Stati ghost

Marcello Colozzo (http://www.extrabyte.info)

Supponiamo di avere una particella di massa m quale sistema quantistico unidimensionale sottoposto a un campo di forze di energia potenziale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } |x| \geq a, \\ 0, & \text{se } |x| < a \end{cases}, \quad (a > 0) \tag{1}$$

Si noti che tale funzione non esiste nel senso ordinario del termine. Tuttavia, il potenziale in oggetto schematizza molto bene una barriera riflettente: si pensi ad una pallina (nel senso della meccanica classica) che rimbalza elasticamente. Per risolvere l'equazione agli autovalori per l'hamiltoniano di tale sistema, si dovrà imporre:

$$u(x) = 0, \quad \forall x \notin [-a, a]$$

Inoltre per una nota proprietà delle autofunzioni dell'energia di un sistema unidimensionale, dalla parità del potenziale $V(x)$, segue che le predette autofunzioni hanno parità definita, per cui è sufficiente studiare l'andamento delle soluzioni nella regione $x \geq 0$. Si perviene ad un andamento del tipo di quello riportato in fig. 1, da cui vediamo che la probabilità di trovare la particella in $x > a$ è identicamente nulla.

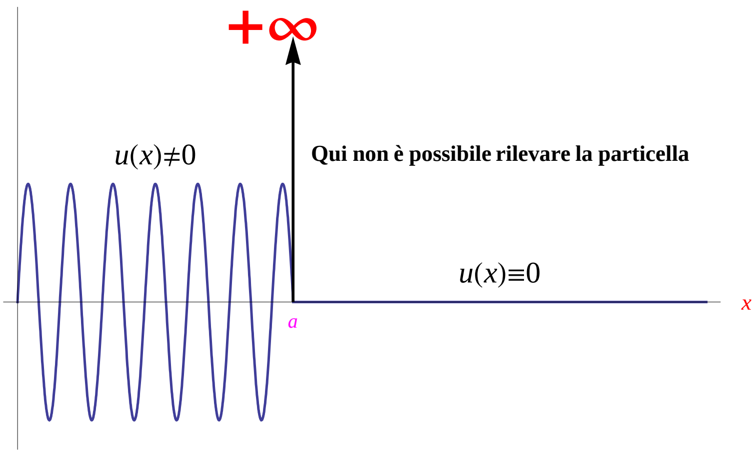

Figura 1: La particella non può trovarsi in $x > a$.

Supponiamo ora di avere un potenziale divergente positivamente all'infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = +\infty \tag{2}$$

Anche in questo caso, abbiamo solo stati legati. Senza perdita di generalità, possiamo suppore $V(x)$ funzione pari, cosicché avremo stati legati a parità definita i.e. possono essere studiati solo nella regione $x \geq 0$. Per la generica autofunzione $u(x)$ ci aspettiamo un comportamento del tipo di quello graficato in fig. 2.

La generica funzione d'onda della particella è una combinazione lineare di autofunzioni dell'hamiltoniano:

$$\psi(x) = \sum_n c_n u_n(x),$$

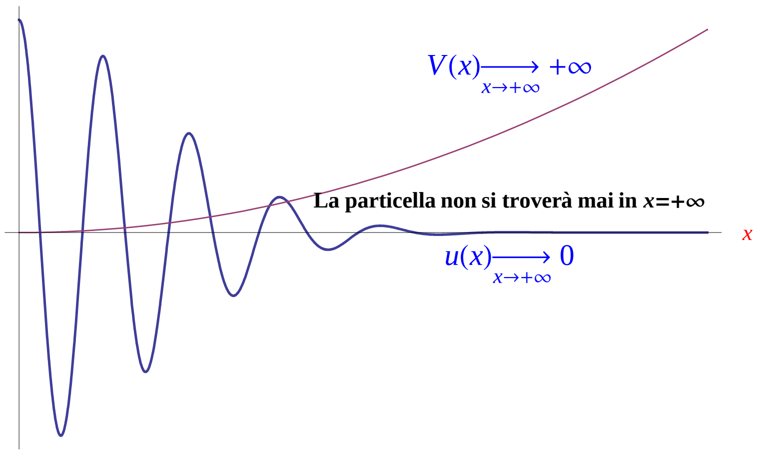

Figura 2: La particella può trovarsi $x \in (0, +\infty)$. Tuttavia, la probabilità si annulla per $x \to +\infty$.

giacché $\{u_n(x)\}$ è un sistema ortonormale completo nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ e ψ è un elemento di tale spazio funzionale. Tuttavia, per quanto visto in precedenza, esistono elementi del predetto spazio che non si annullano all'infinito, come ad esempio:

$$\psi(x) = N\sqrt{|x|\, e^{-|x|\sin^2 x}},$$

essendo $N > 0$ una costante di normalizzazione. L'andamento di tale funzione è riportato in fig. **??**.

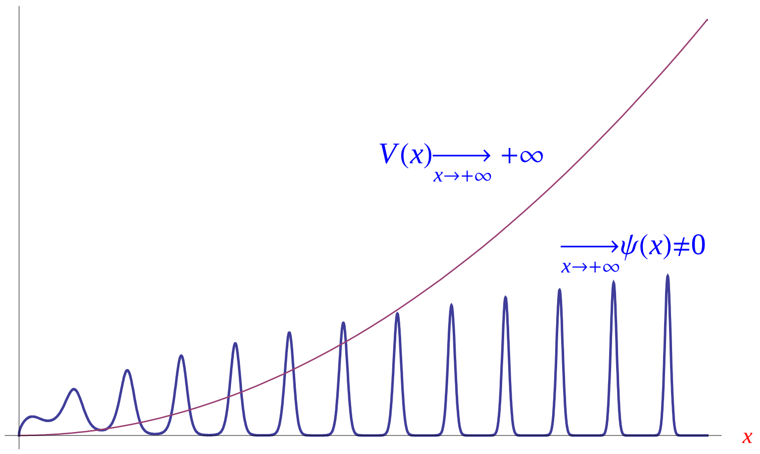

Figura 3: La particella può essere rilevata a $x = +\infty$.