1 Le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\tan x$

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Guardiamo la fig. 1.

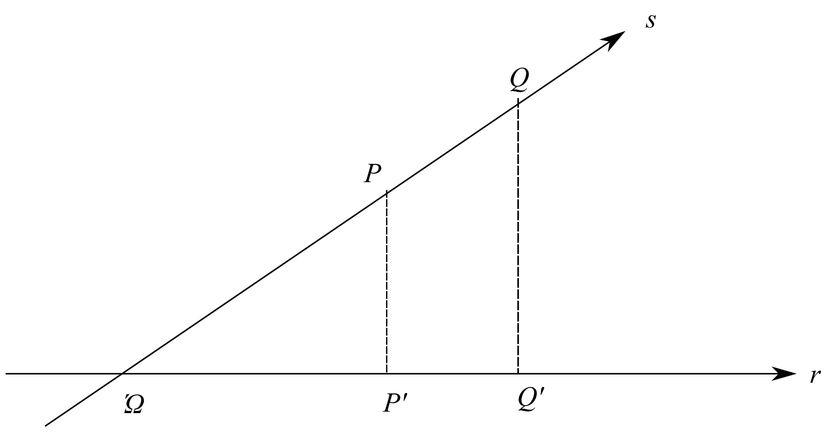

Figura 1: Le rette r e s si intersecano nel punto Ω formando un angolo acuto.

Utilizzando ancora la similitudine dei triangoli $\Omega PP'$ e $\Omega QQ'$ si ha:

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{\Omega P'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q'}} \tag{1}$$

Anche in questo caso si ha che il rapporto (1) e il suo reciproco, dipendono solo dall'angolo in Ω. i.e da $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Abbiamo, quindi, la funzione:

$$\underset{x \longrightarrow \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q'}},\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{f_1 : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}} \quad , \tag{2}$$

e la sua reciproca:

$$\underset{x \longrightarrow \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{QQ'}},\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{g_1 : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}} \tag{3}$$

Poniamo per definizione:

$$f_1(x) = \tan x,\ g_1(x) = \frac{1}{f_1(x)} = \cot x, \tag{4}$$

cioè g_1 è la reciproca di f_1. Inoltre:

$$\frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}} \frac{\overline{\Omega Q}}{\overline{\Omega Q'}} = \frac{\sin x}{\cos x},$$

per cui:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \tag{5}$$

È possibile prolungare f_1 e g_1 da $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$? Iniziamo con $\tan x$:

$$\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$
$$\tan \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0} = 0 \quad (!)$$

In altri termini, la funzione $\tan x$ non è definita in $x = \frac{\pi}{2}$, per cui può essere prolungata da $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Passiamo a $\cot x$:

$$\cot 0 = \frac{\cos 0}{\sin 0} = \frac{1}{0} \quad (!)$$
$$\cot \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$$

In altri termini, la funzione $\cot x$ non è definita in $x = 0$, per cui $\cot x$ può essere prolungata da $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Quindi scriviamo:

$$\underset{x \longrightarrow \tan x, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)}{f_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}} \quad , \qquad \underset{x \longrightarrow \cot x, \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]}{g_1 : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}} \tag{6}$$

Per interpretare geometricamente la funzione tangente e la funzione cotangente, tracciamo la circonferenza trigonometrica (fig. 2), da cui vediamo, che dette τ e τ' rispettivamente la retta tangente a Γ in U e la retta tangente a Γ in V, si ha che $\tan x$ e $\cot x$ sono rispettivamente l'ordinata e l'ascissa dei punti $T \in \tau \cap s$, $T' \in \tau' \cap s$. Infatti:

$$\tan x = \frac{\overline{PN}}{\overline{\Omega N}} = \frac{\overline{UT}}{\overline{\Omega U}} \underset{\overline{\Omega U}=1}{=} \overline{UT},$$

da cui $T(1, \tan x)$. Il penultimo passaggio si giustifica tenendo conto della similitudine dei triangoli ΩPN e ΩTU. Inoltre, dalla fig. 2 vediamo che la $\cot x$ si esprime oltre che come $\frac{\overline{\Omega N}}{\overline{PN}}$ anche come[1] $\frac{\overline{VT'}}{\overline{\Omega V}}$, ma $\overline{\Omega V} = 1$, per cui $\cot x = \overline{VT'}$.

$$\cot x = \frac{\overline{\Omega N}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{VT'}}{\overline{\Omega V}} \underset{\overline{\Omega V}=1}{=} \overline{VT'}$$

La funzione $f_1(x) = \tan x$ è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, avendosi:

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 \leq \tan x < +\infty$$

Infatti, per $x = 0$ la semiretta s coincide con il semiasse positivo $\xi \Longrightarrow T \equiv U \Longrightarrow \tan 0 = 0$, come appunto deve essere. Al crescere di x ($< \frac{\pi}{2}$) la semiretta s ruota attorno a Ω nel verso positivo delle rotazioni; conseguemente, il punto T si sposta lungo la retta τ nel verso delle ordinate crescenti. Quando $x = \frac{\pi}{2}$, s è parallela a τ per cui T è all'infinito.

La funzione $g_1(x) = \cot x$ è strettamente decrescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, avendosi:

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow +\infty > \cot x \geq 0$$

Infatti, per $x = 0$ la semiretta s coincide con il semiasse positivo ξ; conseguentemente è parallela a τ' e ciò implica che il punto di intersezione T' è all'infinito. Al crescere di x ($< \frac{\pi}{2}$) la semiretta s ruota attorno a Ω nel verso positivo delle rotazioni; conseguentemente, il punto T' si sposta lungo τ' avvicinandosi a V, cioè nel verso delle ascisse decrescenti. Quando $x = \frac{\pi}{2}$, s è sovrapposta al semiasse positivo $\eta \Longrightarrow T' \equiv V \Longrightarrow \cot \frac{\pi}{2} = 0$.

Inoltre:

$$f_1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$$
$$g_1\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, +\infty)$$

Le (5) permettono di prolungare f_1 e g_2 su $X_1 \subset \mathbb{R}$ e su $X_2 \subset \mathbb{R}$ rispettivamente. Per essere più precisi:

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}, \ X_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} \tag{7}$$

[1] In quanto gli angoli in Ω e in T' sono uguali.

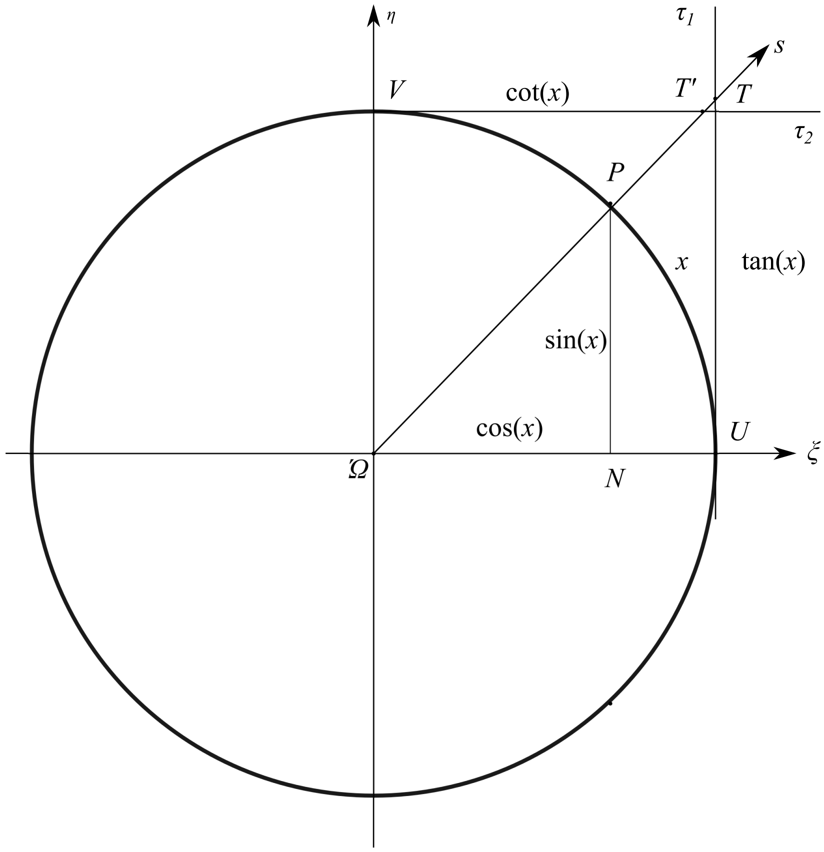

Figura 2: Gli angoli $\widehat{U\Omega T}$ e $\widehat{VT'\Omega}$ sono uguali, per cui $\cot x = \frac{\overline{UT}}{\overline{\Omega U}}$.

1.0.1 Studio della funzione $f_1(x) = \tan x$

Dalla prima delle (7):

$$\begin{aligned} X_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; \forall k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Cioè:

$$X_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

Dalla $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ci aspettiamo che $\tan x$ sia periodica. Per determinare il periodo osserviamo che:

$$\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x, \;\; \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x,$$

onde:

$$\tan(x + k\pi) = \frac{(-1)^k \sin x}{(-1)^k \cos x} = \tan x, \;\; \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ne consegue che $\tan x$ è periodica di periodo π. Ciò ci consente di limitare lo studio della funzione all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ o a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Nel primo caso ci viene in aiuto anche la parità della funzione. Infatti: $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\tan x$, onde è funzione dispari e il relativo grafico è simmetrico rispetto all'origine. La simmetria ci dice che la funzione è strettamente crescente in $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, giacchè tale è la sua monotonia in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Nelle figg. 3-4-5- riportiamo il grafico della restrizione di $\tan x$ a vari intervalli.

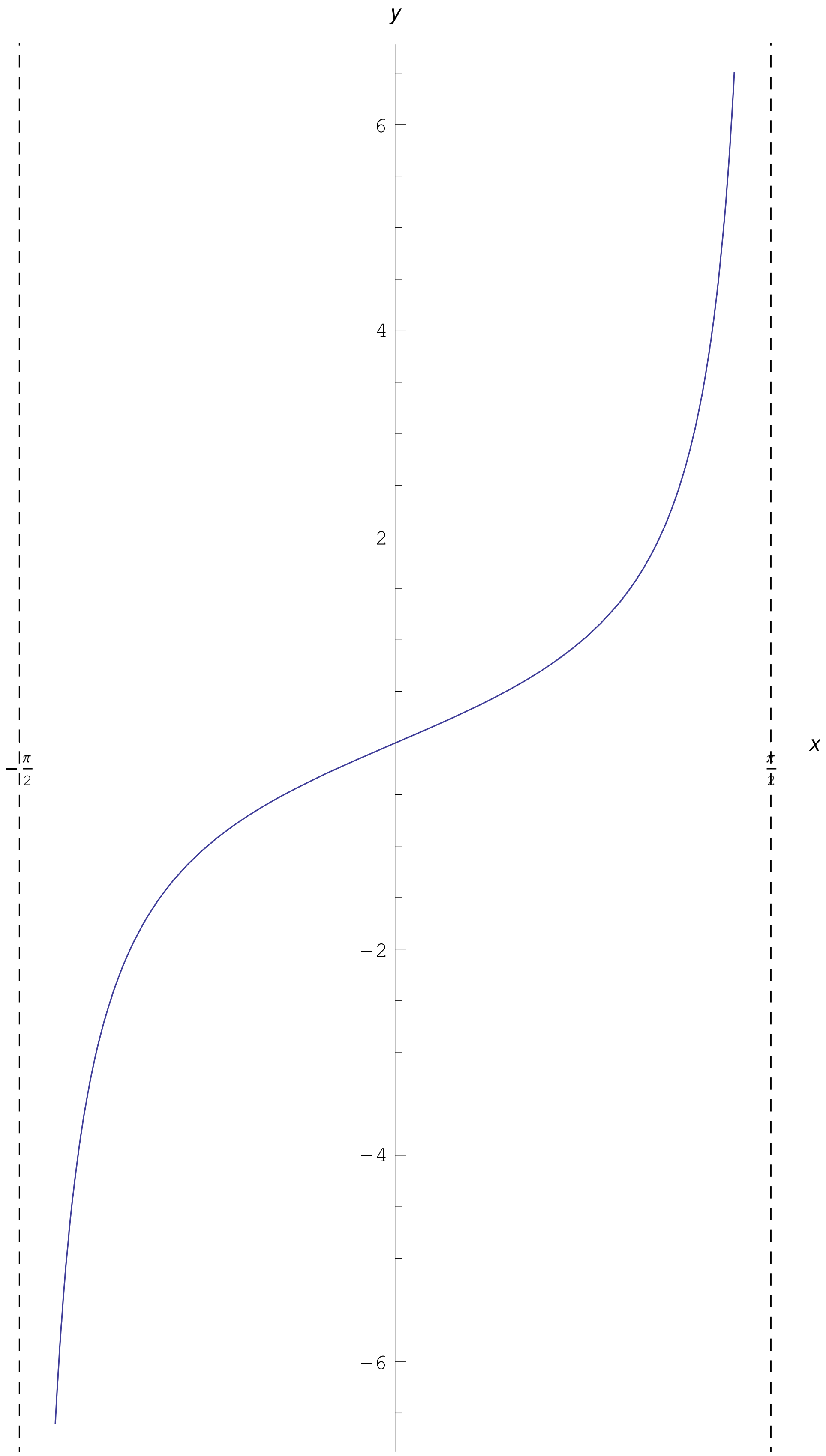

Figura 3: Grafico di $\tan x$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

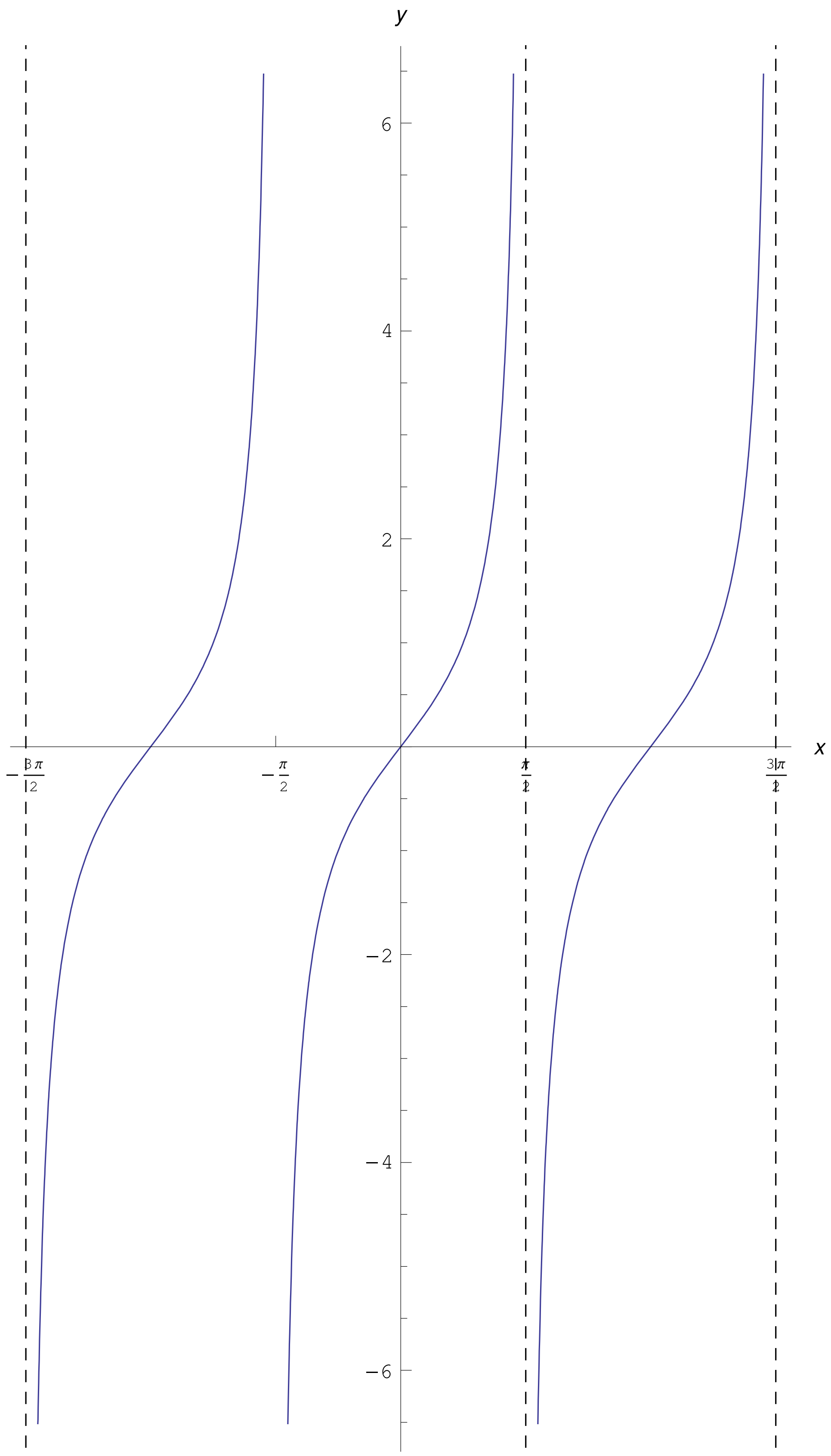

Figura 4: Grafico di $\tan x$ in $\left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right) - \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$.

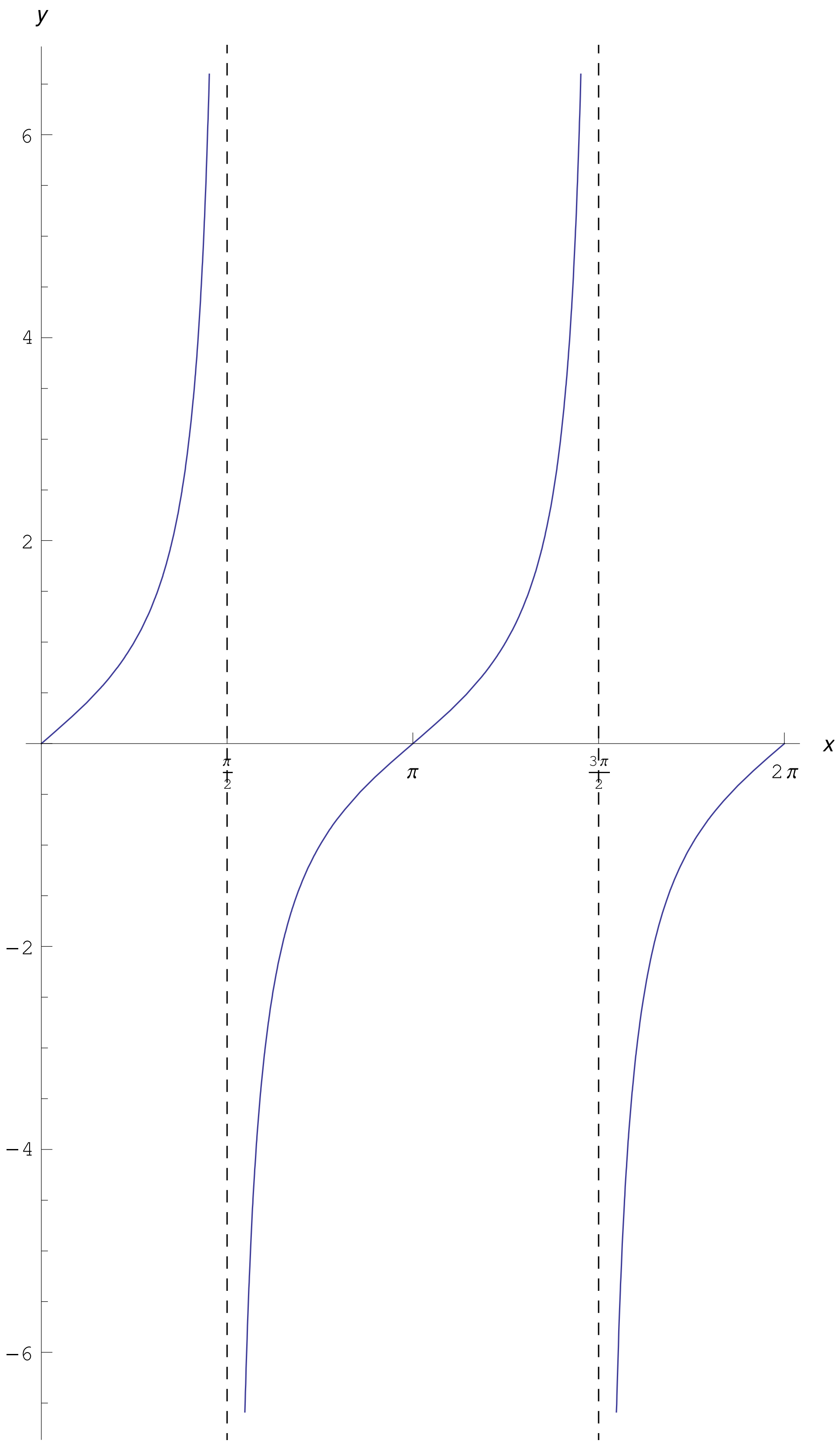

Figura 5: Grafico di $\tan x$ in $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$.

1.0.2 Studio della funzione $g_1(x) = \cot x$

Dalla prima delle (7):

$$\begin{aligned} X_2 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{R} - \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Cioè:

$$X_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$$

La funzione è periodica di periodo π, giacchè è la reciproca di $\tan x$. Ciò ci consente di limitare lo studio della funzione a $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Trattandosi di una funzione dispari possiamo limitare lo studio della funzione a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. La simmetria ci dice che $\cot x$ è strettamente decrescente in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, giacchè tale è la sua monotonia in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. In fig. 6 riportiamo il grafico della funzione in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

In fig. 7 è illustrato il grafico di $\cot x$ in $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

In fig. 8 è mostrato il grafico di $\cot x$ in $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Infine, in fig. 9 riportiamo i grafici di $\tan x$ e $\cot x$.

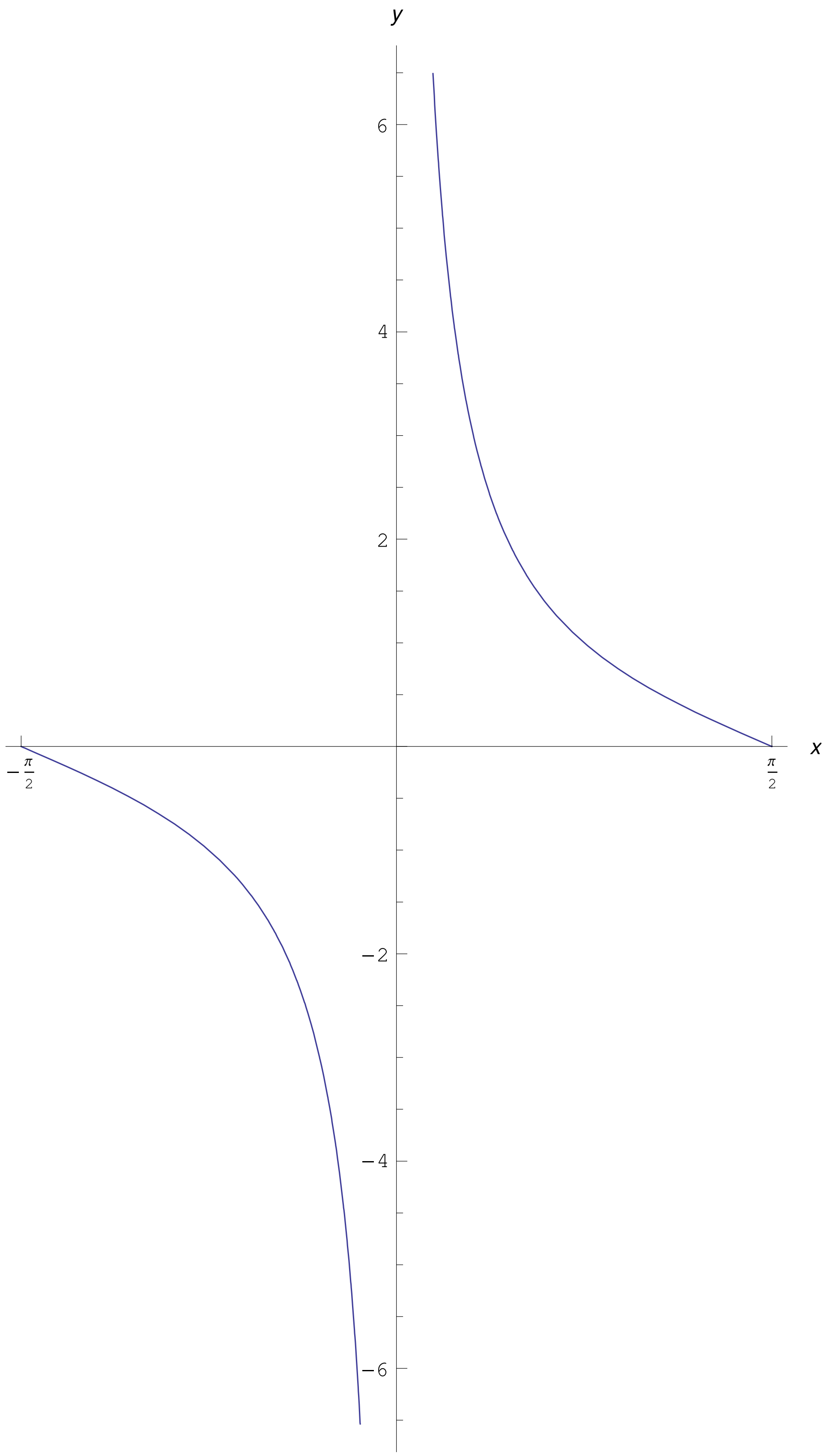

Figura 6: Grafico di $\cot x$ in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

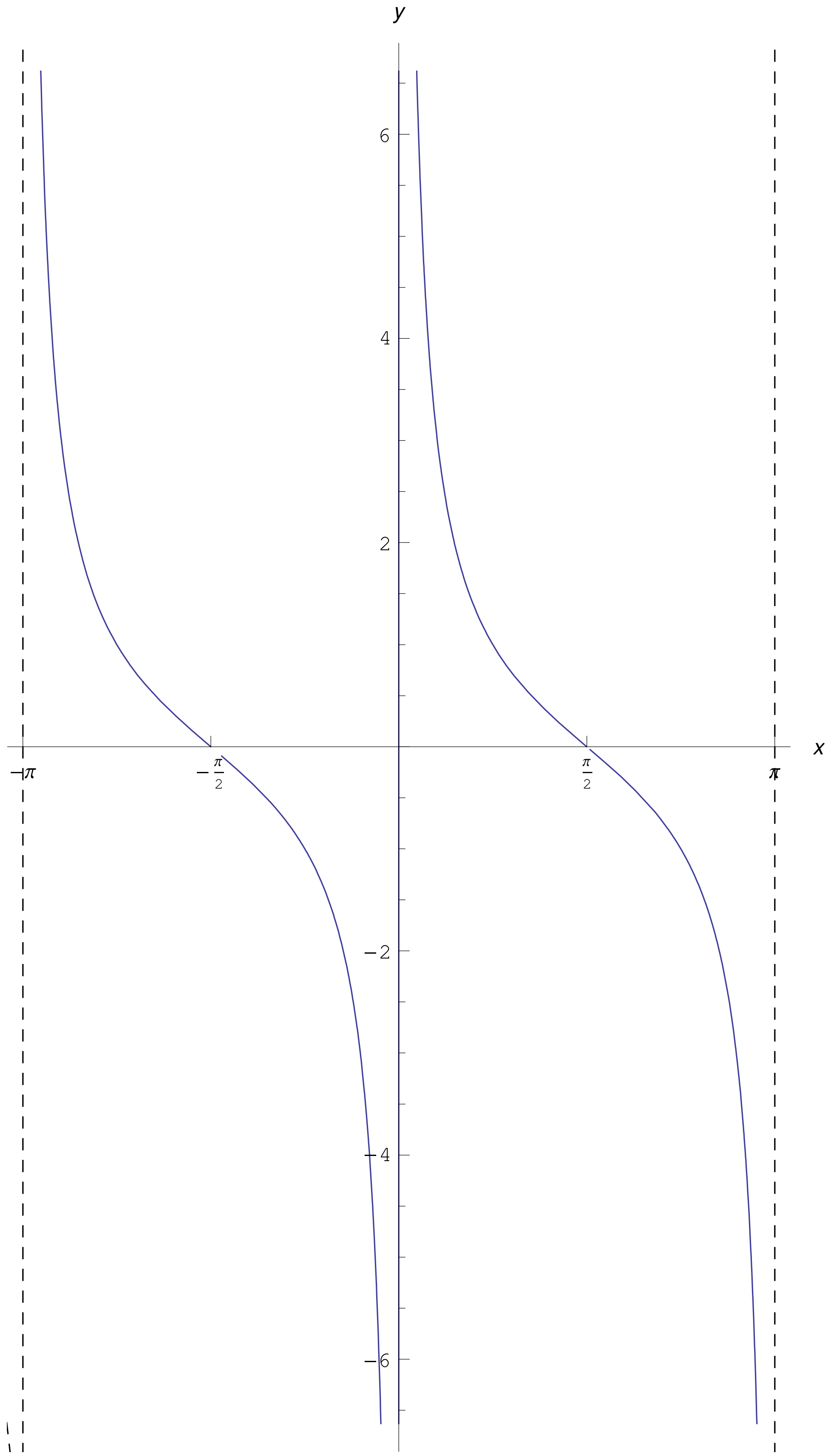

Figura 7: Grafico di $\cot x$ in $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

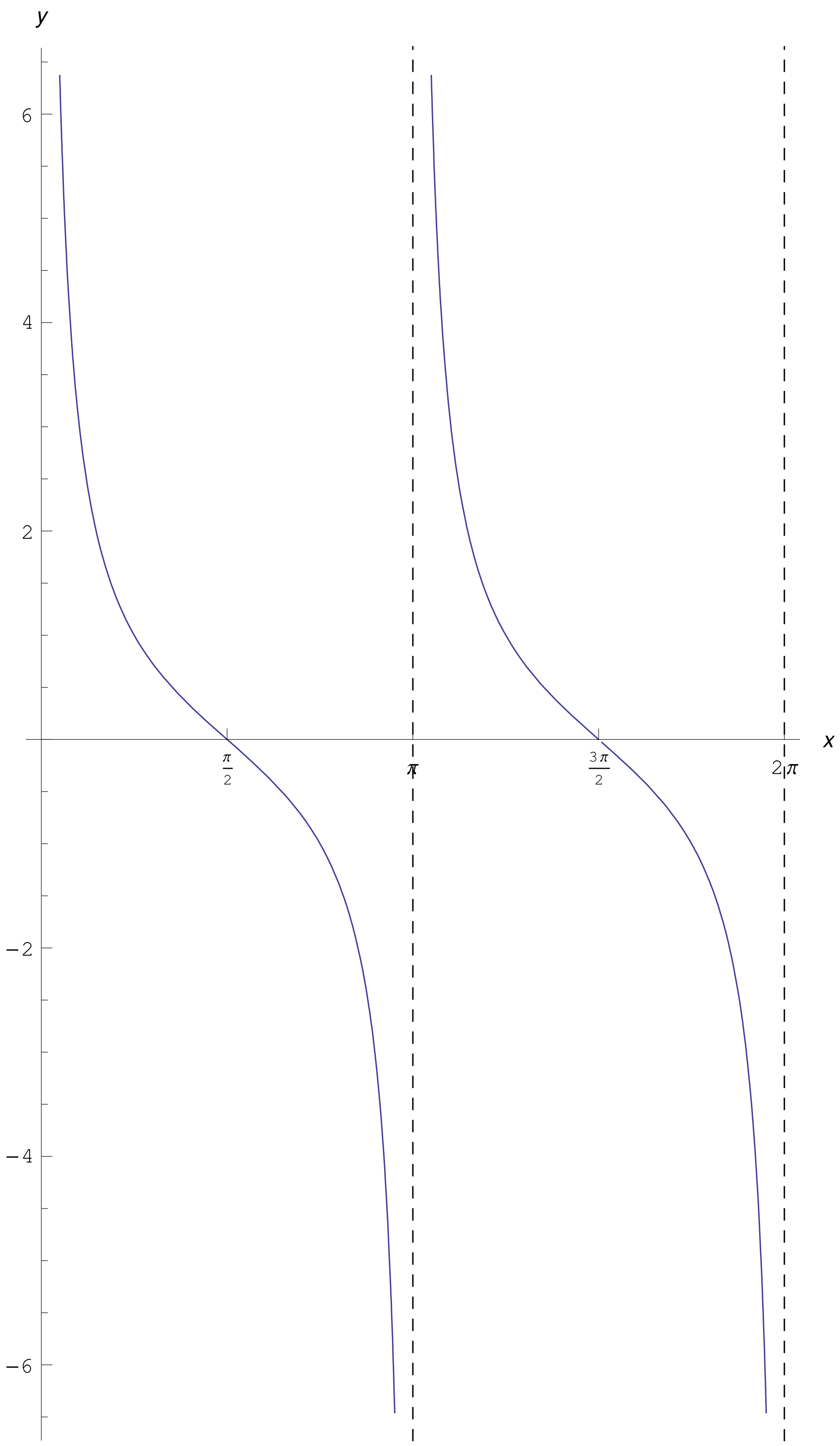

Figura 8: Grafico di $\cot x$ in $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

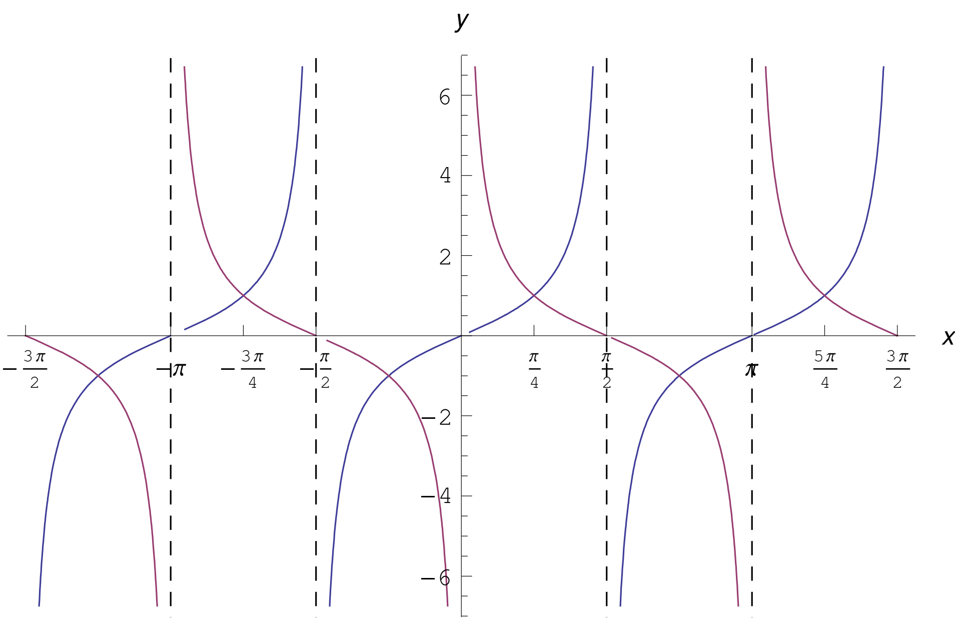

Figura 9: Diagramma cartesiano delle funzioni di $\tan x$ e $\cot x$.