_k, con $k \in \{1,2,3\}$, e denotiamo con P_1 il suo punto medio. Se $h \in \{1,2,3\}$, indichiamo con P_2 il punto medio del segmento PV_h, come illustrato in fig. 1.

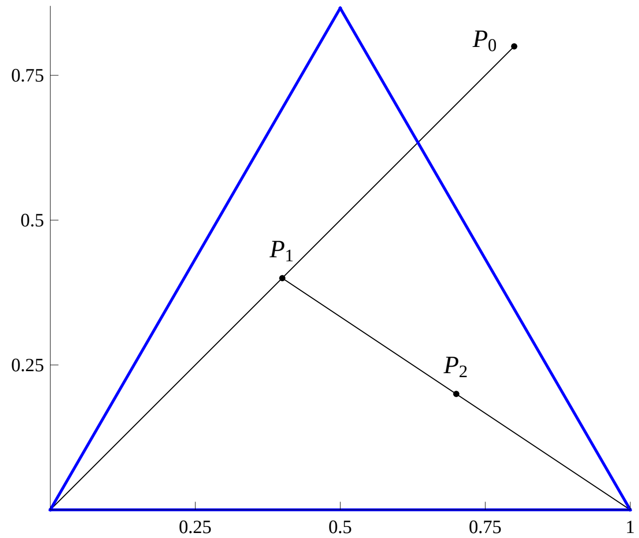

Figure 1: In questa sequenza abbiamo assunto come punto iniziale $P_0\left(0.75,0.81\right)$, prendendo poi come vertice $V_1\left(0,0\right)$, onde il punto successivo P_1 è il punto medio di P_0V_1. Il vertice successivo è V_2, per cui viene individuato il punto P_2.

L'iterazione del procedimento genera la sequenza di punti:

$$P_0, P_1, P_2, ..., P_n, \tag{1}$$

e quindi il luogo geometrico:

$$S_n = \{P_0, P_1, ..., P_n\} \tag{2}$$

Si tratta di un processo casuale, poichè è assegnato solo il punto iniziale P_0, mentre la scelta dei vertici è casuale. Ad esempio, dopo $n = 100$ iterazioni, il luogo S_n è riportato in fig. 2, da cui notiamo una certa regolarità.

Proviamo ad aumentare n, ad esempio $n = 2000$ (fig. 3).

Dalla fig. 3 riconosciamo il *triangolo di Sierpinski*. Quindi, indicato con Σ il triangolo di Sierpinski, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \Sigma$$

Tale risultato giustifica la denominazione *gioco del caos*, giacchè si tratta di un processo caotico che ha per attrattore il *triangolo di Sierpinski*.

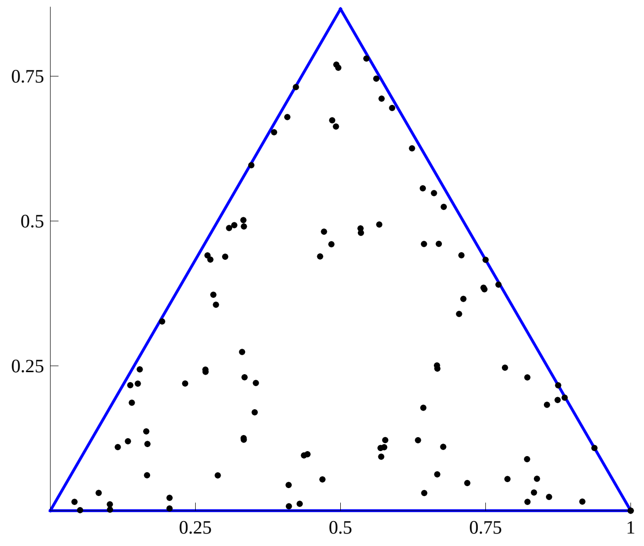

Figure 2: Il luogo geometrico $S_{100} = \{P_0, ..., P_{100}\}$.

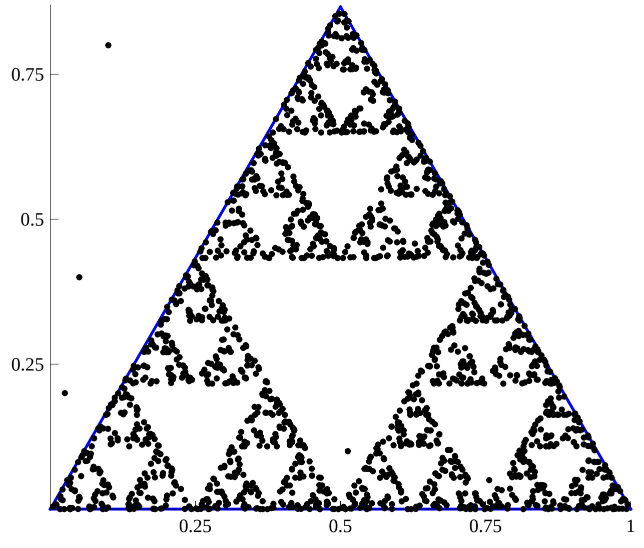

Figure 3: Il luogo geometrico $S_{2000} = \{P_0, ..., P_{2000}\}$.