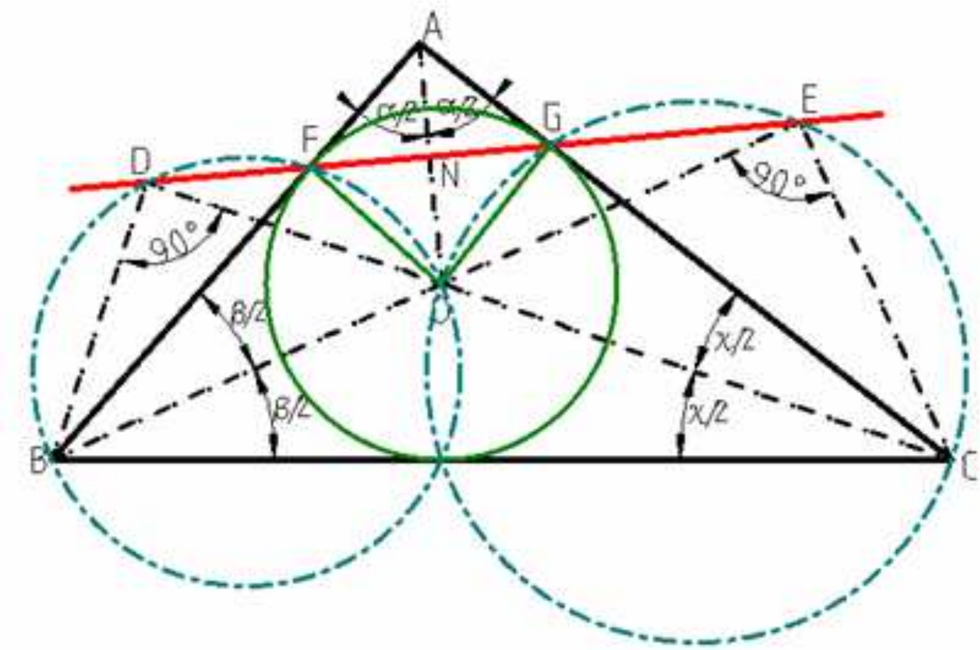
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Esercizi svolti di Geometria

Ing. Giorgio Bertucelli



Indice

1 Esercizi svolti

Esercizio 1 *Date due rette a e b che si intersecano fuori dal foglio, tracciare per un dato punto X una retta che intersechi le rette date nello stesso punto inaccessibile.*

Soluzione

Seguire le figure 1-2 per procedere nella costruzione. I colori saranno sufficienti per fornire il percorso della soluzione grafica.

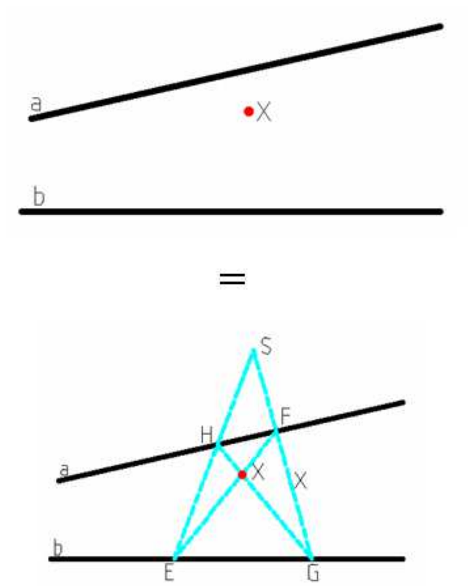


Figura 1: Esercizio 1.

Tracciare per X due segmenti arbitrari EF e GH. Quindi tracciare due segmenti EH e GF i cui prolungamenti si incontreranno in S. La retta cercata è la rossa passante per X e Y.

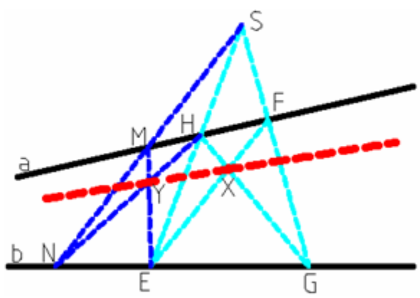


Figura 2: Esercizio 1.

Esercizio 2 *Costruzione grafica della retta polare p di un punto polare P.*

Soluzione

Data una conica, la intersechiamo con due rette a e b che partono da un generico punto P.

Seguendo i segmenti colorati, i punti di incontro e i punti di tangenza mostrati in figura 3 si giunge alla retta polare p del punto P.

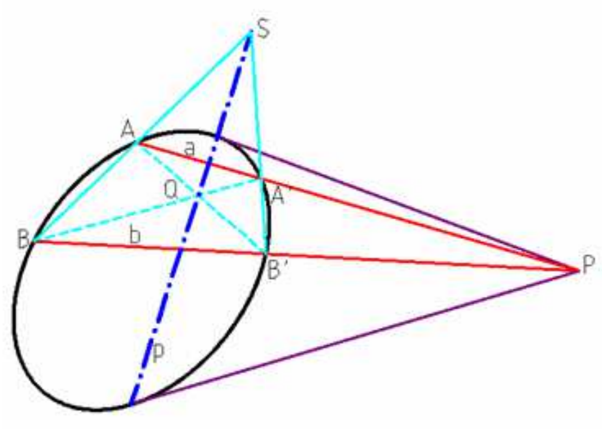


Figura 3: Esercizio 2.

Esercizio 3 *Costruzione grafica di gruppi armonici – Quadrangolo completo.*

Soluzione

Si dice **quadrangolo completo** la figura costituita da quattro punti – mai tre di essi allineati – chiamati vertici e dalle sei rette, chiamate lati, che congiungono coppie di vertici (fig. 4).

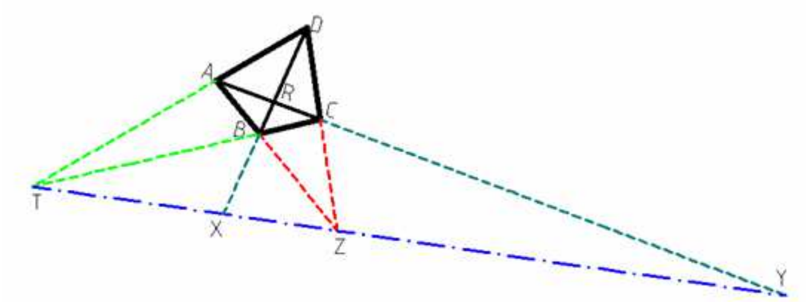


Figura 4: Esercizio 3.

Dalla Geometria Proiettiva ricordiamo le definizioni di **birapporto** e di **gruppo armonico**. Si definisce *birapporto* o *doppio rapporto* di $X = (x_1, x_2)$; $Y = (y_1, y_2)$; $Z = (z_1, z_2)$; $T = (t_1, t_2)$, considerati nell'ordine scritto $(XYZT)$, il punto $K = (k_1, k_2)$ che si indica con $K = (XYZT)$, così definito:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{y_1 z_2 - y_2 z_1} \cdot \frac{y_1 t_2 - y_2 t_1}{x_1 t_2 - x_2 t_1} \tag{1}$$

Se i punti sono indicati con coordinate non omogenee, si ha:

$$k = (xyzt) = \frac{x - z}{y - z} \cdot \frac{y - t}{x - t} \tag{2}$$

Condizione necessaria e sufficiente per evitare di avere $k_1 = k_2 = 0$ è che almeno tre dei quattro punti siano distinti. Se si ha

$$(xyz\infty) = \frac{x - z}{y - z}$$

il rapporto è **rapporto semplice**. Noto il rapporto k dalla (2) ricaviamo il valore del quarto elemento t. Infatti risolvendo in t si ha:

$$t = \frac{k\,(y-z)\,x - (x-z)\,y}{k\,(y-z) - (x-z)} \tag{3}$$

In particolare avremo per

$$k = \infty \Longrightarrow (xyzx) = \infty, \quad k = 0 \Longrightarrow (xyzx) = 0, \quad k = 1 \Longrightarrow (xyzx) = 1 \tag{4}$$

L'importanza del birapporto risiede nel fatto che è un invariante, cioè conserva il suo valore, quando nei suoi elementi si operi una trasformazione proeittiva. Con questa si è passati da $(xyzt)$ a $(x'y'z't')$ e scriveremo:

$$\frac{x'-z'}{y'-z'} \cdot \frac{y'-t'}{x'-t'} = \frac{x-z}{y-z} \cdot \frac{y-t}{x-t} \Longrightarrow k = (x'y'z't') = (xyzt) \tag{5}$$

Vediamo alcune proprietà del birapporto.

Il birapporto di quattro elementi non cambia se si scambiano tra loro due elementi qualsiasi e contemporaneamente si scambiano tra loro gli altri due elementi. Si ha:

$$(xyzt) = (yxtz) = (ztxy) = (tzyx) \tag{6}$$

Ciò implica che i possibili birapporti distinti che si possono ottenere con i quattro elementi x, y, z, t corrispondono ai sei ordinamenti aventi un dato elemento al primo posto e che si ottengono permutando tra loro i rimanenti tre. Si può verificare che posto $k = (xyzt)$ si ha:

$$(xyzt) = \frac{1}{k}, \quad (xzyt) = 1 - k \quad \text{e di conseguenza} \tag{7}$$

$$(xzty) = \frac{1}{1-k}, \quad (xtyz) = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}, \quad (xtzy) = \frac{k}{k-1} \tag{8}$$

Gruppi armonici

Una quaterna (x, y, z, t) si dice *armonica* se

$$(xyzt) = -1 \tag{9}$$

Si ha anche che una quaterna di elementi distinti è armonica se

$$(xyzt) = (xytz) \tag{10}$$

Dalle definizioni (9)-(10) si ha anche:

$$(xyzt) = (xytz) = (tzyx) = (tzxy) = (ztxy) = (ztyx) = -1 \tag{11}$$

Ciò mostra che l'armonicità di una quaterna riguarda le coppie (x, y) e (z, t) cioè è indifferente l'ordine degli elementi d una stessa coppia ed è indifferente anche l'ordine con cui si prendono le coppie. Ciò si esprime dicendo che *le due coppie si dividono armonicamente.* Un elemento si dice anche il *coniugato armonico* dell'altro elemento della stessa coppia rispetto alla coppia rimanente.

Esercizio 4 *(Costruzione grafica con sola riga)*
Siano dati il parallelogramma $ABCD$, la retta r e il punto P.
Tracciare la retta p parallela alla retta data r.

Soluzione
Si faccia riferimento alla fig. 5.

1. Si determinino sulla retta r i punti E, F, G, H, O prolungando lati e diagonale del parallelogramma.
2. Dal punto P si congiungano i punti G e H.
3. Dal punto O si traccia una retta qualunque per ottenere i punti K e L.
4. I segmenti $\overline{FK}$ e $\overline{EL}$ determineranno il punto Q.
5. La parallela p è definita dai due punti P e Q.

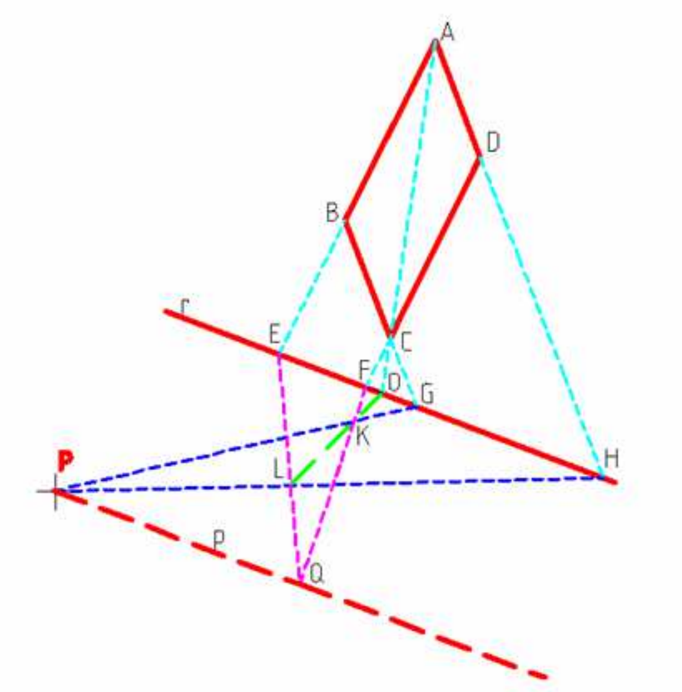


Figura 5: Esercizio 4.

Esercizio 5 *(Costruzione grafica con sola riga)*
Si voglia dividire in tre parti uguali il segmento AB.

Soluzione
Si faccia riferimento alla fig. 6.

1. Si traccino due segmenti qualunque r e s fino ad incrociarsi in C.
2. Si tracci una retta p qualunque parallela al segmento AB; questa intersecherà r e s in E e in F.

3. Si uniscano i punti A con F, e B con E; viene così determinato il punto O.

4. Dal punto C si tracci una retta che attraverso il punto O interseca il segmento AB in M.

5. Si unisca M con E e con F, così da ottenere i punti H e K.

6. Dal punto C si traccino per H e K due segmenti fino ad intersecare il segmento AB in P e Q.

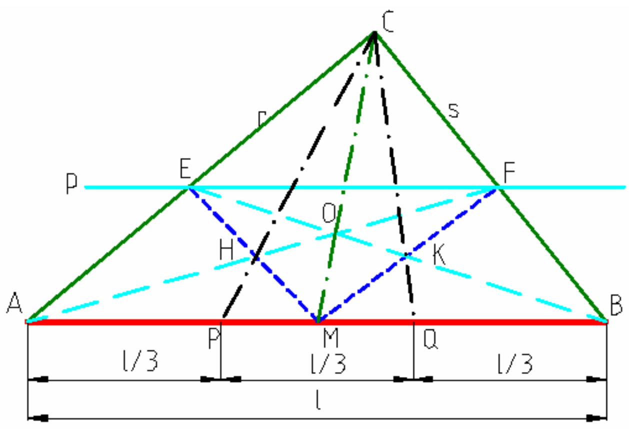


Figura 6: Esercizio 5.

Esercizio 6 *Dato un triangolo, di cui sono noti i lati, dividere questi in tre parti uguali e determinare l'area del triangolo colorato centrale.*

Soluzione

Ciascuno lato (rosso, figg. 7-7) del triangolo sia diviso in tre parti uguali; si veda come procedere nell'esercizio precedente.

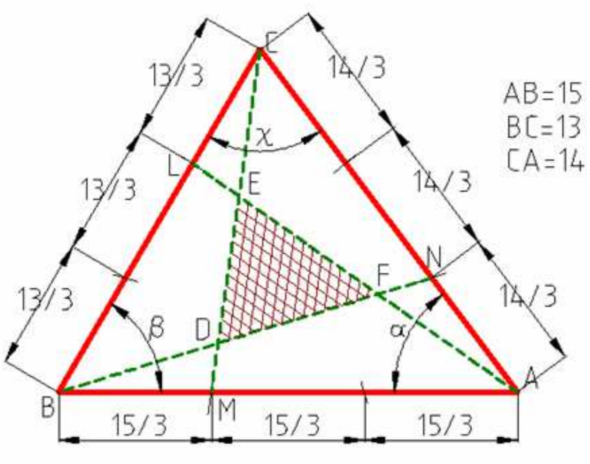


Figura 7: Esercizio 6.

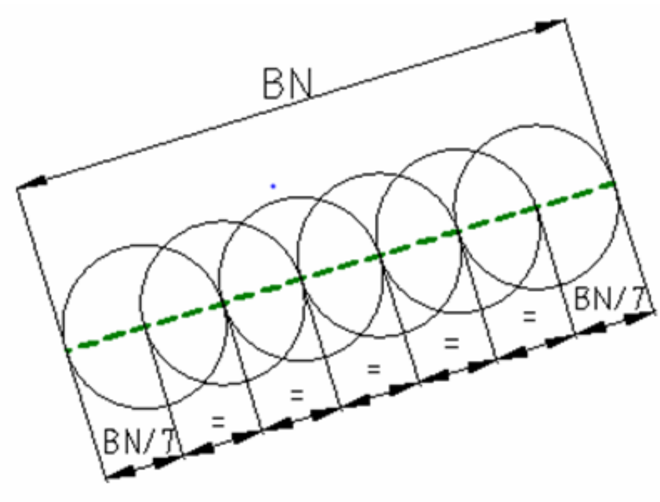


Figura 8: Esercizio 6.

Calcolo il segmento $\overline{CM}$

$$13^2 = 14^2 + 15^2 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} = 0.6$$

$$\overline{CM}^2 = 14^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 15\right)^2 - 2 \cdot 14 \left(\frac{2}{3} \cdot 15\right) \cos\alpha$$

da cui

$$CM = \sqrt{4^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 15\right)^2 - 2 \cdot 14 \left(\frac{2}{3} \cdot 15\right) 0.6} = 11.31$$

Calcolo il segmento $\overline{AL}$

$$14^2 = 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cos\beta \Longrightarrow \cos\beta = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = 0.508$$

$$\overline{AL}^2 = 15^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 13\right)^2 - 2 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} \cdot 13\right) \cos\beta$$

da cui

$$\overline{AL} = \sqrt{15^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 13\right)^2 - 2 \cdot 15 \left(\frac{2}{3} \cdot 13\right) 0.508} = 12.96$$

Calcolo il segmento $\overline{BN}$

$$15^2 = 14^2 + 13^2 - 2 \cdot 14 \cdot 13 \cos\chi \Longrightarrow \cos\chi = \frac{14^2 + 13^2 - 15^2}{2 \cdot 14 \cdot 13} = 0.385$$

$$\overline{BN}^2 = 13^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 14\right)^2 - 2 \cdot 13 \left(\frac{2}{3} \cdot 14\right) \cos\chi$$

da cui

$$\overline{BN} = \sqrt{13^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 14\right)^2 - 2 \cdot 13 \left(\frac{2}{3} \cdot 14\right) 0.385} = 12.75$$

Area del triangolo rosso ABC avente perimetro $13+14+15=42$ e semiperimento $42/2=21$,

$$A_{ABC}=\sqrt{21\,(21-13)\,(21-14)\,(21-15)}=84 \tag{12}$$

Area del triangolo ACL avente perimetro $14+13/3+12.96=31.3$ e semiperimento $31.3/2=15.65$,

$$A_{ACL}=\sqrt{15.65\,(15.65-14)\left(15.65-\frac{13}{3}\right)(15.65-12.96)}=28 \tag{13}$$

Area del triangolo BCM avente perimetro $13+15/3+11.31=29.31$ e semiperimento $29.31/2=14.66$,

$$A_{BCM}=\sqrt{14.66\,(14.66-13)\left(14.66-\frac{15}{3}\right)(14.66-11.31)}=28 \tag{14}$$

Area del triangolo ABN avente perimetro $15+14/3+12.75=32.42$ e semiperimento $32.42/2=16.21$,

$$A_{ABN}=\sqrt{16.21\,(16.21-15)\left(16.21-\frac{14}{3}\right)(16.21-12.75)}=28 \tag{15}$$

Triangolo DEF

$$\begin{aligned}
\text{Lato } DF &= 3\cdot\frac{\overline{BN}}{7}=3\cdot\frac{12.75}{7}=5.46\\
\text{Lato } DE &= 3\cdot\frac{\overline{CM}}{7}=3\cdot\frac{12.31}{7}=5.27\\
\text{Lato } EF &= 3\cdot\frac{\overline{AL}}{7}=3\cdot\frac{12.96}{7}=5.55
\end{aligned}$$

Perimetro

$$p_{DEF}=5.46+5.27+5.55=16.28$$

Area

$$A_{DEF}=\sqrt{8.14\,(8.14-5.46)\,(8.14-5.27)\,(8.14-5.55)}=12.73$$

Esercizio 7 *(***Teorema di Stewart***)*

Dimostrare che (fig. 7)

$$a^2n+b^2m=c\left(d^2+mn\right) \tag{16}$$

Soluzione

$$a^2=h^2+(m-p)^2 \Longrightarrow h^2=d^2-p^2 \Longrightarrow a^2=d^2-p^2+(m-p)^2 \Longrightarrow a^2=d^2+m^2-2mp$$
$$b^2=h^2+(n+p)^2 \Longrightarrow h^2=d^2-p^2 \Longrightarrow b^2=d^2-p^2+(n+p)^2 \Longrightarrow a^2=d^2+n^2+2np$$

$$\begin{cases} na^2=n\,(d^2+m^2-2mp)\\ mb^2=m\,(d^2+n^2+2np)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} na^2=nd^2+nm^2-2nmp\\ mb^2=md^2+mn^2+2mnp\end{cases}$$

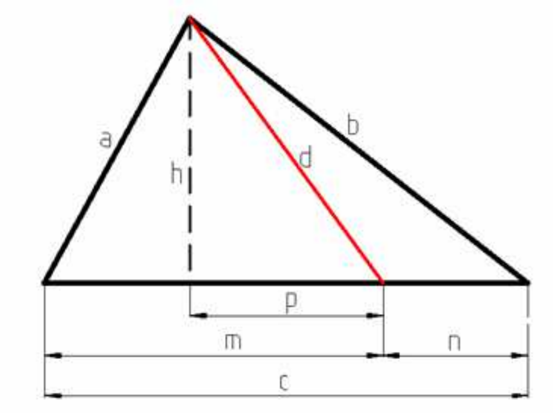


Figura 9: Esercizio 7.

$$na^2 + mb^2 = nd^2 + nm^2 + md^2 + mn^2 \Longrightarrow na^2 + mb^2 = d^2\left(m + n\right) + mn\left(m + n\right)$$

Ma $m + n = c$ quindi

$$na^2 + mb^2 = d^2c + nmc \Longrightarrow a^2n + b^2m = c\left(d^2 + mn\right)$$

Esercizio 8 *(***Trapezio con segmento interno in tre parti uguali***)*
Dimostrare che il segmento $\overline{HE}$ è divisibile in tre parti uguali (fig. 10).

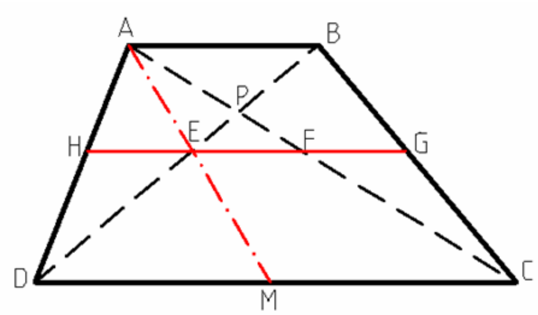


Figura 10: Esercizio 8.

Soluzione
I segmenti $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{GH}$ sono paralleli. Il segmento $\overline{AM}$ è la linea mediana: $\overline{CM} = \overline{DM}$. Rileviamo tre coppie di triangoli, chiaramente espresse in fig. 11:
Quindi avremo:

$$\frac{\overline{HE}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{DC}}$$

Ma la base del trapezio è $\overline{DM} = \overline{CM}$ quindi $\overline{DC} = 2\overline{CM}$. Sostituendo si avrà:

$$\overline{HE} = \overline{EF} = \overline{EG} \Longrightarrow \frac{\overline{EF}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{EG}}{2\overline{CM}} \Longrightarrow \overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{EG}$$

$$\overline{HE} = \overline{EF} = \overline{EG} = \frac{1}{3}\overline{HG}$$

come volevamo dimostrare.

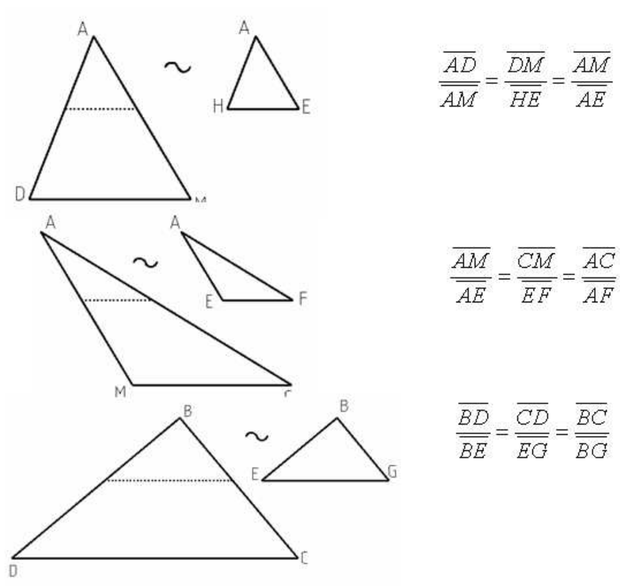


Figura 11: Esercizio 8.

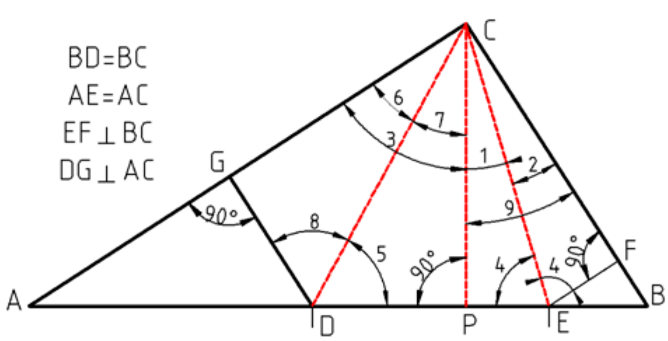


Figura 12: Esercizio 9.

Esercizio 9 *(***Triangolo con parte di un lato somma di due segmenti***)*
Dimostrare che il segmento $\overline{DE} = \overline{EF} + \overline{DO}$ *(fig.12).*

Soluzione
Dalla fig. 12

$$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 90^\circ \tag{17}$$

Nel triangolo CPE si ha

$$\measuredangle 4 + \measuredangle 1 = 90^\circ \tag{18}$$

Nel triangolo CEF si ha

$$\measuredangle 4 + \measuredangle 2 = 90^\circ$$

Quindi

$$\measuredangle 1 \simeq \measuredangle 2 \tag{19}$$

I triangoli rettangoli CPE e CEF sono uguali aventi l'ipotenusa in comune e gli angoli uguali. Quindi $\overline{PE} = \overline{EF}$. Nel triangolo CPD si ha

$$\measuredangle 7 + \measuredangle 5 = 90^\circ,$$

nel triangolo CDG si ha

$$\measuredangle 6 + \measuredangle 8 = 90^\circ,$$

avendo l'ipotenusa in comune i predetti triangoli sono uguali:

$$\measuredangle 6 \simeq \measuredangle 7 \ \text{ e } \measuredangle 5 \simeq \measuredangle 8$$

Quindi $\overline{DP} = \overline{DG}$. Sarà allora

$$\overline{DE} = \overline{DP} + \overline{PE} = \overline{DG} + \overline{EF} \tag{20}$$

come volevamo dimostrare.

Esercizio 10 *(***Costruzione di un quadrato da un parallelogramma***)*
Si faccia riferimento alla fig. 13.

Soluzione
Sia dato un parallelogramma (fig. 13) sui lati del quale si costruiscono i relativi quadrati (ciano scuro), completi delle loro diagonali (ciano scuro). Unendo i punti di incontro delle quattro coppie di diagonali (ciano scuro) si otterrà un quadrato (rosso), il cui centro (diagonale rosse) coinciderà con il centro del parallelogramma (diagonale nere).

Esercizio 11 *(***Costruzione di un quadrilatero ciclico***)*

Sia dato un quadrilatero $ABCD$ (nero, fig. 14). Si traccino le bisettrici da ciascun vertice prolungandole fino a formare un nuovo quadrilatero $EFGH$ (rosso). Questo si chiamerà *quadrilatero ciclico* perché risulterà inscritto in un cerchio (blu).

Esercizio 12 Quadrilatero ciclico e formula di Erone
Si faccia riferimento alla fig. 15, dove è raffigurato un triangolo ABC di cui si conoscano i lati a, b, c. Denominando con p il perimetro $p = a + b + c$, con s il semiperimetro e con A l'area del triangolo, si vuole dimostrare la formula di Erone:

$$A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \tag{21}$$

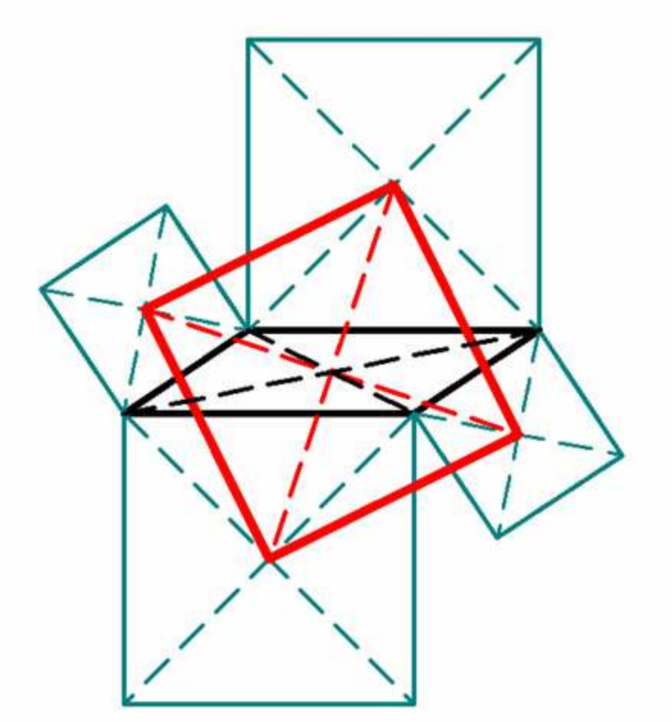


Figura 13: Esercizio 10.

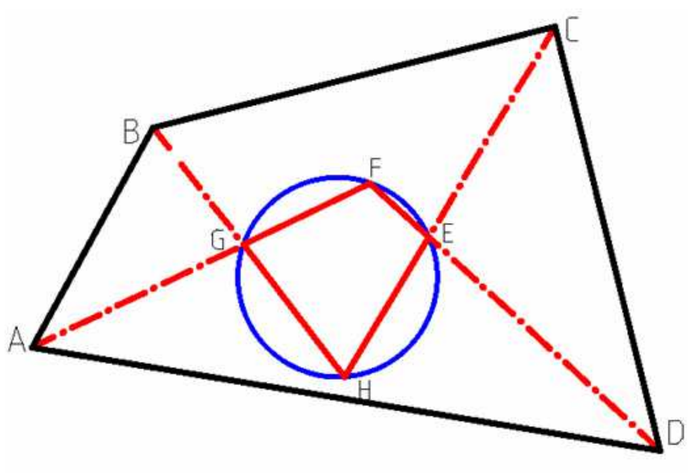


Figura 14: Esercizio 11.

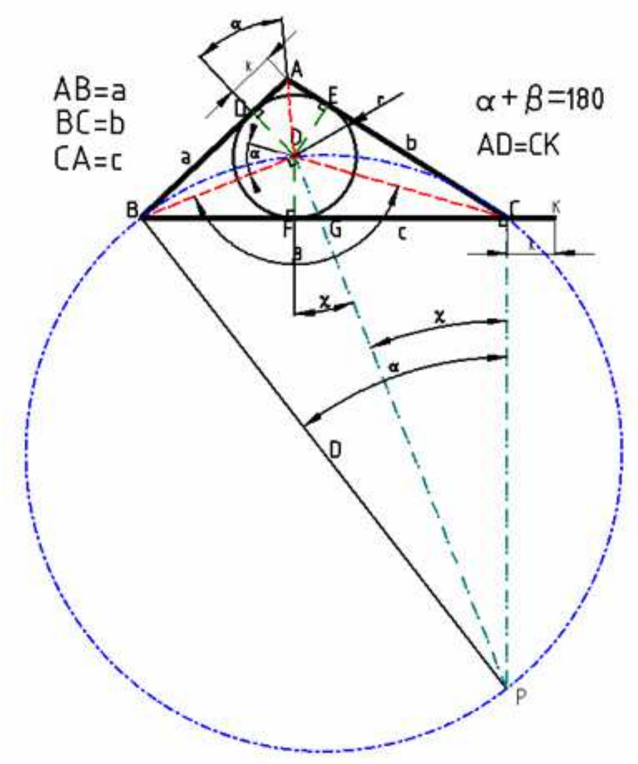


Figura 15: Esercizio 12.

Soluzione

Si traccino le tre bisettrici per ottenere il centro del cerchio inscritto nel triangolo. I punti di tangenza sono D, E, F. Si estenda il lato $\overline{BC}$ di un segmento pari a $k = \overline{AD}$. Si costruiscano i triangoli BOP e BCP; si potrà dire che essi definiscono il quadrilatero ciclico (es. 11) $BOCP$ il cui cerchio (blu) ha il diametro $D = BP$. Ne segue che l'angolo $\angle BCP = \alpha$ è supplementare a $\angle BOC$. È immediato constatare che $\angle DOA = \alpha$. Sommiamo

$$\frac{1}{2}\angle DOE + \frac{1}{2}\angle EOP + \frac{1}{2}\angle POD = \frac{1}{2}360^\circ$$

cioè $\angle DOA$ è supplementare a $\angle BOC$. Ne segue che il triangolo DOA è simile al triangolo BCP. Pertanto scriveremo:

$$\frac{AO}{D} = \frac{k}{c} = \frac{r}{CP} \tag{22}$$

I triangoli OGF e GPB sono simili perché sono rettangoli e hanno uguale un angolo in F:

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{CP}}{r} \tag{23}$$

Segue

$$\begin{gathered}\frac{c}{k} = \frac{\overline{GC}}{\overline{GF}} \Longrightarrow \frac{c+k}{k} = \frac{\overline{GC}+\overline{GF}}{\overline{GF}} \quad \text{oppure} \quad \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{GF}} \\ \Longrightarrow \overline{BK}\cdot\overline{GF} = \overline{CK}\cdot\overline{CF} \Longrightarrow \left(\overline{BK}\right)^2\overline{GF} = \overline{BK}\cdot\overline{CK}\cdot\overline{CF}\end{gathered} \tag{24}$$

Nel triangolo BOG il r è l'altezza sull'ipotenusa; dunque

$$r^2 = \overline{FG}\cdot\overline{FB} \tag{25}$$

L'area del triangolo ABC sarà la somma delle aree dei triangoli AOB, BOC, COA.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \Longrightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2}r\,(a+b+c) = rs$$

$$\overline{BF} = \overline{BD} \qquad \overline{CF} = \overline{CE} \qquad \overline{AD} = \overline{AE} \Longrightarrow \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{AD} = s$$
$$\text{ma } \overline{AD} = \overline{CK} \text{ quindi } \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{CK} = \overline{BK} = s$$

Così l'area di ABC è

$$A_{ABC} = \overline{BK} \cdot r \Longrightarrow A^2_{ABC} = \left(\overline{BK}\right)^2 \cdot r^2 \tag{26}$$

Dalla (25):

$$A^2_{ABC} = \left(\overline{BK}\right)^2 \cdot \overline{FG} \cdot \overline{FB}$$

Dall'ultima delle (24):

$$A^2_{ABC} = \overline{BK} \cdot \overline{CK} \cdot \overline{FC} \cdot \overline{FB} \Longrightarrow A_{ABC} = \sqrt{\overline{BK} \cdot \overline{CK} \cdot \overline{FC} \cdot \overline{FB}}$$
$$\Longrightarrow A_{ABC} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

cioè l'asserto.

Esercizio 13 Problema farfalla

Sia dato un cerchio completo di corda AB. Sia dato il punto M della corda. Attraverso M si traccino i segmenti CD e EF. Si completi il disegno ottenendo una "farfalla" rossa (fig. 16). Si dimostri che $\overline{PM} = \overline{MQ}$.

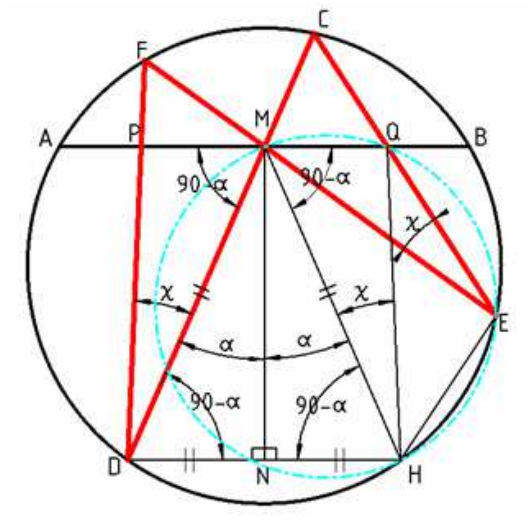


Figura 16: Esercizio 13.

Soluzione

Dal punto M si tracci la perpendicolare alla corda AB. Dal punto D si tracci la parallela alla corda AB fino ad incontrare sul cerchio il punto H. Si sono così ottenuti due triangoli rettangoli MDN e MHN. Chiamiamo $\measuredangle DMN = \measuredangle HMN = \alpha$. Osserviamo che

$$90 - \alpha = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BH} + \overset{\frown}{BC}\right) \quad \text{ma } \measuredangle CEH = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CAH}\right)$$

Si ha:

$$90 - \alpha + \measuredangle CEH = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BH} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CAH}\right) \Longrightarrow \overset{\frown}{BH} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CAH} = 360$$

$$90 - \alpha + \overset{\frown}{CAH} = 180$$

Ne consegue che il quadrilatero $MQEH$ è inscrivibile in un cerchio (ciano). L'arco $\overset{\frown}{MQ}$ misura l'angolo $\measuredangle MHQ$ e $\measuredangle MEQ$; quindi

$$\measuredangle MHQ = \measuredangle MEQ = \chi$$

Ma tale angolo corrisponde anche all'arco $\overset{\frown}{FC}$; quindi $\overset{\frown}{FC} = \chi$. Ne consegue che i triangoli MPD e MQH sono uguali e pertanto $PM = MQ$.

Esercizio 14 *(***Triangolo rettangolo – Bisettrice, mediana e altezza***)*
Sia dato un triangolo rettangolo ABC. Sull'ipotenusa AB, dal punto C, si traccino: l'altezza CD, la bisettrice CE (fig. 17) e la mediana CF. Si vuole dimostrare che

$$\measuredangle ECD = \measuredangle ECF \tag{27}$$

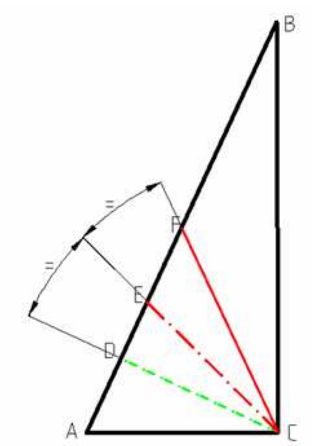


Figura 17: Esercizio 14.

Soluzione
Si inserisca il triangolo ABC in un cerchio avente come diametro l'ipotenusa AB e si completi la figura come segue (fig. 18).

Si otterrà il triangolo isoscele CFG e si noterà che i triangoli EFG e CDE sono simili: sono entrambi rettangoli e

$$\measuredangle CED = \measuredangle FEG \Longrightarrow \measuredangle ECD = \measuredangle ECF$$

Esercizio 15 *(***Triangolo con parte di un lato incognito***)*
Sia dato un generico triangolo ABC, all'interno del quale sia scelto ad arbitrio un punto P. Del triangolo si conoscono le dimensioni dei lati così come raffigurato (fig. 19). Si chiede di trovare la quota incognita x, non mediante le nozioni di Geometria Analitica, bensì attraverso l'uso del teorema di Pitagora, giungendo a scrivere un teorema per il particolare caso in esame.

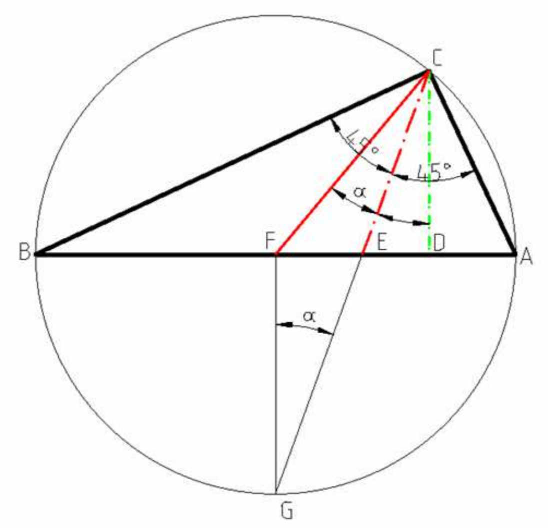


Figura 18: Esercizio 14.

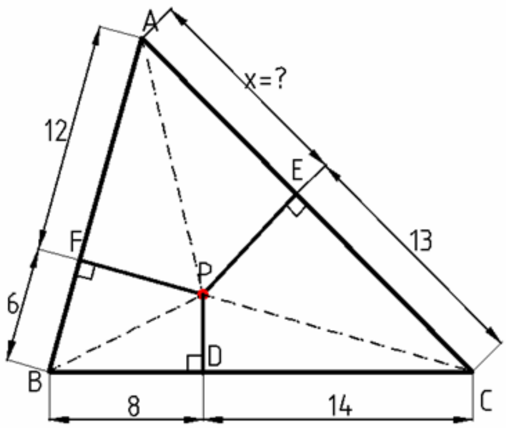


Figura 19: Esercizio 15.

Soluzione

La costruzione del triangolo è immediata, osservando che i piedi delle perpendicolari ai tre lati sono i punti di tangenza alle circonferenze aventi raggio 6 e centro B, raggio 8 e centro B, raggio 14 e centro C.

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ quadrilatero } BDPF &: \overline{PB}^2 = 8^2 + \overline{PD}^2 = 6^2 + \overline{PF}^2 \\ 2^\circ \text{ quadrilatero } CDPE &: \overline{PC}^2 = 14^2 + \overline{PD}^2 = 13^2 + \overline{PE}^2 \\ 1^\circ \text{ quadrilatero } BDPF &: \overline{PA}^2 = 12^2 + \overline{PF}^2 = x^2 + \overline{PE}^2 \end{aligned}$$

Segue

$$\begin{gathered} 12^2 = x^2 + \overline{PE}^2 - \overline{PF}^2 \\ 14^2 + \overline{PD}^2 - \left(8^2 + \overline{PD}^2\right) = 13^2 + \overline{PE}^2 - \left(6^2 + \overline{PF}^2\right) \\ \Longrightarrow 14^2 + 6^2 = 13^2 + 8^2 + \overline{PE}^2 - \overline{PF}^2 \end{gathered}$$

Quindi

$$14^2 + 6^2 - 12^2 = 13^2 + 8^2 + \overline{PE}^2 - \overline{PF}^2 - \left(x^2 + \overline{PE}^2 - \overline{PF}^2\right)$$

Il teorema cercato è espresso da (si segua la figura):

$$4^2 + 6^2 + x^2 = 13^2 + 8^2 + 12^2 \Longrightarrow x = \sqrt{145}$$

Esercizio 16 *(***Somma costante di distanze tra un punto generico e i lati di un triangolo equilatero***)*

Dimostrare che in un triangolo equilitaro, da un punto generico P interno al triangolo, la somma delle distanze da P ai lati del triangolo è costante. Dalla fig. (20):

$$\overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{PS} = \textit{costante}$$

Soluzione

1° Metodo. Si consideri la fig. 21. I segmenti rossi $\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}$ sono perpendicolari ai rispettivi lati BC, CA, AB. Il segmento $\overline{EF}$ è parallelo al segmento $\overline{BC}$.

Il segmento $\overline{ET}$ è parallelo al segmento $\overline{PR}$.

Il triangolo HEP è equilatero perché $\overline{PH}$ è parallelo ad $\overline{AC}$ e nel quale si ha

$$\overline{EN} = \overline{PS}$$

Il triangolo AEF è equilatero e nel quale si ha

$$\overline{ET} = \overline{AG}$$

Osserviamo che

$$\overline{EN} + \overline{NT} = \overline{PS} + \overline{PR} = \overline{AG},$$

cioè

$$\overline{AG} = \overline{AD} - \overline{GD} = \overline{AD} - \overline{PQ}$$

e quindi

$$\overline{PS} + \overline{PR} + \overline{PQ} = \overline{AD}$$

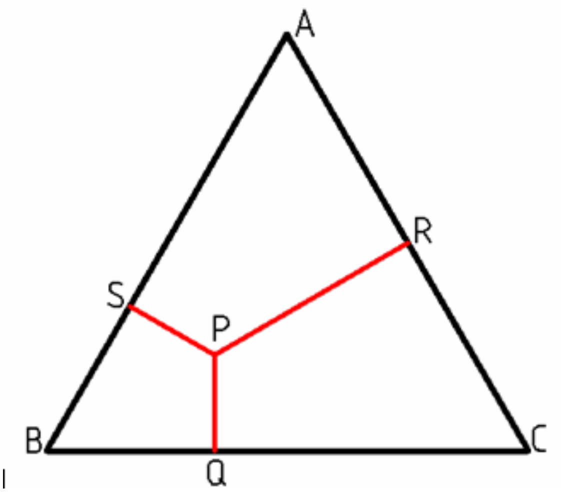


Figura 20: Esercizio 16.

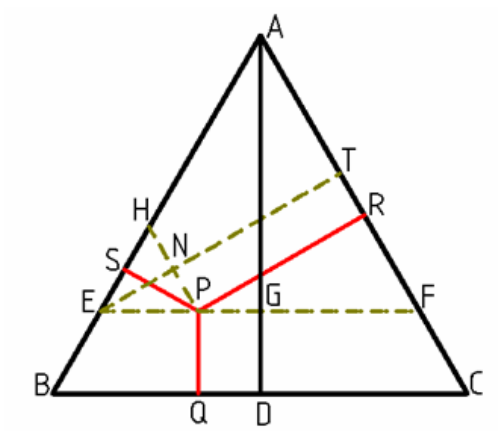


Figura 21: Esercizio 16.

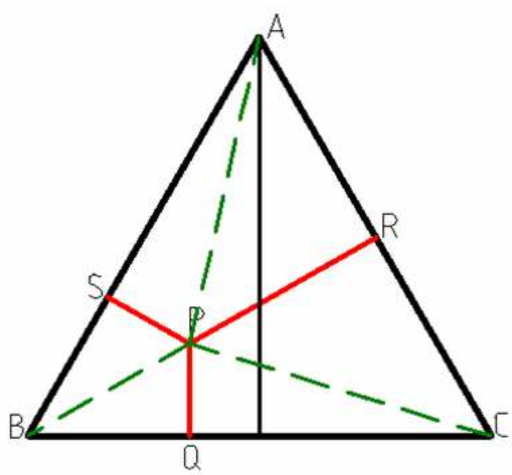


Figura 22: Esercizio 16.

che è una costante nel triangolo ABC.

2° Metodo. Si consideri la fig. 22.

Dividiamo il triangolo ABC in tre triangoli ABP, BCP, CAP, aventi le rispettive altezze $\overline{PS}$, $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$. L'area del predetto triangolo è

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

ma è anche la somma delle aree di ciascun triangolo:

$$\frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PS} + \overline{BC} \cdot \overline{PQ} + \overline{CA} \cdot \overline{PR}\right)$$

ma poichè abbiamo $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ scriveremo

$$\frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BC}\left(\overline{PS} + \overline{PQ} + \overline{PR}\right)$$

da cui

$$\overline{AD} = \overline{PS} + \overline{PQ} + \overline{PR} \quad \text{costante nel triangolo } ABC$$

Esercizio 17 *(***Teorema di Menelao***)*

Sia dato un triangolo ABC (fig. 23). Dai vertici A e B si traccino le mediane per definire il baricentro G. La mediana AM sia aumentata di $1/3$ per definire il punto P. Da P si traccino le parallele ai lati AB e AC per definire i punti P_1 e P_2. La parallela al lato CB dal punto P si incontrerà con il prolungamento di AB definendo il punto P_3. Provare che i punti P_1, P_2, P_3 sono allineati.

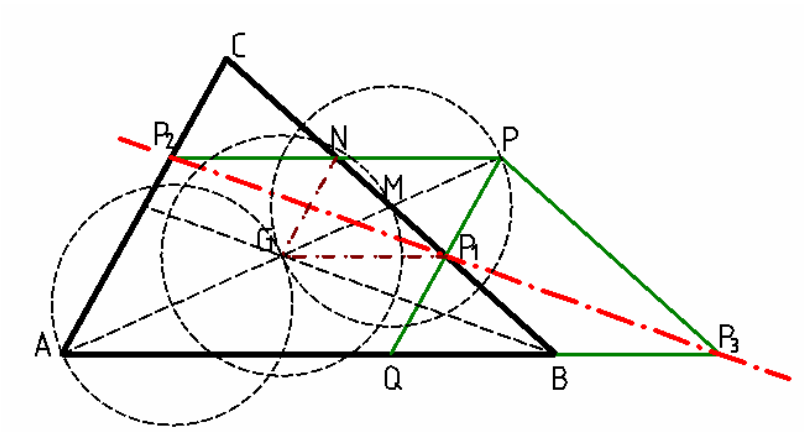


Figura 23: Esercizio 17.

Soluzione

Osserviamo che i triangoli CMA e P_1MP sono simili e che

$$\frac{CM}{MP_1} = \frac{AM}{MP} = \frac{3}{1}$$

Analogamente per i triangoli AMB e PMN:

$$\frac{MB}{MN} = \frac{AM}{MP} = \frac{3}{1}$$

Quindi
$$\frac{CM}{MP_1}=\frac{MB}{MN}$$
Poiché $CM = MB$ è $MP_1 = MN$ e $CN = P_1B$. Osserviamo che il triangolo CMA; si ha:
$$\frac{CN}{NM}=\frac{AG}{GM}=\frac{2}{1}\Longrightarrow\frac{CN}{NB}=\frac{2}{1}$$
Nel triangolo ABC si può scrivere:
$$\frac{CP_2}{P_2A}=\frac{CN}{NB}=\frac{1}{2}\text{ e in modo analogo }\frac{BP_1}{P_1C}=\frac{CN}{NB}=\frac{1}{2}$$
Anche nel triangolo APP_3, poiché il segmento MP è parallelo al segmento PP_3 si ha
$$\frac{AP_3}{P_3B}=\frac{AP}{MP}=\frac{4}{1}$$
Moltiplicando
$$\frac{CP_2}{P_2A}\cdot\frac{BP_1}{P_1C}\cdot\frac{AP_3}{P_3B}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}=1,$$
ovvero i tre punti sono allineati.

Esercizio 18 *(***Teorema di Simson***)*
Dimostrare che i piedi delle perpendicolari tracciate da un punto qualunque P di una circonferenza ai lati o prolungamenti, di un triangolo inscritto alla circonferenza sono allineati.

Soluzione
Da un punto P della circonferenza che inscrive il triangolo ABC, si traccino le perpendicolari $\overline{PX}$, $\overline{PY}$, $\overline{PZ}$ rispettivamente ai lati $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Poichè l'angolo PYA è supplementare all'angolo PZA, il quadrilatero $PZAY$ è ciclico (es. 11). Si veda la fig. 24.

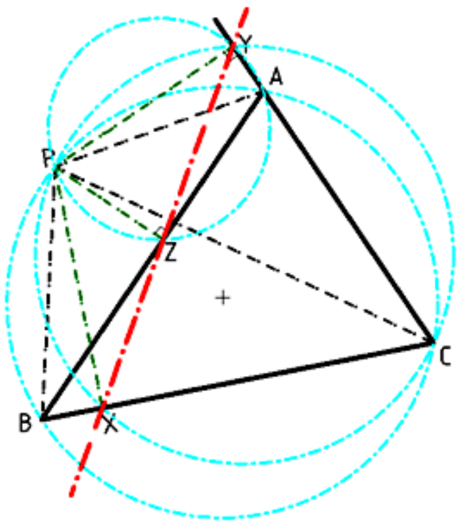


Figura 24: Esercizio 18.

Tracciare i segmenti $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$. Con ovvio significato dei simboli:
$$mis\,(\measuredangle PYZ)=mis\,(\measuredangle PAZ)\tag{28}$$

Analogamente, poiché l'angolo PYC è supplmentare all'angolo PXC, il quadrilatero $PXCY$ è ciclico, dunque:

$$mis\,(\measuredangle PYX) = mis\,(\measuredangle PCB) \tag{29}$$

Comunque il quadrilatero $PACB$ è pure ciclico perchè presente nell'ipotesi del teorema – il triangolo inscritto nella circonferenza e P un punto della stessa – e dunque:

$$mis\,(\measuredangle PAZ)\ (\text{oppure } mis\,(\measuredangle PAB)) = mis\,(\measuredangle PCB) \tag{30}$$

Così dalle (28)-(29)-(30) si ha:

$$mis\,(\measuredangle PYZ) = mis\,(\measuredangle PYX) \tag{31}$$

e pertanto i punti X, Y, Z sono allineati.

Esercizio 19 *Dimostrare che i punti P, Q, R sono allineati (fig. 25).*

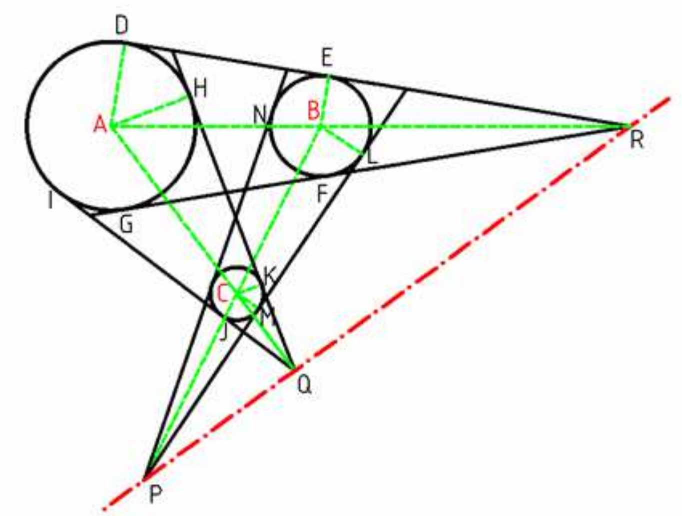


Figura 25: Esercizio 19.

Soluzione
Cerchi di centro A e B. Si trova che

$$\overline{AD}\perp\overline{DR},\ \overline{BE}\perp\overline{DR} \text{ e dunque } \overline{AD}\parallel\overline{BE} \tag{32}$$

da cui la similitudine dei triangoli RAD e RBE. Ne segue:

$$\frac{AR}{BR} = \frac{AD}{BE} \tag{33}$$

Cerchi di centro B e C. Si trova che

$$\overline{BL}\perp\overline{PL},\ \overline{CM}\perp\overline{PL} \text{ e dunque } \overline{BL}\parallel\overline{CM} \tag{34}$$

da cui la similitudine dei triangoli PBL e PCM. Ne segue:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{BL}{CM} \tag{35}$$

Cerchi di centro C e A. Si trova che

$$\overline{AH} \perp \overline{QH}, \ \overline{CK} \perp \overline{QH} \text{ e dunque } \overline{AH} \| \overline{CK} \tag{36}$$

da cui la similitudine dei triangoli QAH e QCK. Ne segue:

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{CK}{AH} \tag{37}$$

Moltiplicando ambo i membri delle (33)-(35)-(37) si ottiene:

$$\frac{AR}{BR} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} = \frac{AD}{BE} \cdot \frac{BL}{CM} \cdot \frac{CK}{AH}, \tag{38}$$

ma poiché $AH = AD, \ CK = CM, \ BL = BE$ si ha:

$$\frac{AR}{BR} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} = 1$$

da cui l'asserto in virtù del teorema di Menelao (esercizio 17).

Esercizio 20 *Triangolo, cerchio inscritto e allineamenti.*

Soluzione
Dato un triangolo generico ABC siano α, β, χ gli angoli corrispondenti ai vertici.(fig. 26).

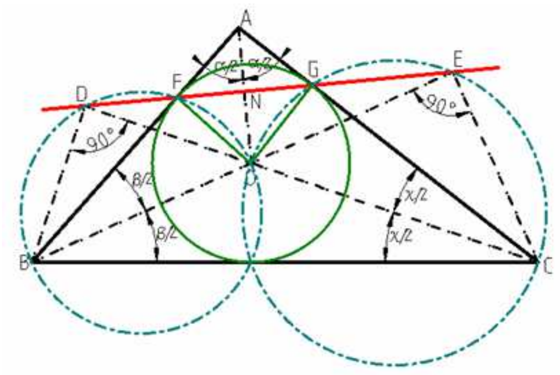


Figura 26: Esercizio 20.

Si traccino le bisettrici da ogni vertice, le quali si incontreranno in O. Dal centro O si tracci la perpendicolare ad AB e ad AC. Disegnato il cerchio inscritto si ha $FO = GO$ e $AF = AG$, pertanto AO è perpendicolare a FG nel punto N. Esaminiamo le bisettrici da B e da C. Si ha con ovvio significato dei simboli:

$$mis\,(\measuredangle BOC) = 180° - \frac{1}{2}(\beta + \chi) \Longrightarrow \beta + \chi = 180° - \alpha$$
$$\Longrightarrow mis\,(\measuredangle BOC) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

Poichè l'angolo BOD è supplementare all'angolo BOC, si ha

$$mis\,(\measuredangle BOD) = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

Ma l'angolo DBO è complementare a BOD, quindi

$$mis\,(\measuredangle DBO) = \frac{\alpha}{2}$$

Poiché

$$mis\,(\measuredangle DBF) = mis\,(\measuredangle DBO) - mis\,(\measuredangle FBO)$$

si ha

$$mis\,(\measuredangle DBF) = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

Gli angoli in F e in D sono retti, quindi il quadrilatero $BDFO$ è ciclico. Si ha

$$mis\,(\measuredangle FDO) = \frac{\beta}{2} \Longrightarrow mis\,(\measuredangle FDB) = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$$

Nel triangolo DFB abbiamo

$$\begin{aligned} mis\,(\measuredangle DFB) &= 180^\circ - [mis\,(\measuredangle FDB) + mis\,(\measuredangle DBF)] \\ &= 180^\circ - \left[\left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\right] \\ &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Poiché $\overline{AFB}$ è un segmento diritto e

$$mis\,(\measuredangle GFA) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = mis\,(\measuredangle DFB)$$

per cui i punti D, F, G risultano allineati. In modo analogo si prova che E, G, F sono allineati. Pertanto D, F, G, E sono allineati.

Esercizio 21 *Dati due lati di un triangolo e l'angolo tra loro trovare la lunghezza della bisettrice.*

Sia dato il triangolo ABC (fig. 27) di cui sono noti i lati $\overline{AB} = a$, $\overline{CA} = c$ e

$$mis\,(\measuredangle BAC) = 2\alpha$$

Determinare la lunghezza della bisettrice l_A.

Soluzione

Si tracci la bisettrice AD dell'angolo 2α. Dai vertici B e C si traccino due segmenti rispettivamente $\overline{BX} \| \overline{AD}$ e $\overline{CY} \| \overline{AD}$ che si incontrano con i prolungamenti dei lati c ed a. Si osserva che $mis\,(\measuredangle XBA) = \alpha$ (Talete) e che $\angle BAX$ è supplementare di $\angle BAC$:

$$mis\,(\measuredangle BAX) = 180^\circ - 2\alpha$$

Quindi

$$mis\,(\measuredangle BXA) = \alpha, \quad \overline{AX} = a$$

Lunghezza della bisettrice l_A:

$$\begin{aligned} \frac{l_A}{\overline{BX}} = \frac{c}{c+a} &\Longrightarrow \frac{\overline{BX}}{\sin\,(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha} \\ &\Longrightarrow \overline{BX} = \sin 2\alpha \cdot \frac{a}{\sin\alpha} = 2a\cos\alpha \end{aligned}$$

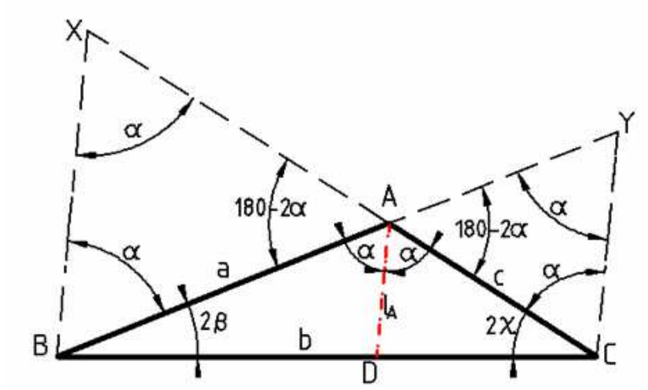


Figura 27: Esercizio 21.

Sostituendo si ottiene:

$$l_A = \overline{BX}\frac{c}{c+a} \Longrightarrow l_A = \frac{2ac}{c+a}\cos\alpha$$

In modo analogo si potrà scrivere per le altre due bisettrici:

$$l_B = \frac{2ba}{b+a}\cos\beta, \quad l_C = \frac{2cb}{c+b}\cos\chi$$

Esercizio 22 *Dimostrare che la somma delle lunghezze di due perpendicolari, da un punto qualunque di un lato, sulle due diagonali è costante (fig. 28).*

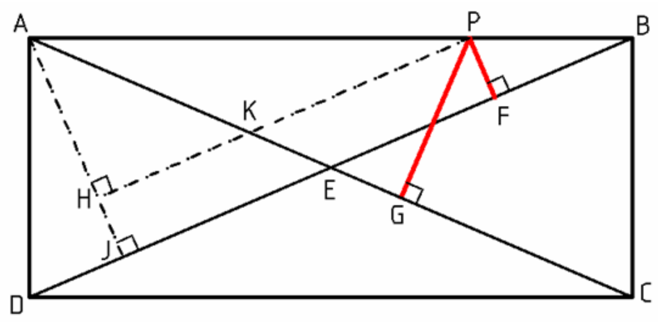


Figura 28: Esercizio 22.

Soluzione

Da un punto P del lato AB si traccino le perpendicolari PG e PF. Dal vertice A si tracci la perpendicolare AJ e dal punto P si tracci la perpendicolare PH. È chiaramente $\overline{PF} = \overline{HJ}$, ma è anche $PH \| BD$. Quindi abbiamo

$$\angle APH = \angle ABD$$

Poiché $\overline{AE} = \overline{EB}$ abbiamo

$$\angle CAB = \angle ABD$$

così per transitività scriveremo

$$\angle EAP = \angle APH$$

Nel triangolo APH si ha

$$\overline{AK} = \overline{KP}$$

Poichè $\angle AKH = \angle PKG$ i triangoli AHK e PGK sono identici. Quindi $\overline{AH} = \overline{PG}$ e sommando otteremo:

$$\overline{PF} + \overline{PG} = \overline{HJ} + \overline{AH} = \overline{AJ} = \text{costante}$$

Esercizio 23 *Dimostrare che la linea tracciata dai punti mediani di due lati opposti, KL, divide in due parti uguali il segmento PQ tracciato dai punti mediani delle due diagonali (fig. 29).*

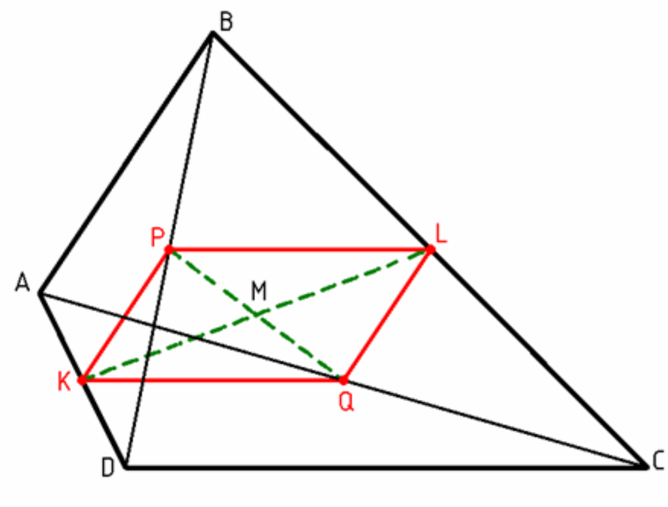


Figura 29: Esercizio 23.

Soluzione

Si chiede di dimostrare che $\overline{PM} = \overline{MQ}$. Nel triangolo ADB si osserva che

$$\overline{KP} = \frac{1}{2}\overline{AB} \;\; \text{e } KP \perp AB$$

Lo stesso dicasi per il triangolo ACB:

$$\overline{QL} = \frac{1}{2}\overline{AB} \;\; \text{e } QL \perp AB$$

Dunque

$$\overline{KP} = \overline{QL} \;\; \text{e } KP \perp QL$$

Ne consegue che $KPLQ$ è un parallelogramma, dunque $\overline{PM} = \overline{MQ}$.