



## Infiniti gatti di Schrödinger

Marcello Colozzo

### Sommario

Un gatto  $\mathcal{G}$  è rinchiuso in una scatola cubica di spigolo  $L$ , assieme a un sistema quantistico  $S_q$  il cui hamiltoniano ha due autostati non degeneri  $|E_1\rangle$  ed  $|E_2\rangle$ . Il sistema  $S_q$  è inizialmente preparato in uno stato  $|\psi_0\rangle$  dato da una sovrapposizione lineare di  $|E_1\rangle$  ed  $|E_2\rangle$  ed è collegato a un meccanismo  $\mathcal{M}$  in grado di rompere una fiala  $\mathcal{F}$  contenente gas tossico. La minima energia richiesta per rompere  $\mathcal{F}$  è  $E_{\min} = E_2$ . In virtù della linearità dell'equazione di Schrödinger, la sovrapposizione lineare dello stato iniziale  $|\psi_0\rangle$  si trasferisce a  $\mathcal{G}$  che verrà così a trovarsi in una sovrapposizione lineare di vita e morte. Nel paradigma dell'interpretazione di Von Neumann, la suddetta sovrapposizione può essere risolta solo dall'osservazione eseguita da uno sperimentatore  $\Omega$ , la cui capacità di introspezione permette di conoscere lo stato di  $\mathcal{G}$  e quindi di  $S_q$ . Escludendo l'azione di  $\Omega$  ed introducendo – virtualmente – nella scatola un secondo gatto vivo  $\mathcal{G}'$ , in forza della predetta linearità dell'equazione di Schrödinger, la sovrapposizione lineare di  $S_q \cup \mathcal{G}$  verrà a trasferirsi in  $\mathcal{G}''$ . Tale procedimento di introduzione virtuale di gatti vivi può essere iterato (aumentando progressivamente  $L$ ). Alla  $r$ -esima iterazione si trova che gli  $r + 1$  gatti  $\mathcal{G}, \mathcal{G}', \mathcal{G}'', \dots, \mathcal{G}^{(r)}$  sono in una sovrapposizione lineare di vita e morte. Questa conclusione è valida anche nel limite per  $r \rightarrow +\infty$ ?

**Keywords:** meccanica quantistica; paradosso del gatto di Schrödinger;

# Indice

1	Interpretazione di Copenaghen	2
2	Interpretazione di Von Neumann	9
3	Il paradosso del gatto di Schrödinger	14
4	Interpretazione a più mondi (Everett)	18
5	Il paradosso del gatto di Schrödinger nella MWI	18
	Bibliografia <sup>20</sup>	

# 1 Interpretazione di Copenaghen

Consideriamo un sistema quantistico  $S_q$  in regime non relativistico. Dalla formulazione assiomatica della meccanica quantistica sappiamo che lo stato quanto-meccanico di  $S_q$  è rappresentato da un vettore unitario  $\psi$  quale elemento di uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_q$  [1]. Per la stessa formulazione assiomatica segue che una qualunque osservabile  $A$  relativa a  $S_q$ , è rappresentata da un operatore hermitiano  $\hat{A}$ . Scriviamo l'equazione agli autovalori per  $\hat{A}$  nella notazione di Dirac [2], assumendo per semplicità lo spettro  $\sigma(\hat{A}) \subset \mathbb{R}$  dell'operatore  $\hat{A}$  puramente discreto e non degeneri<sup>1</sup>.

$$\hat{A} |a_n\rangle = a_n |a_n\rangle \quad (n = 1, 2, \dots, N \leq +\infty) \quad (1)$$

Come è noto  $\{|a_n\rangle\}$  è una base ortogonale dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_q$ , che noi assumiamo normalizzata, per cui

$$\langle a_n | a_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$$

In un istante iniziale  $t_0$  lo stato del sistema sia rappresentato da  $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}_q$ . Dal momento che il sistema di vettori  $\{|a_n\rangle\}$  è una base di  $\mathcal{H}$ , possiamo esprimere  $|\psi_0\rangle$  come combinazione lineare dei vettori di base. Precisamente

$$|\psi_0\rangle \in \mathcal{H} \implies \exists (c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_N^{(0)}) \in \mathbb{C}^N \mid |\psi_0\rangle = \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} |a_n\rangle \quad (2)$$

I numeri complessi  $c_n^{(0)}$  sono le componenti di  $|\psi_0\rangle$  nella base ortonormale  $\{|a_n\rangle\}$  e sono dati da

$$c_n^{(0)} = \langle a_n | \psi_0 \rangle, \quad (n = 1, \dots, N) \quad (3)$$

Per quanto precede  $|\psi_0\rangle$  è un vettore unitario o, ciò che è lo stesso, normalizzato a 1

$$\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1 \quad (4)$$

Cioè

$$\sum_{n=1}^N |c_n^{(0)}|^2 = 1 \quad (5)$$

Dalla formulazione assiomatica della meccanica quantistica sappiamo che la funzione vettoriale  $|\psi(t)\rangle$  è un integrale dell'equazione di Schrödinger

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (6)$$

dove  $\hat{H}$  è l'operatore hamiltoniano di  $S_q$ . La (6) è un'equazione differenziale ordinaria (vettoriale) del primo ordine e di forma normale, equivalente a un sistema di  $N$  equazioni differenziali del primo ordine. Infatti, posto

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t) |a_n\rangle \quad (7)$$

e denotando con  $(h_{jk})$  la matrice rappresentativa (nella base  $|a_n\rangle$ ) dell'operatore  $\hat{H}$ , la (6) si scrive in forma matriciale

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \dots \\ c_N(t) \end{pmatrix} = -\frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \dots & h_{1N}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \dots & h_{2N}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N1}(t) & h_{N2}(t) & \dots & h_{NN}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \dots \\ c_N(t) \end{pmatrix},$$

<sup>1</sup>La molteplicità geometrica degli autovalori è  $g_n = 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ .

dove abbiamo assunto una hamiltoniana dipendente dal tempo (sistema  $S_q$  non conservativo). Sviluppando il prodotto righe per colonne otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{c}_1 = -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N h_{1j}(t) c_j \\ \dot{c}_2 = -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N h_{2j}(t) c_j \\ \dots \\ \dot{c}_N = -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N h_{Nj}(t) c_j \end{array} \right. , \quad (8)$$

che, come anticipato, è un sistema di  $N$  equazioni differenziali lineari del primo ordine di forma normale. Ne consegue che l'evoluzione temporale di  $S_q$  è regolata dal problema di Cauchy in cui le condizioni iniziali sono

$$c_1(t_0) = c_1^{(0)}, \quad c_2(t_0) = c_2^{(0)}, \quad c_N(t_0) = c_N^{(0)} \quad (9)$$

Per quanto detto le (8) sono date in forma normale:

$$\dot{c}_k = F_k(t, c_1, c_2, \dots, c_N), \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

dove

$$F_k(t, c_1, c_2, \dots, c_N) \stackrel{def}{=} -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N h_{kj}(t) c_j, \quad (k = 1, \dots, N) \quad (11)$$

Le  $F_k$  sono le funzioni:

$$\begin{aligned} F_k &: A \rightarrow \mathbb{C} \\ F_k &: (t, c_1, c_2, \dots, c_N) \rightarrow -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N h_{kj}(t) c_j, \end{aligned}$$

essendo  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N$ . Le funzioni reali  $h_{k1}(t), \dots, h_{kN}(t)$  sono gli elementi di matrice della matrice rappresentativa dell'hamiltoniano  $\hat{H}$  nella base  $\{|a_n\rangle\}$  e sono manifestamente funzioni continue in  $\mathbb{R}$ . Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial c_i} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N h_{kj}(t) \frac{\partial c_j}{\partial c_i} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N h_{kj}(t) \delta_{ji} \end{aligned}$$

Cioè

$$\frac{\partial F_k}{\partial c_i} = -\frac{i}{\hbar} h_{ki}(t), \quad (i = 1, \dots, N) \quad (12)$$

Dalla continuità su tutto  $\mathbb{R}$  delle funzioni  $h_{k1}(t), \dots, h_{kN}(t)$ , segue dunque la continuità delle  $F_k$  e  $\frac{\partial F_k}{\partial c_1}, \frac{\partial F_k}{\partial c_2}, \dots, \frac{\partial F_k}{\partial c_N}$  per  $k = 1, 2, \dots, N$ . In altri termini, sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità, onde

$$\begin{aligned} \forall (t_0, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_N^{(0)}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N, \quad \exists! (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \in C^1([t_0, +\infty)) \times \dots \times C^1([t_0, +\infty)) \\ | \frac{d}{dt} \gamma_k(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N h_{kj}(t) \gamma_j(t), \quad (k = 1, \dots, N), \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \end{aligned}$$

Cioè esiste una ed una sola  $n$ -pla di funzioni  $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t))$  che verificano il sistema (8). Tali funzioni sono continue e dotate di derivata continua in  $[t_0, +\infty)$ , e sono le componenti del vettore di stato  $|\psi(t)\rangle$  a tutti i tempi. Pertanto, comunque assegnamo l'istante iniziale  $t_0 \in \mathbb{R}$  e lo stato iniziale  $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_N^{(0)}) \in \mathbb{C}^N$ , l'evoluzione temporale del sistema  $S_q$  è univocamente determinata. In altre parole, l'evoluzione temporale del vettore di stato  $|\psi(t)\rangle$  è deterministica.

Per completezza di esposizione notiamo che lo stesso problema può essere impostato in maniera compatta utilizzando l'unica equazione vettoriale (6), per cui abbiamo il seguente problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi(t)\rangle \\ |\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle \end{cases} \quad (13)$$

Consideriamo il caso particolare in cui  $S_q$  è conservativo, i.e. la sua hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo. In tal modo l'integrale generale di (6) è

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |C\rangle,$$

essendo  $|C\rangle$  un vettore costante arbitrario. Deve essere  $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_0} |C\rangle = |\psi_0\rangle$ , per cui l'unica soluzione di  $\mathcal{P}$  è

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t-t_0)} |\psi_0\rangle, \quad \forall t \in [t_0, +\infty), \quad (14)$$

che può essere scritta come

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t, t_0) |\psi_0\rangle, \quad \forall t \in [t_0, +\infty), \quad (15)$$

avendo introdotto l'operatore (manifestamente unitario)

$$\mathcal{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t-t_0)}, \quad (16)$$

che si chiama *operatore di evoluzione temporale*, mentre  $|\psi(t)\rangle$  si dice *evoluto temporale* di  $|\psi_0\rangle$ . Da ciò segue che l'evoluzione temporale di  $S_q$  è una trasformazione unitaria di  $\mathcal{H}_q$  e come tale conserva la norma del vettore di stato  $|\psi(t)\rangle$  a tutti i tempi. Cioè

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1, \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \quad (17)$$

Facciamo un'ulteriore ipotesi: le osservabili  $A$  e  $H$  sono compatibili, cioè

$$[\hat{A}, \hat{H}] = \hat{0},$$

per cui hanno un sistema di autovettori comuni o, ciò che è lo stesso, gli autostati di  $A$  sono autostati dell'energia:

$$\hat{H} |a_n\rangle = E_n |a_n\rangle, \quad (n = 1, \dots, N)$$

Pertanto la (15) si scrive

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t-t_0)} \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} |a_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t-t_0)} |a_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t_0)} |a_n\rangle \end{aligned}$$



Cioè:

$$\forall |\psi(t_*)\rangle \in \mathcal{H}_q, \hat{\pi}_{a_n} |\psi(t_*)\rangle = c_n |a_n\rangle \quad (24)$$

Gli operatori  $\hat{\pi}_{a_n}$  verificano le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{a_n} \hat{\pi}_{a_{n'}} &= \delta_{nn'} \hat{\pi}_{a_n} \\ \sum_{n=1}^N \hat{\pi}_{a_n} &= \hat{1} \end{aligned} \quad (25)$$

Dalla prima delle (25) segue che  $\hat{\pi}_{a_n}^2 = \hat{\pi}_{a_n}$ , cioè gli operatori di proiezione sono idempotenti, e, per una nota proprietà  $\sigma(\hat{\pi}_{a_n}) = \{0, 1\}$ . È facile ricavare l'espressione analitica di  $\hat{\pi}_{a_n}$ :

$$\hat{\pi}_{a_n} = |a_n\rangle \langle a_n| \quad (26)$$

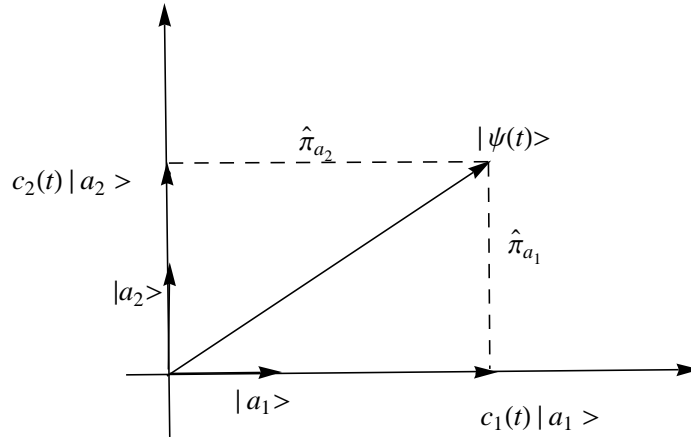


Figura 1: Decomposizione del vettore di stato  $|\psi(t)\rangle$  in un generico istante  $t \in [t_0, t_*)$ , nei vettori componenti  $c_1(t)|a_1\rangle$  e  $c_2(t)|a_2\rangle$ . Nel grafico è raffigurata l'azione degli operatori di proiezione  $\hat{\pi}_{a_1}$  e  $\hat{\pi}_{a_2}$ .

Il “salto” di  $|\psi(t_*)\rangle$  a  $|a_1\rangle$  è noto con la locuzione *collasso della funzione d'onda* in cui ci si riferisce a una funzione d'onda, nel senso che il vettore di stato viene scritto in una rappresentazione opportuna. Ad esempio per un sistema monodimensionale, si ha nello spazio delle coordinate ( $x$ -rappresentazione)

$$\psi(x, t) = \langle x | \psi(t) \rangle,$$

o in una generica rappresentazione ( $\xi$ -rappresentazione)

$$\psi(\xi, t) = \langle \xi | \psi(t) \rangle$$

Senza perdita di generalità supponiamo che

$$|\psi(t_*)\rangle \xrightarrow{\text{misura } A} |a_1\rangle,$$

cioè il risultato della misura di  $A$  è  $a_1$ , come riportato in fig. 2.

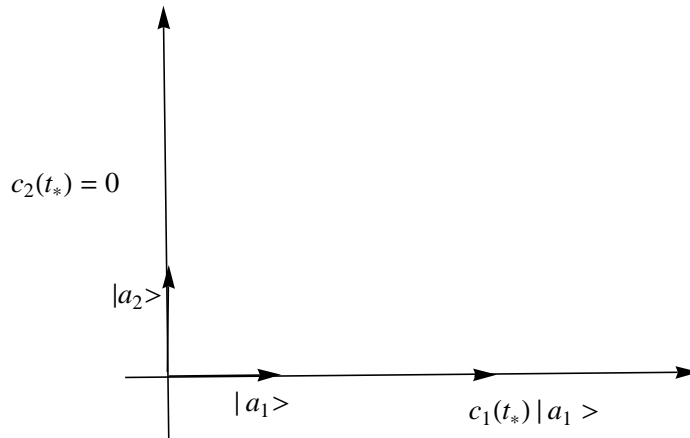


Figura 2: In seguito all'operazione di misura di  $A$ , lo stato  $|\psi(t_*)\rangle$  collassa sul vettore componente  $c_1(t_*) |a_1\rangle$ , onde la suddetta misura è simulata dall'azione dell'operatore di proiezione  $\hat{\pi}_{a_1}$ .

Per  $t \geq t_*$  è  $|\psi(t)\rangle = |a_1\rangle$  o  $|\psi(t)\rangle = c_1(t_*) |a_1\rangle$ , cioè a meno della costante moltiplicativa  $c_1(t_*)$  che verrà cancellata dalla condizione di normalizzazione. Ne consegue che il sistema rimane nell'autostato  $|a_1\rangle$  per ogni  $t > t_*$ . Riguardo al comportamento di  $c_2(t)$ , se non viene eseguita nessuna misura si ha

$$|c_2(t)| = |c_2^{(0)}|, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Viceversa se viene eseguita una misura a  $t_* > t_0$  che fornisce il risultato  $a_1$ :

$$|c_2(t)| = \begin{cases} |c_2^{(0)}|, & t_0 \leq t < t_* \\ 0, & t \geq t_* \end{cases} \quad (27)$$

In altri termini la funzione reale della variabile reale  $t$

$$f(t) = |c_2(t)|,$$

non è continua in  $[t_0, +\infty)$ , giacchè presenta in  $t_*$  una discontinuità di prima specie:

$$\lim_{t \rightarrow t_*^-} f(t) = |c_2^{(0)}|, \quad \lim_{t \rightarrow t_*^+} f(t) = 0,$$



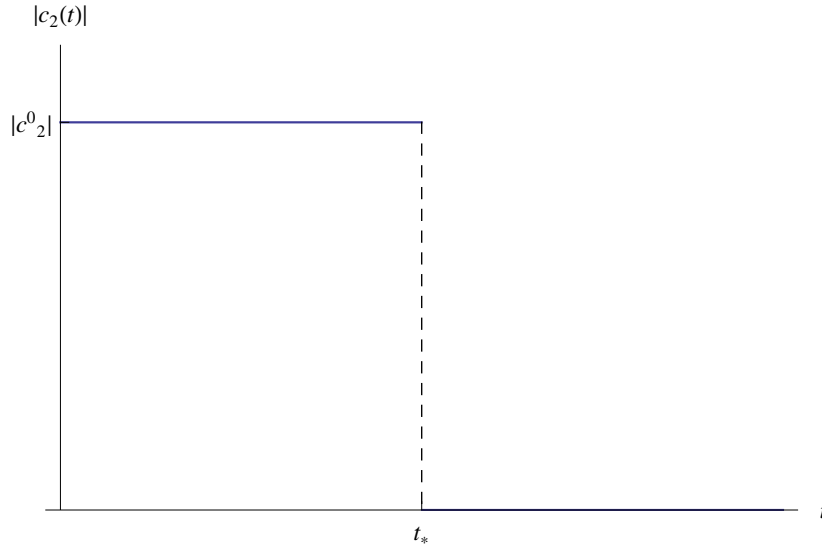


Figura 3: Andamento del grafico della funzione  $f(t) = |c_2(t)|$ . Dal momento che il risultato della misura di  $A$  è  $a_1$ , necessariamente  $f(t \geq t_*)$  è la funzione identicamente nulla. In altri termini, l'istante di misura  $t_*$  è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione reale  $f(t)$ .

con salto  $s(t_*) = -|c_2^{(0)}|$ , come illustrato in fig. 3.

Ciò pone seri problemi interpretativi che vanno sotto il nome di *paradosso della misura* [4]. Tale difficoltà è dovuta all'esistenza di un dualismo all'interno della formalismo della meccanica quantistica. Per essere più precisi, esistono due diverse modalità di evoluzione del vettore di stato. La prima è quella deterministica ovvero regolata dall'equazione differenziale di Schrödinger o, ciò che è lo stesso, dall'applicazione dell'operatore di evoluzione temporale  $\mathcal{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$ :

$$\mathcal{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle, \quad \forall t \geq t_0,$$

Nel caso in esame, l'evoluzione deterministica del vettore di stato è data dalla (7) in cui le componenti di  $|\psi(t)\rangle$  cioè i numeri complessi  $c_n(t)$ , sono funzioni di classe  $C^1$  su  $[t_0, +\infty)$ . La seconda modalità di evoluzione, invece, viene attivata quando si esegue una misura sul sistema quantistico in studio. Si tratta di un'evoluzione non deterministica e non riconducibile all'azione dell'operatore di evoluzione temporale (16), bensì all'applicazione di un operatore di proiezione. Per quanto visto in tale evoluzione il vettore di stato subisce una variazione discontinua dovuta alla discontinuità di uno dei coefficienti  $c_n(t)$ . In altri termini, la riduzione del vettore di stato distrugge la continuità dei coefficienti  $c_n(t)$ . Continuità che è una conseguenza del teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale.

Per quanto precede è l'operazione di misura che determina la riduzione del vettore di stato  $|\psi(t)\rangle$ . Ne consegue che l'apparato di misura svolge un ruolo fondamentale nell'interpretazione fisica del formalismo quantistico. Denotiamo dunque con  $S_{mis}$  tale apparato che risulta essere un sistema macroscopico. Ed è l'interazione di  $S_{mis}$  con  $S_q$  che determina la riduzione di  $|\psi(t)\rangle$ . Tale interazione è matematicamente rappresentata da un operatore di proiezione. In simboli

$$|\psi_0\rangle \xrightarrow{\mathcal{U}} |\psi(t_*)\rangle \xrightarrow{\mathcal{R}} |a_n\rangle, \quad (28)$$

dove  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{R}$  denotano rispettivamente l'evoluzione temporale dello stato iniziale  $|\psi_0\rangle$ , e la riduzione di  $|\psi(t_*)\rangle$  all'autostato  $|a_n\rangle$  in seguito all'operazione di misura.

$\mathcal{U}$  e  $\mathcal{R}$  sono dunque modalità differenti di evoluzione dello stato di  $S_q$ . Ciò è stato ampiamente sostenuto dai seguaci della "filosofia" che sta alla base dell'*interpretazione di Copenhagen* [3] formulata da Niels Bohr. Secondo Bohr il vettore di stato  $|\psi\rangle$  non rappresenta una realtà di livello quantistico ma un ente astratto che descrive la "conoscenza" da parte dello sperimentatore di uno

stato quantico [4]. In particolare, un autostato  $|a_n\rangle$  dell'osservabile  $A$ , rappresenta l'informazione su  $S_q$  attraverso l'operazione di misura e dipende dall'interazione di  $S_q$  con  $S_{mis}$  [3]. Secondo altri fisici [5], invece, il processo  $\mathcal{R}$  è governato da un'equazione di Schrödinger in cui  $H$  è l'hamiltoniana del sistema composto  $S_q \cup S_{mis}$ . A nostro avviso ciò non è possibile, giacchè se la funzione hamiltoniana di  $S_q \cup S_{mis}$  è una funzione onesta, necessariamente le soluzioni della corrispondente equazione differenziale di Schrödinger devono essere funzioni altrettanto oneste. Incidentalmente, secondo l'interpretazione di Copenahen, la riduzione  $\mathcal{R}$  di  $|\psi\rangle$  non è un processo fisico, per cui non avrebbe senso ricercare un'equazione che lo governi. Per Bohr  $\mathcal{R}$  deve essere considerato solo un mezzo, da parte dello sperimentatore, per acquisire una maggiore conoscenza del sistema. In altri termini, il processo  $\mathcal{R}$  è realizzato dalla *conoscenza* e non dalla fisica del sistema [4]. Tale posizione ha delle ricadute notevoli, poichè per Bohr non ha senso assegnare una qualche "realtà" a  $|\psi\rangle$  e quindi in ultima istanza, ai fenomeni quantistici: nessun fenomeno è reale fino a quando non viene osservato. L'unica realtà riconosciuta è quella del mondo classico in cui si trova  $S_{mis}$  e lo sperimentatore che possiamo denotare con  $\Omega$ .

## 2 Interpretazione di Von Neumann

Può essere definita una variante dell'interpretazione di Copenahen. Più specificatamente, Von Neumann estende al sistema composto  $S = S_q \cup S_{mis}$  i postulati della meccanica quantistica<sup>2</sup>, associando a  $S$  lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_{mis}$ , essendo  $\mathcal{H}_q$  e  $\mathcal{H}_{mis}$  gli spazi di Hilbert associati a  $S_q$  e  $S_{mis}$  rispettivamente. L'operatore  $\otimes$  denota il prodotto diretto dei due spazi<sup>3</sup>. Dal momento che  $S_{mis}$  misura i valori assunti dall'osservabile  $A$ , segue necessariamente l'esistenza di una corrispondenza bi-univoca che lega gli autovalori di  $A$  ai valori misurati da  $S_{mis}$ , e poichè  $S_{mis}$  è considerato alla stregua di un sistema quantistico dobbiamo postulare l'esistenza di una osservabile  $B$ , il cui corrispondente operatore hermitiano ha un'equazione agli autovalori del tipo

$$\hat{B} |b_m\rangle = b_m |b_m\rangle, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

Ne consegue che  $\{|b_m\rangle\}$  è una base ortonormale di  $\mathcal{H}_{mis}$  e che  $\dim \mathcal{H}_q = \dim \mathcal{H}_{mis} = N \implies \dim \mathcal{H} = N^2$ . Per quanto precede, i due sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ ,  $\sigma(\hat{A})$  e  $\sigma(\hat{B})$  sono in corrispondenza biunivoca. Esiste cioè un'applicazione biiettiva

$$\begin{aligned} f : \sigma(\hat{A}) &\rightarrow \sigma(\hat{B}) \\ f : a_n &\rightarrow b_n, \end{aligned} \quad (30)$$

cosicchè la conoscenza di  $b_n$  permette di determinare il risultato della misura  $a_n = f^{-1}(b_n)$ , dove  $f^{-1}$  denota l'inversa di (30). Osserviamo poi che il prodotto tensoriale  $|a_n\rangle \otimes |b_m\rangle$  definisce una base ortonormale di  $\mathcal{H}$ . Più precisamente, posto  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  il sistema di vettori  $\{|a_n\rangle \otimes |b_m\rangle\}_{n,m \in \mathcal{N}}$  è una base ortonormale di  $\mathcal{H}$ .

Ciò premesso, supponiamo che  $S_q$  sia inizialmente preparato in un autostato di  $A$ . Precisamente

$$|\psi_0\rangle = |a_n\rangle \in V_{a_n},$$

dove  $V_{a_n}$  è l'autospazio corrispondente all'autovalore  $a_n$  di  $\hat{A}$ . Senza perdita di generalità lo stato iniziale di  $S_{mis}$  è

$$|\phi_0\rangle = |b_1\rangle \in W_{b_1}, \quad \text{con } n \neq 1$$

<sup>2</sup>Tale estensione è giustificata dal fatto che  $S_{mis}$  è composto da un numero elevatissimo di costituenti elementari la cui dinamica è regolata dalla meccanica quantistica.

<sup>3</sup>Ricordiamo che  $\mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_{mis} = \{T \mid T : \mathcal{H}_q^* \times \mathcal{H}_{mis}^* \rightarrow \mathbb{C}, T \text{ è bilineare}\}$ . Cioè  $\mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_{mis}$  è l'insieme delle applicazioni bilineari (tensori controvarianti) definite in  $\mathcal{H}_q^* \times \mathcal{H}_{mis}^*$ , dove l'asterisco denota lo spazio duale.

dove  $W_{b_1}$  è l'autospazio corrispondente all'autovalore  $b_1$  di  $B$ . Ne consegue che lo stato iniziale di  $S = S_q \cup S_{mis}$  è

$$|\Psi_0\rangle = |a_n\rangle \otimes |b_1\rangle \in V_{a_n} \otimes W_{b_1} \quad (31)$$

Se a  $t = t_*$  "accendiamo" l'hamiltoniana  $H_S$  di  $S$ , cioè se nell'istante  $t_*$  eseguiamo una misura di  $A$  facendo interagire lo strumento di misura  $S_{mis}$  con  $S_q$ , si ha che il vettore di stato di  $S$  in seguito alla misura è l'evoluto temporale di (31) al tempo  $t_*$ . Più precisamente, è il risultato dell'applicazione dell'operatore unitario  $\mathcal{U}_S(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S(t-t_0)}$  al vettore  $|\Psi_0\rangle$  per  $t = t_*$ :

$$\begin{aligned} |\Psi(t_*)\rangle &= \mathcal{U}_S(t_*, t_0) |\Psi_0\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S(t_*-t_0)} |a_n\rangle \otimes |b_1\rangle \end{aligned}$$

Cioè, a meno di un inessenziale fattore di fase:

$$|\Psi(t_*)\rangle = |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \in V_{a_n} \otimes W_{b_n} \quad (32)$$

Ne consegue che lo strumento di misura riporta il risultato  $b_n$ , da cui ricaviamo  $a_n = f^{-1}(b_n)$ . Tuttavia, il caso più interessante è quello in cui nell'istante iniziale  $t_0$  il sistema in studio  $S_q$  non si trova in un autostato di  $A$ , ma in una sovrapposizione lineare di autostati

$$|\psi_0\rangle = \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} |a_n\rangle, \quad (33)$$

mentre lo stato iniziale di  $S_{mis}$  è  $|\phi_0\rangle = |b_1\rangle$ . Quindi

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} |a_n\rangle \otimes |b_1\rangle \quad (34)$$

Al tempo  $t = t_*$  accendiamo l'hamiltoniana  $H_S$ , per cui

$$\begin{aligned} |\Psi(t_*)\rangle &= \mathcal{U}_S(t_*, t_0) \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} |a_n\rangle \otimes |b_1\rangle \\ &\stackrel{\mathcal{U}_S \text{ è lineare}}{=} \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} \mathcal{U}_S(t_*, t_0) |a_n\rangle \otimes |b_1\rangle \end{aligned}$$

Ma  $\mathcal{U}_S(t_*, t_0) |a_n\rangle \otimes |b_1\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_{s,n}(t_*-t_0)} |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle$ , per cui

$$|\Psi(t_*)\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle, \quad (35)$$

dove  $c_n(t_*) = c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{s,n}(t_*-t_0)}$ . Dalla (35) vediamo che in seguito all'operazione di misura,  $S$  viene a trovarsi in una sovrapposizione lineare di stati  $|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle$  con  $n = 1, 2, \dots, N$ . Più precisamente riesce

$$|\Psi(t_*)\rangle \in \mathcal{L}(\{|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle\}_{n \in \mathcal{N}})$$

Cioè  $|\Psi(t_*)\rangle$  appartiene al sottospazio vettoriale generato dal sistema di vettori linearmente indipendenti  $\{|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle\}_{n \in \mathcal{N}}$ . In simboli

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} |a_n\rangle \otimes |b_1\rangle \xrightarrow{S_{mis}} |\Psi(t_*)\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle$$

La sovrapposizione lineare iniziale del vettore di stato di  $S_q$  si è trasferita allo strumento di misura  $S_{mis}$  in virtù della linearità dell'operatore di evoluzione temporale o, ciò che è lo stesso, dell'equazione di Schrödinger. Tale sovrapposizione lineare impedisce di conoscere l'autovalore  $b_n$  e, quindi, il risultato della misura  $a_n = f^{-1}(b_n)$ . Abbiamo allora bisogno di un secondo strumento di misura  $S'_{mis}$  a cui associamo quantisticamente lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}'_{mis}$ . Quindi abbiamo un nuovo sistema composto

$$S' = S \cup S'_{mis} \implies \mathcal{H}' = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'_{mis}, \quad \dim \mathcal{H}' = N^3$$

Il sistema  $S'_{mis}$  sarà caratterizzato da un'osservabile  $B'$  tale che

$$\hat{B}' |b'_p\rangle = b'_p |b'_p\rangle, \quad p = 1, 2, \dots, N,$$

onde una base ortonormale di  $\mathcal{H}'$  è  $\{|a_n\rangle \otimes |b_m\rangle \otimes |b'_p\rangle\}_{m,n,p \in \mathcal{N}}$ . Assumiamo (35) come stato iniziale di  $S$ , mentre lo strumento di misura  $S'_{mis}$  è inizialmente preparato in  $|\phi'_0\rangle = |b'_1\rangle$ . Ciò implica che lo stato iniziale di  $S'$  è

$$\begin{aligned} |\Psi'_0\rangle &= |\Psi(t_*)\rangle \otimes |\phi'_0\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N c_n(t_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_1\rangle \end{aligned} \quad (36)$$

Al tempo  $t'_* > t_*$  accendiamo l'hamiltoniana  $H_{S'}$  del sistema composto  $S'$ , per cui

$$\begin{aligned} |\Psi'(t'_*)\rangle &= \mathcal{U}_{S'}(t'_*, t_*) \sum_{n=1}^N c_n(t_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_1\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N c_n(t_*) \mathcal{U}_{S'}(t'_*, t_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_1\rangle \end{aligned}$$

Ma  $\mathcal{U}_{S'}(t'_*, t_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_1\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_{s',n}(t'_*-t_*)} |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle$ , per cui

$$|\Psi'(t'_*)\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t'_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle, \quad (37)$$

dove  $c_n(t'_*) = c_n(t_*) e^{-\frac{i}{\hbar} E_{s',n}(t'_*-t_*)}$ . Dalla (35) vediamo che in seguito all'operazione di misura,  $S'$  viene a trovarsi in una sovrapposizione lineare di stati  $|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle$  con  $n = 1, 2, \dots, N$ . Più precisamente riesce

$$|\Psi'(t'_*)\rangle \in \mathcal{L}(\{|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle\}_{n \in \mathcal{N}})$$

Cioè  $|\Psi'(t'_*)\rangle$  appartiene al sottospazio vettoriale generato dal sistema di vettori linearmente indipendenti  $\{|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle\}_{n \in \mathcal{N}}$ . In simboli

$$|\Psi'_0\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_1\rangle \xrightarrow{S'_{mis}} |\Psi'(t'_*)\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t'_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle$$

Ne consegue che la sovrapposizione lineare iniziale del vettore di stato di  $S$  si è trasferita allo strumento di misura  $S'_{mis}$  in virtù della linearità dell'operatore di evoluzione temporale. Abbiamo allora bisogno di un terzo strumento di misura  $S''_{mis}$  a cui associamo quantisticamente lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}''_{mis}$ . Quindi abbiamo un nuovo sistema composto

$$S'' = S' \cup S''_{mis} \implies \mathcal{H}'' = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''_{mis}, \quad \dim \mathcal{H}'' = N^4$$

Il sistema  $S''_{mis}$  sarà caratterizzato da un'osservabile  $B''$  tale che

$$\hat{B}'' |b''_l\rangle = b''_l |b''_l\rangle, \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

onde una base ortonormale di  $\mathcal{H}'$  è  $\{|a_n\rangle \otimes |b_m\rangle \otimes |b'_p\rangle \otimes |b''_l\rangle\}_{m,n,p,l \in \mathcal{N}}$ . Assumiamo (37) come stato iniziale di  $S''$ , mentre lo strumento di misura è inizialmente preparato in  $|\phi_0''\rangle = |b_1''\rangle$ . Ciò implica che lo stato iniziale di  $S''$  è

$$\begin{aligned} |\Psi_0''\rangle &= |\Psi'(t_*)\rangle \otimes |\phi_0''\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N c_n(t'_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_1''\rangle \end{aligned} \quad (38)$$

Al tempo  $t''_* > t'_*$  accendiamo l'hamiltoniana  $H_{S''}$  del sistema composto  $S''$ :

$$\begin{aligned} |\Psi''(t''_*)\rangle &= \mathcal{U}_{S''}(t''_*, t'_*) \sum_{n=1}^N c_n(t'_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_1''\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N c_n(t'_*) \mathcal{U}_{S''}(t''_*, t'_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_1''\rangle \end{aligned}$$

Ma  $\mathcal{U}_{S''}(t''_*, t'_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_1''\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_{S'',n}(t''_* - t'_*)} |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_1''\rangle$ , per cui

$$|\Psi''(t''_*)\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t'_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_1''\rangle, \quad (39)$$

dove  $c_n(t''_*) = c_n(t'_*) e^{-\frac{i}{\hbar} E_{S'',n}(t''_* - t'_*)}$ . Dalla (35) vediamo che in seguito all'operazione di misura,  $S''$  viene a trovarsi in una sovrapposizione lineare di stati  $|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_n''\rangle$  con  $n = 1, 2, \dots, N$ . Più precisamente riesce

$$|\Psi''(t''_*)\rangle \in \mathcal{L}(\{|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_n''\rangle\}_{n \in \mathcal{N}})$$

Cioè  $|\Psi''(t''_*)\rangle$  appartiene al sottospazio vettoriale generato dal sistema di vettori linearmente indipendenti  $\{|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_n''\rangle\}_{n \in \mathcal{N}}$ . In simboli

$$|\Psi_0''\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t'_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_1''\rangle \xrightarrow{S''_{mis}} |\Psi''(t''_*)\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t'_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_n''\rangle$$

Ne consegue che la sovrapposizione lineare iniziale del vettore di stato di  $S'$  si è trasferita allo strumento di misura  $S''_{mis}$  in virtù della linearità dell'operatore di evoluzione temporale.

Tale procedimento può essere iterato disponendo di una successione di strumenti di misura  $\{S_{mis}, S'_{mis}, \dots, S_{mis}^{(r)}\}$ . La  $r$ -esima iterazione restituisce il sistema composto

$$S^{(r)} = S_q \cup \Sigma_r \quad (40)$$

dove

$$\Sigma_r = \{S_{mis}, S'_{mis}, \dots, S_{mis}^{(r)}\} \quad (41)$$

Lo spazio di Hilbert associato a  $S^{(r)}$  è

$$\mathcal{H}^{(r)} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{mis} \otimes \mathcal{H}'_{mis} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{mis}^{(r)}, \quad \dim \mathcal{H}^{(r)} = N^{r+1}$$

Al tempo  $t_*^{(r)} > t_*^{(r-1)}$  accendiamo l'hamiltoniana  $H_{S^{(r)}}$  di  $S^{(r)}$ :

$$|\Psi^{(r)}(t_*^{(r)})\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(t_*^{(r)}) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b_n''\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r)}\rangle,$$

da cui vediamo che in seguito all'operazione di misura, il sistema viene a trovarsi in una sovrapposizione lineare di stati  $|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b''_n\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r)}\rangle$  con  $n = 1, 2, \dots, N$ . Più precisamente riesce

$$|\Psi^{(r)}(t_*^{(r)})\rangle \in \mathcal{L}\left(\{|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b''_n\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r)}\rangle\}_{n \in \mathcal{N}}\right)$$

Cioè  $|\Psi^{(r)}(t_*^{(r)})\rangle$  appartiene al sottospazio vettoriale generato dal sistema di vettori linearmente indipendenti  $\{|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b''_n\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r)}\rangle\}_{n \in \mathcal{N}}$ . In simboli

$$\begin{aligned} |\Psi_0^{(r)}\rangle &= \sum_{n=1}^N c_n(t_*^{(r-1)}) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b''_n\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r-1)}\rangle \otimes |b_1^{(r)}\rangle \\ \xrightarrow{S_{mis}^{(r)}} |\Psi^{(r)}(t_*^{(r)})\rangle &= \sum_{n=1}^N c_n(t_*^{(r)}) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b''_n\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r-1)}\rangle \otimes |b_n^{(r)}\rangle \end{aligned}$$

Tale conclusione continua a valere nel limite per  $r \rightarrow +\infty$ . Risulta

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \Sigma_r = \Sigma_\infty,$$

dove  $\Sigma_\infty$  è un insieme infinito (numerabile) di strumenti di misura:

$$\Sigma_\infty = \{S_{mis}, S'_{mis}, \dots, S_{mis}^{(r)}, \dots\} \quad (42)$$

Abbiamo quindi il sistema composto da un numero infinito di sottosistemi

$$S^{(\infty)} = S_q \cup \Sigma_\infty, \quad (43)$$

a cui corrisponde lo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H}^{(\infty)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^{(r)}, \quad (44)$$

ovvero il prodotto diretto infinito

$$\mathcal{H}^{(\infty)} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{mis} \otimes \mathcal{H}'_{mis} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{mis}^{(r)} \otimes \dots, \quad (45)$$

che è uno spazio vettoriale infinito-dimensionale. Infatti

$$\dim \mathcal{H}^{(\infty)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} N^{r+1} = +\infty$$

Se al tempo  $\tau_*$  accendiamo l'hamiltoniana  $H_{S^{(\infty)}}$  di  $S^{(\infty)}$  lo stato del sistema diviene

$$|\Psi^{(\infty)}(\tau_*)\rangle = \sum_{n=1}^N c_n(\tau_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b''_n\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r)}\rangle \otimes \dots,$$

da cui vediamo che in seguito alla  $r$ -esima operazione di misura per  $r \rightarrow +\infty$ , il sistema viene a trovarsi in una sovrapposizione lineare di stati

$$|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b''_n\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r)}\rangle \otimes \dots$$

con  $n = 1, 2, \dots, N$ . Più precisamente riesce

$$|\Psi^{(\infty)}(\tau_*)\rangle \in \mathcal{L}\left(\{|a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b''_n\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r)}\rangle \otimes \dots\}_{n \in \mathcal{N}}\right)$$

Cioè  $|\Psi^{(\infty)}(\tau_*)\rangle$  appartiene al sottospazio vettoriale generato dal sistema di vettori linearmente indipendenti  $\left\{ |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b''_n\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r)}\rangle \otimes \dots \right\}_{n \in \mathcal{N}}$ , e tale sottospazio ha dimensione  $N$ :

$$\dim \mathcal{L} \left( \left\{ |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes |b'_n\rangle \otimes |b''_n\rangle \otimes \dots \otimes |b_n^{(r)}\rangle \otimes \dots \right\}_{n \in \mathcal{N}} \right) = N$$

Ne concludiamo che infinite misure non risolvono la sovrapposizione lineare iniziale. Secondo Von Neumann nell'insieme  $\Sigma_r$  bisogna includere gli organi sensoriali dello sperimentatore  $\Omega$ , e a differenza di uno strumento di misura,  $\Omega$  è in grado di "leggere" il proprio stato attraverso la sua capacità di introspezione, pervenendo quindi al risultato della misura, ovvero alla conoscenza dello stato del sistema quantistico  $S_q$ . In simboli

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{S_{mis}} \sum_{n=1}^N c_n(t_*) |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \xrightarrow{\Omega} |a_j\rangle \otimes |b_j\rangle, \text{ con } j \in \{1, \dots, N\}$$

Il carattere soggettivo della suddetta conoscenza è evidente; tuttavia per i fautori dell'interpretazione di Von Neumann ciò non costituisce una difficoltà [3], dato che «non è (dunque) un'interazione misteriosa fra l'apparecchio di misura e l'oggetto che produce nella misura la comparsa di una nuova  $\psi$  del sistema. È semplicemente la coscienza di un Io che si separa dalla funzione  $\psi$  primitiva e costituisce una nuova oggettività in virtù della sua osservazione cosciente, attribuendo con ciò all'oggetto una nuova funzione d'onda  $u(x)$ » [7].

### 3 Il paradosso del gatto di Schrödinger

A tale proposito Schrödinger ideò uno esperimento concettuale noto come *paradosso del gatto di Schrödinger*, di cui proponiamo una versione per così dire, astratta, senza cioè riferirsi a un sistema quantistico specifico. In una scatola cubica di spigolo  $L$  si considerino un gatto  $\mathcal{G}$  e un sistema quantistico  $S_q$  inizialmente preparato in una sovrapposizione lineare di autostati di una osservabile  $A$

$$|\psi_0\rangle = \sum_{n=1}^N c_n^{(0)} |a_n\rangle$$

In particolare se  $A = H$  e  $N = 2$

$$|\psi_0\rangle = c_1^{(0)} |E_1\rangle + c_2^{(0)} |E_2\rangle \quad (E_2 > E_1) \quad (46)$$

$S_q$  è poi collegato a un meccanismo  $\mathcal{M}$  in grado di rompere una fiala  $\mathcal{F}$  contenente un gas tossico. La minima energia necessaria ad  $\mathcal{M}$  per rompere  $\mathcal{F}$  è  $E_{\min} = E_2$ . Quindi

$$\begin{aligned} |E_1\rangle &\implies \mathcal{M} \text{ non rompe } \mathcal{F} \implies \mathcal{G} \text{ è vivo} \\ |E_2\rangle &\implies \mathcal{M} \text{ rompe } \mathcal{F} \implies \mathcal{G} \text{ è morto} \end{aligned}$$

Considerando  $\mathcal{G}$  come un sistema quantistico si ha che l'osservabile  $G$  coinvolta nell'interazione  $\mathcal{G} \leftrightarrow S_q$  è tale che denotando con  $\hat{G}$  il corrispondente operatore hermitiano definito nell'appropriato spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathcal{G}}$ , l'equazione agli autovalori si scrive

$$\begin{aligned} \hat{G} |\mathcal{G}_+\rangle &= \mathcal{G}_+ |\mathcal{G}_+\rangle \\ \hat{G} |\mathcal{G}_-\rangle &= \mathcal{G}_- |\mathcal{G}_-\rangle \end{aligned} \quad (47)$$

dove gli autovettori  $|\mathcal{G}_+\rangle, |\mathcal{G}_-\rangle$  denotano gli stati di vita e morte rispettivamente e compongono una base ortonormale di  $\mathcal{H}_{\mathcal{G}} = \mathbb{C}^2$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}_+ | \mathcal{G}_+ \rangle &= \langle \mathcal{G}_- | \mathcal{G}_- \rangle = 1 \\ \langle \mathcal{G}_+ | \mathcal{G}_- \rangle &= \langle \mathcal{G}_- | \mathcal{G}_+ \rangle = 0 \end{aligned}$$

Pertanto

$$\forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{G}}, \exists \gamma_{\pm} \in \mathbb{C} \mid |\phi\rangle = \gamma_+ |\mathcal{G}_+\rangle + \gamma_- |\mathcal{G}_-\rangle$$

L'applicazione iniettiva (30) si scrive

$$\begin{aligned} f : \sigma(\hat{H}) &\rightarrow \sigma(\hat{G}) \\ f : E_n &\rightarrow f(E_n), \end{aligned}$$

con

$$f(E_1) = \mathcal{G}_+, \quad f(E_2) = \mathcal{G}_-$$

A questo punto è chiaro che il gatto  $\mathcal{G}$  agisce da strumento di misura<sup>4</sup>, per cui

$$S = S_q \cup \mathcal{G}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{G}},$$

con  $\mathcal{H}_q = \mathbb{C}^2$ . Inizialmente  $\mathcal{G}$  è vivo, i.e.  $\mathcal{G}$  è preparato nello stato

$$|\phi_0\rangle = |\mathcal{G}_+\rangle \in W_{\mathcal{G}_+},$$

essendo  $W_{\mathcal{G}_+}$  l'autospazio corrispondente all'autovalore  $\mathcal{G}_+$ . Lo stato iniziale di  $S$  è quindi

$$|\Psi_0\rangle = c_1^{(0)} |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle + c_2^{(0)} |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \quad (48)$$

L'evoluto temporale al tempo  $t$  è

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= c_1^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S(t-t_0)} |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle + c_2^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S(t-t_0)} |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \\ &= c_1(t) |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle + c_2(t) |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle, \end{aligned} \quad (49)$$

dove  $c_n(t) = c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{S,n}(t-t_0)}$ . Ne consegue che a tutti i tempi lo stato del sistema composto  $S = S_q \cup \mathcal{G}$  è una sovrapposizione lineare di  $|E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle$  e  $|E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle$  o, ciò che è lo stesso, il gatto viene a trovarsi - a tutti i tempi - in una sovrapposizione di vita e morte. Più precisamente riesce

$$|\Psi(t)\rangle \in \mathcal{L}(\{|E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle, |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle\}), \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Per tentare di “risolvere” la sovrapposizione lineare, eseguiamo un'introduzione virtuale<sup>5</sup> di un secondo gatto  $\mathcal{G}'$  (vivo) nella scatola. In tal modo otteniamo un nuovo sistema

$$S' = S \cup \mathcal{G}', \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{G}'}$$

$\mathcal{G}'$  è caratterizzato da una osservabile  $G'$  la cui equazione agli autovalori è

$$\hat{G}' |\mathcal{G}'_{\pm}\rangle = \mathcal{G}'_{\pm} |\mathcal{G}'_{\pm}\rangle$$

Assumiamo  $|\Psi(t)\rangle$  (eq. 49) per  $t = t_* > t_0$  come stato iniziale di  $S$  mentre, per quanto detto,  $\mathcal{G}'$  è inizialmente preparato in  $|\mathcal{G}'_+\rangle$ . Ciò implica che lo stato iniziale di  $S'$  è

$$\begin{aligned} |\Psi'_0\rangle &= |\Psi(t_*)\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \\ &= c_1(t_*) |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle + c_2(t_*) |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle, \end{aligned}$$

il cui evoluto temporale al tempo  $t > t_*$  è

$$|\Psi'(t)\rangle = c_1(t_*) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{S'}(t-t_*)} |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle + c_2(t_*) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{S'}(t-t_*)} |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \quad (50)$$

<sup>4</sup>Per semplicità trascuriamo la capacità introspettiva di  $\mathcal{G}$  e quindi la sua capacità di separarsi da una sovrapposizione lineare.

<sup>5</sup>Senza cioè perturbare il sistema  $S = S_q \cup \mathcal{G}$ .



Cioè

$$|\Psi'(t)\rangle = c_1(t) |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle + c_2^{(0)} |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \quad (51)$$

dove  $c_n(t) = c_n(t_*) e^{-\frac{i}{\hbar} E_{S',n}(t-t_*)}$ . Ne consegue che a tutti i tempi lo stato del sistema composto  $S' = S \cup \mathcal{G}'$  è una sovrapposizione lineare di  $|E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle$  e  $|E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle$  o, ciò che è lo stesso, anche il secondo gatto  $\mathcal{G}'$  viene a trovarsi in una sovrapposizione di vita e morte. Più precisamente riesce

$$|\Psi'(t)\rangle \in \mathcal{L} \left( \left\{ |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle, |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \right\} \right), \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Eseguendo un'introduzione virtuale di un terzo gatto  $\mathcal{G}''$  (vivo) nella scatola, si ottiene un nuovo sistema

$$S'' = S' \cup \mathcal{G}'', \quad \mathcal{H}'' = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{G}''}$$

$\mathcal{G}''$  è caratterizzato da una osservabile  $G''$  la cui equazione agli autovalori è

$$\hat{G}'' |\mathcal{G}''_{\pm}\rangle = \mathcal{G}''_{\pm} |\mathcal{G}''_{\pm}\rangle$$

Assumiamo  $|\Psi'(t)\rangle$  (eq. (51)) per  $t = t'_* > t_*$  come stato iniziale di  $S'$  mentre, per quanto detto,  $\mathcal{G}''$  è inizialmente preparato in  $|\mathcal{G}''_+\rangle$ . Ciò implica che lo stato iniziale di  $S''$  è

$$\begin{aligned} |\Psi''_0\rangle &= |\Psi'(t'_*)\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle \\ &= c_1(t'_*) |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle + c_2(t'_*) |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle, \end{aligned}$$

il cui evoluto temporale al tempo  $t > t'_*$  è

$$|\Psi''(t)\rangle = c_1(t'_*) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{S''}(t-t'_*)} |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle + c_2(t'_*) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{S''}(t-t'_*)} |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle \quad (52)$$

Cioè

$$|\Psi''(t)\rangle = c_1(t) |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle + c_2(t) |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle \quad (53)$$

dove  $c_n(t) = c_n(t'_*) e^{-\frac{i}{\hbar} E_{S'',n}(t-t'_*)}$ . Ne consegue che a tutti i tempi lo stato del sistema composto  $S'' = S \cup \mathcal{G}''$  è una sovrapposizione lineare di  $|E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle$  e  $|E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle$  o, ciò che è lo stesso, anche il terzo gatto  $\mathcal{G}''$  viene a trovarsi in una sovrapposizione di vita e morte. Più precisamente riesce

$$|\Psi''(t)\rangle \in \mathcal{L} \left( \left\{ |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle, |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle \right\} \right), \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Tale procedimento può essere iterato disponendo di  $r + 1$  gatti vivi quali elementi dell'insieme  $\Sigma_r = \{\mathcal{G}, \mathcal{G}', \dots, \mathcal{G}^{(r)}\}$ . La  $r$ -esima iterazione restituisce il sistema composto

$$S^{(r)} = S_q \cup \Sigma_r \quad (54)$$

Lo spazio di Hilbert associato a  $S^{(r)}$  è

$$\mathcal{H}^{(r)} = \mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{G}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{G}'} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{G}^{(r)}}, \quad \dim \mathcal{H}^{(r)} = 2^{r+1},$$

giacchè  $\dim \mathcal{H}_q = \dim \mathcal{H}_{\mathcal{G}} = \dim \mathcal{H}_{\mathcal{G}'} = \dots = \dim \mathcal{H}_{\mathcal{G}^{(r)}} = 2$ . Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} |\Psi^{(r)}(t)\rangle &= c_1(t) |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}^{(r)}_+\rangle \\ &\quad + c_2(t) |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}^{(r)}_-\rangle \end{aligned}$$

Ne consegue che a tutti i tempi lo stato del sistema composto  $S^{(r)} = S_q \cup \Sigma_r$  è una sovrapposizione lineare di  $|E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}_+^{(r)}\rangle$  e  $|E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}_-^{(r)}\rangle$  o, ciò che è lo stesso, anche l'*r-esimo* gatto  $\mathcal{G}^{(r)}$  viene a trovarsi in una sovrapposizione di vita e morte. Più precisamente riesce

$$|\Psi''(t)\rangle \in \mathcal{L} \left( \left\{ |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}_+^{(r)}\rangle, |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}_-^{(r)}\rangle \right\} \right)$$

Tale conclusione continua a valere nel limite per  $r \rightarrow +\infty$ . Risulta

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \Sigma_r = \Sigma_\infty,$$

dove  $\Sigma_\infty$  è un insieme infinito di gatti vivi:

$$\Sigma_\infty = \{\mathcal{G}, \mathcal{G}', \dots, \mathcal{G}^{(r)}, \dots\} \quad (55)$$

Abbiamo quindi il sistema composto da un numero infinito di sottosistemi

$$S^{(\infty)} = S_q \cup \Sigma_\infty, \quad (56)$$

a cui corrisponde lo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H}^{(\infty)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^{(r)}, \quad (57)$$

ovvero il prodotto diretto infinito

$$\mathcal{H}^{(\infty)} = \mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{G}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{G}'} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{G}^{(r)}} \otimes \dots, \quad (58)$$

che è uno spazio vettoriale infinito-dimensionale. Infatti

$$\dim \mathcal{H}^{(\infty)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} 2^{r+1} = +\infty$$

Lo stato del sistema  $S^{(\infty)}$  è a tutti i tempi

$$\begin{aligned} |\Psi^{(\infty)}(t)\rangle = & c_1(t) \left[ |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}_+^{(r)}\rangle \otimes \dots \right] \\ & + c_2(t) \left[ |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}_-^{(r)}\rangle \otimes \dots \right], \end{aligned}$$

da cui vediamo che in seguito alla *r-esima* introduzione virtuale del gatto  $\mathcal{G}^{(r)}$  per  $r \rightarrow +\infty$ , il sistema viene a trovarsi in una sovrapposizione lineare di stati

$$\left[ |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}_+^{(r)}\rangle \otimes \dots \right], \quad \left[ |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}_-^{(r)}\rangle \otimes \dots \right],$$

o, ciò che è lo stesso l'*r-esimo* gatto  $\mathcal{G}^{(r)}$  per  $r \rightarrow +\infty$ , viene a trovarsi in una sovrapposizione lineare di vita e morte. Più precisamente riesce

$$|\Psi^{(\infty)}(t)\rangle \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_2), \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Cioè  $|\Psi^{(\infty)}(t)\rangle$  appartiene al sottospazio vettoriale  $\mathcal{V}_2$  (2-dimensionale) generato dal sistema di vettori linearmente indipendenti

$$\left\{ \left[ |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\mathcal{G}'_+\rangle \otimes |\mathcal{G}''_+\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}_+^{(r)}\rangle \otimes \dots \right], \left[ |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\mathcal{G}'_-\rangle \otimes |\mathcal{G}''_-\rangle \otimes \dots \otimes |\mathcal{G}_-^{(r)}\rangle \otimes \dots \right] \right\}$$

Ne concludiamo che l'introduzione virtuale di un numero infinito di gatti vivi nella scatola non risolve la sovrapposizione lineare iniziale. In altri termini, la sovrapposizione lineare si conserva anche per un numero infinito di gatti. Secondo l'interpretazione di Von Neumann la sovrapposizione lineare di vita e morte può essere risolta solo aprendo la scatola e osservando lo stato del gatto e quindi, del sistema quantistico:

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\mathcal{G}} c_1 |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle + c_2 |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \xrightarrow{\Omega} |E_j\rangle \otimes |\mathcal{G}_k\rangle,$$

con  $j \in \{1, 2\}$  e  $k = \pm$ . Precisamente

$$\begin{aligned} j = 1 &\implies k = + \\ j = 2 &\implies k = - \end{aligned}$$

## 4 Interpretazione a più mondi (Everett)

Ritorniamo al caso del sistema quantistico studiato nel paragrafo 1. Per quanto visto, l'evoluzione temporale dello stato iniziale  $|\psi_0\rangle$  seguita da una misura di  $A$  è simbolicamente rappresentata da

$$|\psi_0\rangle \xrightarrow{\mathcal{U}} |\psi(t_*)\rangle \xrightarrow{\mathcal{R}} |a_n\rangle$$

Ricordiamo che  $\mathcal{U}$  ed  $\mathcal{R}$  denotano rispettivamente l'evoluzione temporale e la riduzione del vettore di stato in seguito all'operazione di misura.

### 1. Evoluzione temporale ( $\mathcal{U}$ )

Si tratta di un processo deterministico, in quanto regolato dal problema di Cauchy 13, onde l'evoluzione temporale è univocamente determinata dallo stato iniziale  $|\psi_0\rangle$ .

### 2. Riduzione del vettore di stato ( $\mathcal{R}$ )

È un processo non deterministico generato dall'operazione di misura (Copenaghen) o dalla coscienza dell'osservatore (Von Neumann). La natura non deterministica di  $\mathcal{R}$  implica che tale processo non è univocamente determinato dallo stato  $|\psi(t_*)\rangle$ .

Nell'interpretazione a più mondi, nota con l'acronimo MWI o *interpretazione di Everett*, il processo  $\mathcal{R}$  viene "cancellato" conservando solo il processo di evoluzione temporale, mentre i risultati  $a_1, \dots, a_N$  di una misura di  $A$  si realizzano in  $N$  universi distinti. Più precisamente, in seguito all'operazione di misura l'universo si riproduce in  $N$  copie  $U_1, \dots, U_N$  e gli autovalori  $a_1, \dots, a_N$  saranno misurati da copie distinte  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  dell'osservatore  $\Omega$ . Nella MWI l'eliminazione di  $\mathcal{R}$  si giustifica osservando che non si tratta un processo fisico, bensì di un processo legato all'informazione che l'osservatore  $\Omega$  ha di  $S_q$ . L'unico processo reale è  $\mathcal{U}$ , per cui non è possibile attribuire attraverso  $|\psi\rangle$  un qualche livello di realtà al sistema quantistico  $S_q$ . Si noti che tale posizione è identica a quella dell'interpretazione di Copenaghen; tuttavia, mentre Bohr sostiene che  $\mathcal{R}$  pur non derivando dalla fisica del sistema, determina comunque la riduzione del vettore di stato. Di contro, per MWI tale riduzione non avviene mai e ciò recupera la continuità della funzione vettoriale  $|\psi(t)\rangle$  o, ciò che è lo stesso, delle  $N$  funzioni reali  $|c_1(t)|, \dots, |c_N(t)|$ , recuperando in tal modo il determinismo fisico. Il prezzo da pagare, però, è l'introduzione di  $N$  copie dell'universo o meglio di  $N$  universi inglobati in un unico oggetto denominato *multiverso*.

## 5 Il paradosso del gatto di Schrödinger nella MWI

Riscriviamo l'equazione che definisce il vettore di stato al generico istante  $t$  del sistema  $S = S_q \cup \mathcal{G}$

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t) |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle + c_2(t) |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle$$

Per quanto visto nel paragrafo precedente, MWI include l'osservatore  $\Omega$  nel sistema composto, onde

$$S = S_q \cup \mathcal{G} \cup \Omega, \quad (59)$$

per cui detto  $\mathcal{H}_\Omega$  lo spazio di Hilbert associato a  $\Omega$ , si ha che lo spazio di Hilbert di  $S$  è

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}_\Omega \quad (60)$$

Associare uno spazio di Hilbert ad  $\Omega$ , equivale a trattare quest'ultimo come un sistema quantistico, assumendo come stati quantistici di  $\Omega$  le percezioni che  $\Omega$  medesimo ha degli stati  $|\mathcal{G}_+\rangle$  e  $|\mathcal{G}_-\rangle$  di  $\mathcal{G}$ . Ciò si realizza attraverso una osservabile che denotiamo con lo stesso simbolo utilizzato per indicare l'osservatore, cioè con  $\Omega$ , la cui equazione agli autovalori si scrive

$$\hat{\Omega} |\Omega_\pm\rangle = \Omega_\pm |\Omega_\pm\rangle, \quad (61)$$

dove

$$\begin{aligned} |\Omega_+\rangle &= \text{stato in cui l'osservatore percepisce il gatto vivo} \\ |\Omega_-\rangle &= \text{stato in cui l'osservatore percepisce il gatto morto} \end{aligned}$$

Tutto ciò implica che al tempo  $t$  il vettore di stato di  $S$  è

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t) |E_1\rangle \otimes |\mathcal{G}_+\rangle \otimes |\Omega_+\rangle + c_2(t) |E_2\rangle \otimes |\mathcal{G}_-\rangle \otimes |\Omega_-\rangle \quad (62)$$

Agli autostati  $|\Omega_+\rangle, |\Omega_-\rangle$  corrispondono due copie distinte dell'osservatore, ciascuna delle quali osserva gli stati possibili di  $\mathcal{G}$ , per cui non si verifica la riduzione del vettore di stato (62).

## Riferimenti bibliografici

- [1] Caldirola P., Cirelli, R. Prosperi G.M., *Introduzione alla Fisica Teorica*, BUR, 1982
- [2] Dirac P. A. M., *I principi della Meccanica Quantistica*, Boringhieri, Torino, 1959.
- [3] Caldirola P., *Dalla microfisica alla macrofisica*, Mondadori, Milano, 1974.
- [4] Penrose R., *La strada che porta alla realtà*. BUR, 2007.
- [5] Fok V.A., *Uber der Deutung der Quantum mechanick*, in Max Planck FestCherft, Berlino, 1958
- [6] Neumann J. V. , *Matematical Foundation of Quantum Mechanics*, Princeton, 1955.
- [7] London F., Bauer E., *La théorie de la mesure de l'observation en mécanique quantique*, in Actualités scientifiques et industrielles, 777, Parigi 1939.
- [8] Everett H., *Rev. Mod. Phys*, **29**, 454 (1957). Available at <http://tinyurl.com/everettw>