Le funzioni circolari

[**Marcello Colozzo** http://www.extrabyte.info]

Prima di eseguire lo studio delle cosiddette funzioni circolari, premettiamo un ripasso delle nozioni fondamentali di trigonometria piana. Siano r e s due rette orientate complanari e formanti un angolo acuto (fig. 1).

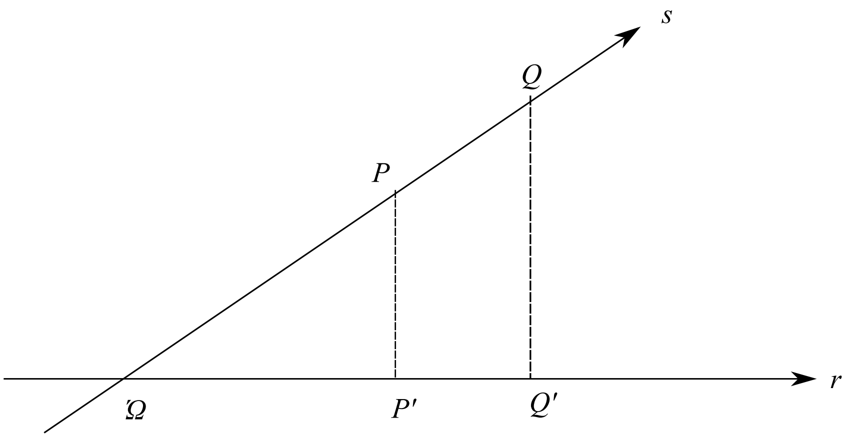

Figura 1: Le rette r e s si intersecano nel punto Ω formando un angolo acuto.

Detto Ω il punto di intersezione, denotiamo con x la misura in radianti dell'angolo acuto in Ω, onde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Comunque prendiamo $P, Q \in s - \{\Omega\}$ con $P \not\equiv Q$, restano univocamente definite le proiezioni ortogonali P', Q' su r. I triangoli $\Omega PP'$ e $\Omega QQ'$ sono simili, pertanto scriviamo $\Omega PP' \sim \Omega QQ'$:

$$\Omega PP' \sim \Omega QQ' \Longrightarrow \frac{\overline{PP'}}{\overline{\Omega P}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}}, \quad \frac{\overline{\Omega P'}}{\overline{\Omega P}} = \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}} \tag{1}$$

Assegnato il punto $P \in s - \{\Omega\}$, al variare di Q su $s - \{\Omega\}$, restano definiti ∞^1 triangoli rettangoli $\Omega QQ'$ aventi un vertice in Ω e l'ipotenusa su s, la cui lunghezza è $\overline{\Omega Q}$. Tali triangoli compongono l'insieme:

$$\Delta = \{\Omega QQ' \mid Q \in s - \{\Omega\}\} \neq \emptyset,$$

In tal modo, le (1) si riscrivono:

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{\Omega P}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}}, \quad \frac{\overline{\Omega P'}}{\overline{\Omega P}} = \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}}, \qquad \forall\, (\Omega QQ') \in \Delta \tag{2}$$

Ne consegue che l'insieme Δ conserva i rapporti $\frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}}, \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}}, \quad \forall Q \in s - \{\Omega, P\}$:

$$\exists c_1, c_2 \in (0, +\infty) \mid \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}} = c_1, \quad \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}} = c_2, \quad \forall Q \in s - \{\Omega\} \tag{3}$$

Geometricamente significa che il rapporto tra il cateto opposto all'angolo in Ω e l'ipotenusa, e il rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa, sono indipendenti dal triangolo rettangolo $\Omega QQ'$. Ciò è espresso dalle (3) in cui abbiamo indicato con c_1 e c_2 i valori costanti di detti rapporti. È chiaro, tuttavia, che c_1 e c_2 dipendono esclusivamente dall'angolo in Ω, o ciò che è lo stesso, da x. Ne consegue che c_1 e c_2 sono funzioni reali della variabile reale $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Scriviamo:

$$\underset{x \longrightarrow \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}}, \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}} \quad , \qquad \underset{x \longrightarrow \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}}, \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}} \tag{4}$$

Poniamo per definizione:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \Longleftrightarrow \frac{\overline{QQ'}}{\overline{\Omega Q}} = \sin x \qquad (5) \\
g(x) &= \cos x \Longleftrightarrow \frac{\overline{\Omega Q'}}{\overline{\Omega Q}} = \cos x,
\end{aligned}
$$

che sono rispettivamente il **seno** e il **coseno** dell'angolo in Ω o, ciò che è lo stesso, del numero reale $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Tali definizioni hanno un'immediata interpretazione geometrica. Assegnato un qualunque triangolo rettangolo $\Omega PP'$ (fig. 2), assumiamo come unità di misura la lunghezza del segmento ΩP, cioè la lunghezza dell'ipotenusa. Il seno dell'angolo in Ω è la misura del cateto opposto, mentre il seno è la misura del cateto adiacente.

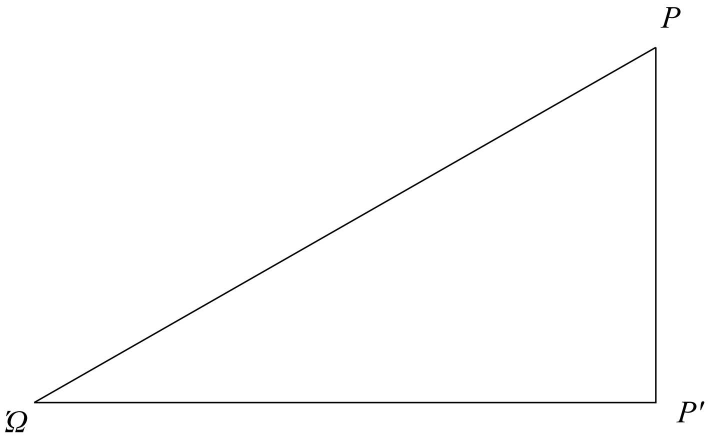

Figura 2: Assumendo $\overline{\Omega P} = 1$, si ha $\sin x = \overline{PP'}$, $\cos x = \overline{\Omega P'}$, dove $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ è la misura in radianti dell'angolo in Ω.

Abbiamo assunto $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; in realtà le definizioni di seno e coseno si estendono facilmente a $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Risulta:

$$
x = 0 \Longrightarrow P' \equiv P \Longrightarrow \Omega PP' \equiv \Omega P,
$$

ovvero il triangolo $\Omega PP'$ degenera nel segmento ΩP. Ne consegue che il cateto opposto all'angolo in Ω ha lunghezza nulla, mentre il cateto adiancente ha lunghezza pari a $\overline{\Omega P}$, cosicchè:

$$
\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1 \qquad (6)
$$

Inoltre:

$$
x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow P' \equiv \Omega \Longrightarrow \Omega PP' \equiv \Omega P,
$$

ovvero il triangolo $\Omega PP'$ degenera nel segmento ΩP. È facile convincersi che:

$$
\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad (7)
$$

Nel piano contenente le rette r, s fissiamo un riferimento cartesiano monometrico ortogonale $\mathcal{R}(\Omega \xi \eta)$ orientando l'asse ξ nella direzione e verso della retta r (fig. 3) e con origine nel punto Ω di intersezione di r con s.

Assegnato $P \in s - \{\Omega\}$, assumiamo come unità di misura in $\mathcal{R}$ la lunghezza del segmento di estremi Ω e P; cioè poniamo $\overline{\Omega P} = 1$. Risulta $P \in s \cap \Gamma$, essendo $\Gamma : \xi^2 + \eta^2 = 1$, cioè la circonferenza centrata in Ω e di raggio unitario. Inoltre $P(\cos x, \sin x)$, dove x è, al solito, la misura in radianti dell'angolo $U \Omega P$, essendo $U(1, 0)$. In altri termini, le coordinate cartesiane di P nel riferimento $\mathcal{R}$ sono rispettivamente il coseno e il seno di x. Per definizione di misura in radianti di un angolo:

$$
x = \frac{\overset{\frown}{UP}}{\overline{\Omega U}} \underset{\overline{\Omega U}=1}{=} \overset{\frown}{UP}
$$

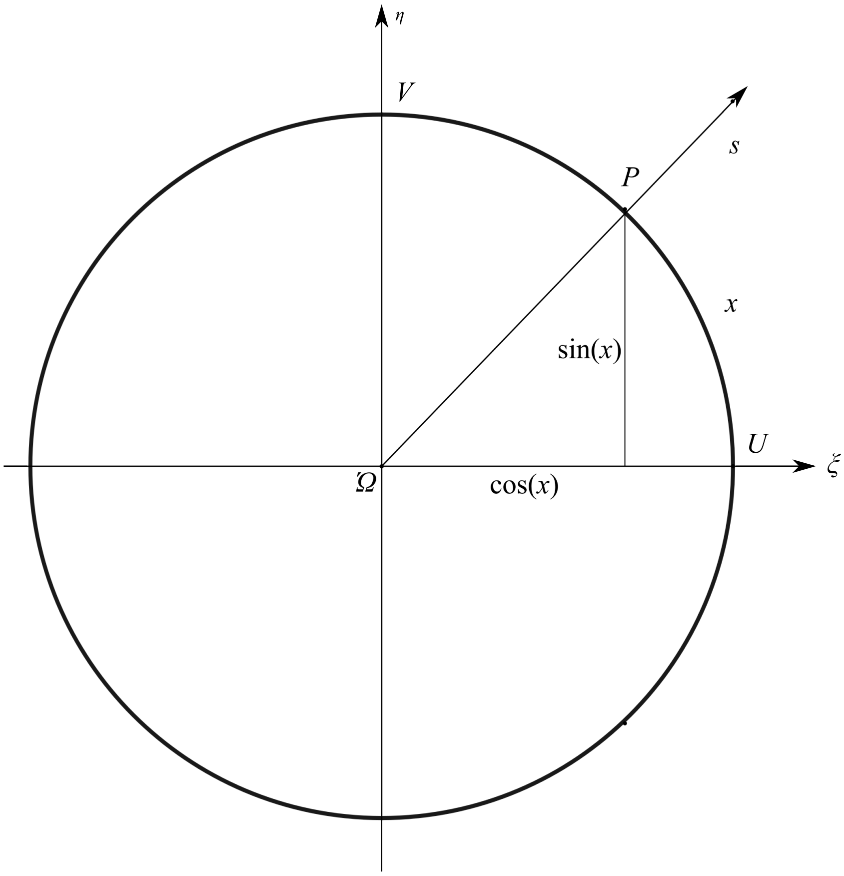

Figura 3: Circonferenza trigonometrica.

Cioè x è la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{UP}$. Il punto U si chiama **origine degli archi**, mentre Γ è la **circonferenza trigonometrica** (o **goniometrica**). È chiaro che $U(\cos 0, \sin 0)$ cioè $\sin 0$ e $\cos 0$ sono rispettivamente l'ordinata e l'ascissa del punto U. Detto V il punto di intersezione di Γ con l'asse η si ha $V\left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right)$ cioè $V(0,1)$.

Le (6)-(7) ci consentono di prolungare le funzioni (5) dall'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\underset{x \longrightarrow \sin x, \ \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}{f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}} \quad , \qquad \underset{x \longrightarrow \cos x, \ \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}{g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}} \tag{8}$$

La monotonia delle funzioni f e g può essere studiata in base a considerazioni geometriche. Innanzitutto assumiamo come verso positivo delle rotazioni nel riferimento $\mathcal{R}$, il verso antiorario. Risulta:

$$x = 0 \Longrightarrow s \equiv \xi \Longrightarrow P \equiv U$$

Al crescere di x in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la retta s compie una rotazione attorno a Ω nel verso positivo. Conseguentemente, il punto P si sposta su Γ percorrendo l'arco $\overset{\frown}{UP}$ orientato da U verso V.

$$x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow s \equiv \eta \Longrightarrow P \equiv V$$

Ciò implica:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) \leq 1 \\ 1 \geq g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Ne consegue che f è strettamente crescente e g è strettamente decrescente. Riguardo al codominio: $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,1]$. Le funzioni (8) possono essere ulteriormente prolungate. Precisamente da $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a $\mathbb{R}$. A tale scopo, tracciamo nuovamente la circonferenza trigonometrica (vedasi fig. 4).

Supponiamo che inizialmente sia $x = 0$, cioè $s \equiv \xi$. Facendo ruotare la semiretta s attorno a Ω, nel verso positivo, di un angolo la cui misura in radianti è $\leq \frac{\pi}{2}$, il punto di intersezione di s con Γ descrive l'arco $\overset{\frown}{UP}$ nel verso positivo delle rotazioni. Se, invece, s ruota attorno a Ω nel verso negativo, il punto di intersezione di s con Γ descrive l'arco $\overset{\frown}{UP'}$ nel verso negativo delle rotazioni. Se in particolare, nei due casi suddetti la semiretta s è ruotata di uno stesso angolo ma in versi opposti si ha che gli archi $\overset{\frown}{UP}$ e $\overset{\frown}{UP'}$ hanno la stessa lunghezza. Chiamiamo tale lunghezza **misura assoluta** dell'arco $\overset{\frown}{UP}$ (o di $\overset{\frown}{UP'}$).

Definizione 1 *Dicesi* **misura relativa** *di un arco orientato il numero reale x tale che $|x|$ è la lunghezza dell'arco (misura assoluta), risultando $x > 0$ se il verso dell'arco orientato è concorde al verso positivo delle rotazioni; $x < 0$ se è discorde.*

Nel caso in esame (fig. 4), se x è la misura relativa di $\overset{\frown}{UP}$, risulta $x > 0$, mentre la misura relativa dell'arco orientato $\overset{\frown}{UP'}$ è $-x$.

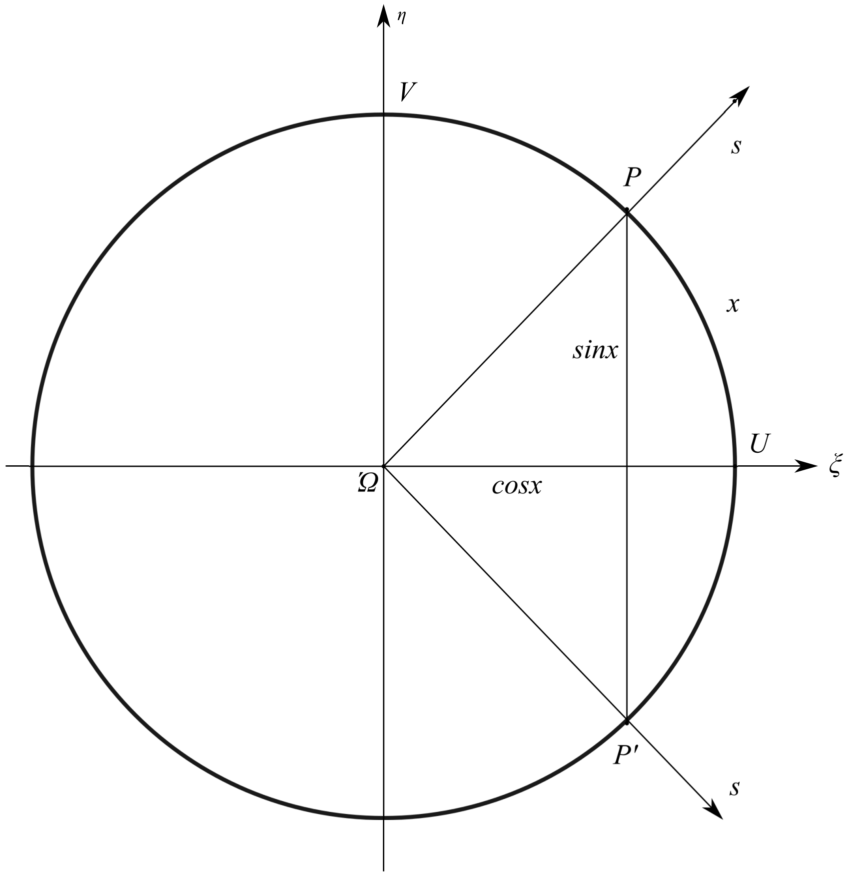

Figura 4: Consideriamo due rotazioni possibili della semiretta s attorno a Ω. La prima nel verso positivo, la seconda nel verso negativo delle rotazioni.

Da tale definizione segue che un qualunque $x \in \mathbb{R}$ può essere considerato la misura relativa di un assegnato arco orientato $\overset{\frown}{UP}$, risultando:

$$|x| < 2\pi \Longrightarrow \overset{\frown}{UP} \subset \Gamma,$$

cioè $\overset{\frown}{UP}$ è un arco orientato di Γ di lunghezza $< 2\pi$. Si ha $x > 0$ se $\overset{\frown}{UP}$ è orientato nel verso positivo; $x < 0$ nel caso contrario. Se $|x| > 2\pi$ possono presentarsi i seguenti casi:

1. $\exists k \in \mathbb{Z} - \{0\} \mid x = 2k\pi \Longrightarrow \overset{\frown}{UP}$ è la circonferenza Γ percorsa $|k|$ volte. Se $k > 0$ è percorsa nel verso positivo. Se $k < 0$, nel verso negativo. Ad esempio, se $x = -6\pi$, si ha che l'arco orientato $\overset{\frown}{UP}$ è la circonferenza Γ percorsa 3 volte nel verso negativo delle rotazioni, cioè nel verso orario.

2. $\nexists k \in \mathbb{Z} - \{0\} \mid x = 2k\pi$

   Allora:
   $$h \in \mathbb{Z} - \{0\} \mid h = \left[\frac{x}{2\pi}\right] \Longrightarrow \exists \alpha_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{N} \mid |\alpha_0| < 1, \ \frac{x}{2\pi} = h + \alpha_0$$
   Cioè:
   $$x = x_0 + 2h\pi,$$
   dove $x_0 = 2\pi\alpha_0$ e poichè $|\alpha_0| < 1$ si ha $|x_0| < 2\pi$.

   Il percorso totale del punto di intersezione di s con Γ, è la circonferenza Γ percorsa $|h|$ volte più l'arco orientato $\overset{\frown}{UP}$ di misura relativa x_0.

   Esempio 2 *Supponiamo che sia $x = 40$, onde x non è multiplo intero di 2π. Approssimando alla quarta cifra decimale si ha*
   $$\frac{x}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} = 6.3662 \tag{9}$$
   Quindi:
   $$h = \left[\frac{40}{2\pi}\right] = 6 \tag{10}$$
   Pertanto
   $$x = 2.3009 + 6\,(2\pi)$$
   Cioè, $x = 40$ è la misura della ciconferenza Γ percorsa 6 volte nel verso positivo e di un arco di misura relativa 2.3009.

Osserviamo che in tutti i casi possibili il punto P è univocamente determinato da x. È naturale assumere come $\cos x$ e $\sin x$ le coordinate cartesiane di P nel riferimento $\mathcal{R}\,(\Omega\xi\eta)$. In parole povere, assegnato $x \in \mathbb{R}$, resta univocamente determinato il punto $P \in \Gamma$. Detto punto avrà coordinate (ξ, η) e assumiamo $\cos x = \xi$, $\sin x = \eta$.

Abbiamo, dunque, le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ definite in $\mathbb{R}$ e di codomino è $[0, 1]$.

1 Proprietà e relazioni notevoli

Dalle definizioni precedenti segue:
$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
cioè $\sin x$ è funzione dispari, mentre $\cos x$ è funzioni pari.

Assegnato x, determiniamo $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Dalla fig. 5 (senza perdita di generalità, abbiamo assumto $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) vediamo che $\frac{\pi}{2} - x$ è la misura in radianti dell'angolo in P. Denotando con N la proiezione ortogonale di P sull'asse ξ, per definizione di $\sin x$ e $\cos x$:
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\overline{\Omega N}}{\overline{\Omega P}} \underset{\overline{\Omega P}=1}{=} \overline{\Omega N},$$
cioè:
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

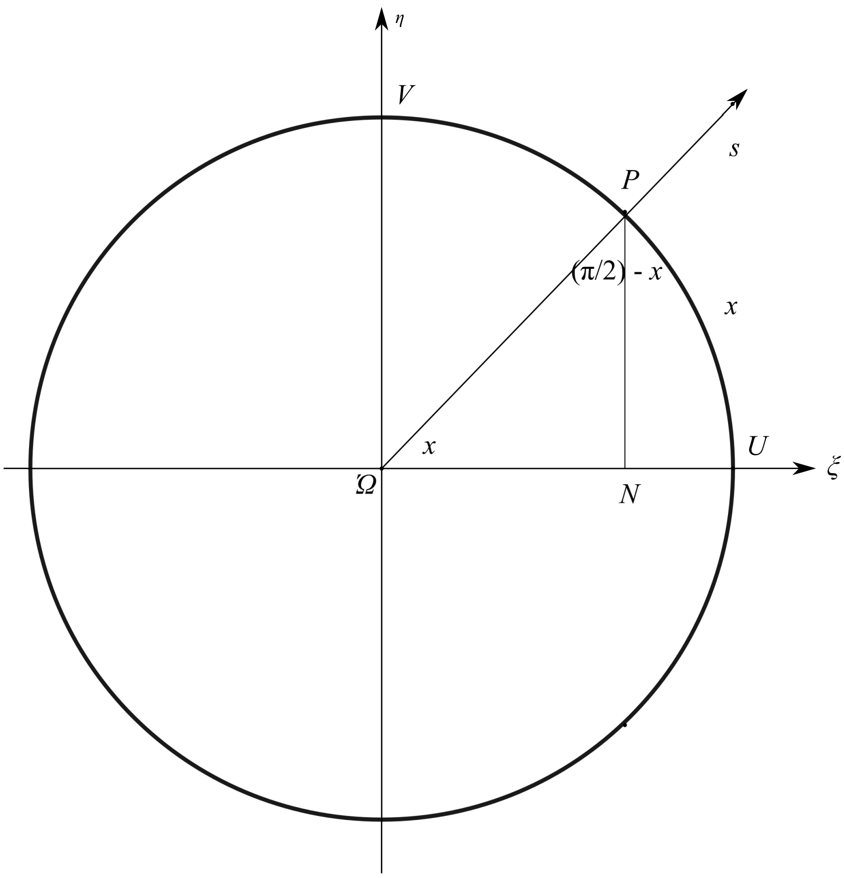

Figura 5: Il complementare dell'angolo la cui misura in radianti è x, è l'angolo in P.

In maniera analoga:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per determinare $\sin(\pi - x)$ e $\cos(\pi - x)$ tracciamo nuovamente la circonferenza trigonometrica (fig. 6). Detto Q il punto di Γ tale che la misura relativa dell'arco orientato $\overset{\frown}{UQ}$ da U verso Q sia pari a $\pi - x$, si ha[1] $Q(\cos(\pi - x), \sin(\pi - x))$. Ma $Q(-\cos x, \sin x)$, per cui:

$$(\cos(\pi - x), \sin(\pi - x)) = (-\cos x, \sin x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Trattandosi di una uguaglianza tra coppie ordinate, deve essere:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Determiniamo ora i valori assunti da $\sin x$ e $\cos x$ in $\pi + x$. Tracciamo nuovamente la circonferenza trignometrica. Detto Q il punto di Γ tale che la misura relativa dell'arco orientato $\overset{\frown}{UQ}$ da U verso Q sia pari a $\pi + x$, si ha[2] $Q(\cos(\pi + x), \sin(\pi + x))$. Ma $Q(-\cos x, -\sin x)$, per cui:

$$(\cos(\pi + x), \sin(\pi + x)) = (-\cos x, -\sin x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Trattandosi di una uguaglianza tra coppie ordinate, deve essere:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per quanto riguarda i valori assunti in $x + 2\pi$, è chiaro che $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

[1] Q è il simmetrico di P rispetto all'asse η.
[2] Q è il simmetrico di P rispetto all'origine Ω.

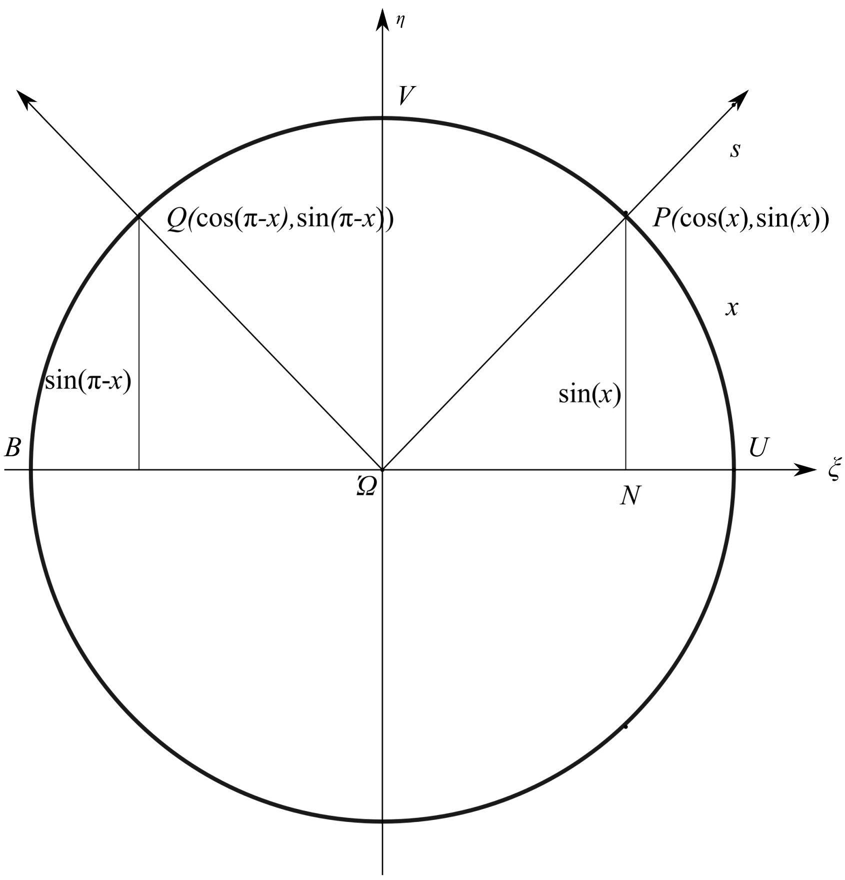

Figura 6: Il supplementare dell'angolo la cui misura in radianti è x, è la misura relativa dell'arco $\overset{\frown}{PB}$ o, ciò che è lo stesso, dell'arco $\overset{\frown}{UQ}$, dove Q è il simmetrico di P rispetto all'asse η. Si noti che anche in questo caso, senza perdita di generalità, abbiamo assunto $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

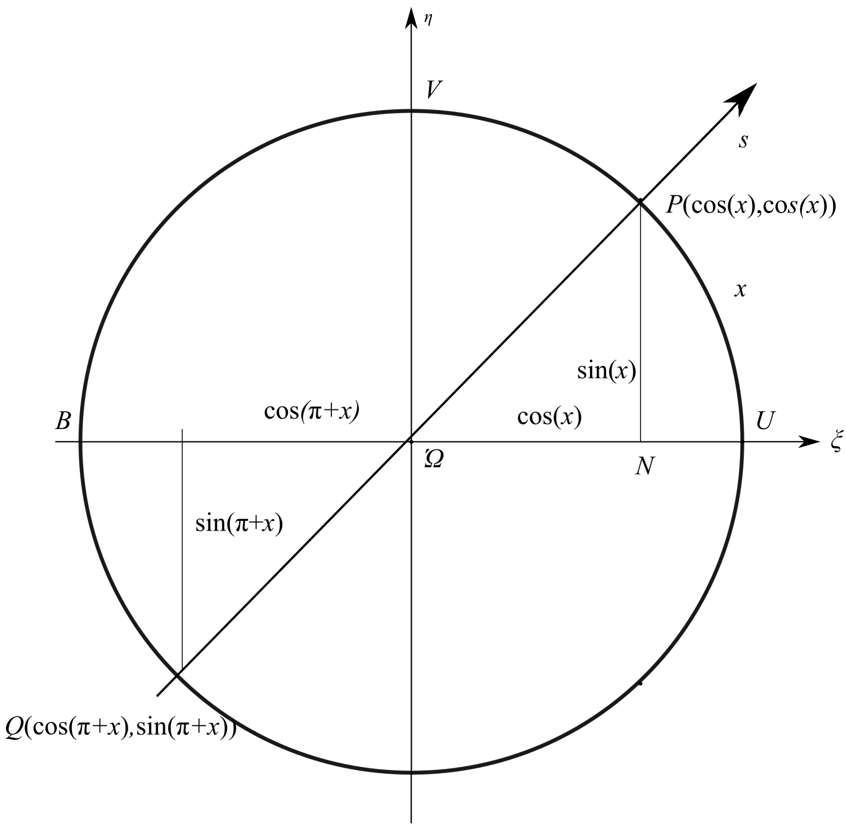

Figura 7: Le coordinate cartesiane del punto Q (univocamente individuato da $\pi + x$, quale misura relativa dell'arco $\widehat{UQ}$)

Inoltre:

$$\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x, \quad \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Posto $T = 2\pi$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \sin(x + kT) = \sin x \\ \cos(x + kT) = \cos x \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Da ciò segue che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π. La periodicità ci consente di studiare la restrizione delle funzioni $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ all'intervallo $[-\pi, \pi]$. D'altra parte, la parità di f e g ci permette di studiare tali funzioni in $[0, \pi]$. I corrispondenti grafici verranno poi tracciati per simmetria. Precisamente, simmetria rispetto all'origine per la funzione f, simmetria rispetto all'asse y per la funzione g.

2 Studio della funzione $f(x) = \sin x$

Per quanto precede, $\sin x$ è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Abbiamo poi visto che il codominio della restrizione di f al suddetto intervallo è $[0, 1]$.

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \tag{11}$$

Dalla fig. 6 vediamo che $\sin x$ è strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \Longrightarrow 1 \geq f(x) \geq 0 \tag{12}$$

Dalle (11)-(12) segue $f([0, \pi]) = [0, 1]$. Ma f è dispari, per cui:

$$f([0, \pi]) = [0, 1] \underset{f \text{ è dispari}}{\Longrightarrow} f([-\pi, 0]) = [-1, 0]$$

Ne consegue che il codominio di $\sin x$ è $[-1,0] \cap [0,1] = [-1,1]$. Sempre dalla simmetria rispetto all'origine, vediamo che $\sin x$ è strettamente crescente in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e strettamente decrescente in $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$.
Ne consegue che il codominio di $\sin x$ è $[-1,0] \cap [0,1] = [-1,1]$. Sempre dalla simmetria rispetto all'origine, vediamo che $\sin x$ è strettamente crescente in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ e strettamente decrescente in $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$.

Per lo studio della monotonia di $\sin x$ in $(-\infty, +\infty)$, poniamo:

$$I_k = \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Dobbiamo distinguere k pari da k dispari. Abbiamo:

$$k \text{ pari} \Longrightarrow k = 2h, \text{ con } h \in \mathbb{Z},$$

per cui:

$$I_{2h} = \left[-\frac{\pi}{2} + 2h\pi, \frac{\pi}{2} + 2h\pi\right], \quad \text{con } h \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

Ma $\sin x$ è periodica di periodo 2π, onde è strettamente crescente in ogni intervallo I_{2h} (in quanto è strettamente crescente in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$). Se k è dispari ($k = 2h+1$):

$$I_{2h+1} = \mathbb{R} - I_{2h} = \left[\frac{\pi}{2} + 2h\pi, \frac{3}{2}\pi + 2h\pi\right], \quad \text{con } h \in \mathbb{Z}$$

Dalla circonferenza trigonometrica vediamo che $\sin x$ è strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, per cui in forza della periodicità si ha che $\sin x$ è strettamente decrescente in ogni intervallo I_{2h+1}.

Esplicitiamo alcuni intervalli di monotonia. Dalla (13) vediamo che $\sin x$ è strettamente crescente in:

$$\begin{aligned}
h = 0 &\Longrightarrow I_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
h = -1 &\Longrightarrow I_{-2} = \left[-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right] \\
h = +1 &\Longrightarrow I_2 = \left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right] \\
h = -2 &\Longrightarrow I_{-4} = \left[-\frac{9}{2}\pi, -\frac{7}{2}\pi\right] \\
h = +2 &\Longrightarrow I_4 = \left[\frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi\right] \\
h = -3 &\Longrightarrow I_{-6} = \left[-\frac{13}{2}\pi, -\frac{11}{2}\pi\right] \\
h = +3 &\Longrightarrow I_6 = \left[\frac{11}{2}\pi, \frac{13}{2}\pi\right] \\
&\dots
\end{aligned} \tag{14}$$

Nelle figg. 8-9-10-11 riportiamo il grafico della restrizione di $\sin x$ a vari intervalli.

Il grafico della funzione $\sin x$ si chiama **sinusoide**. Gli zeri della funzione sono:

$$x_k = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Assume il valore $+1$ nei punti:

$$x'_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2}(4k+1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Assume il valore -1 nei punti:

$$x''_k = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{3\pi}{2}(2k+1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

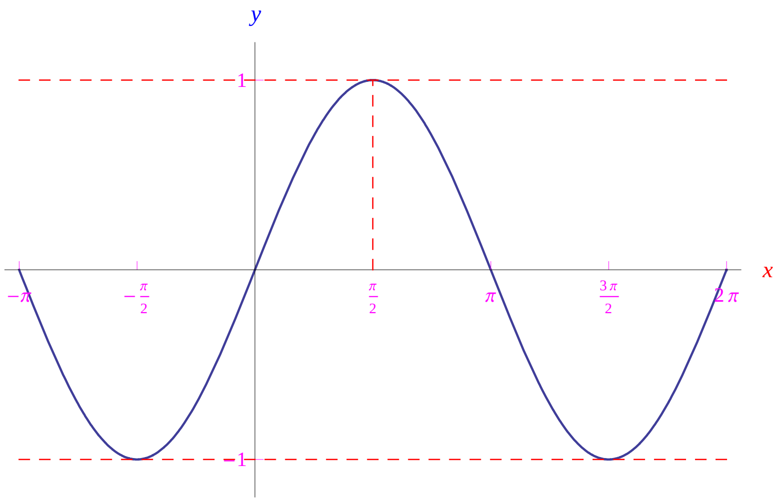

Figura 8: Grafico di $\sin x$ in $[-\pi, 2\pi]$.

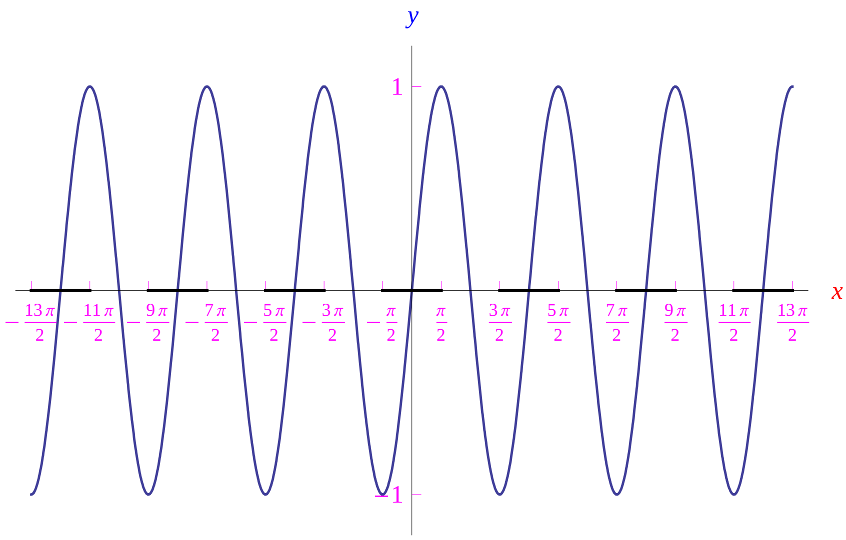

Figura 9: Grafico di $\sin x$ in $\left[-\frac{13}{2}\pi, \frac{13}{2}\pi\right]$, da cui sono visibili gli intervalli di crescenza (14).

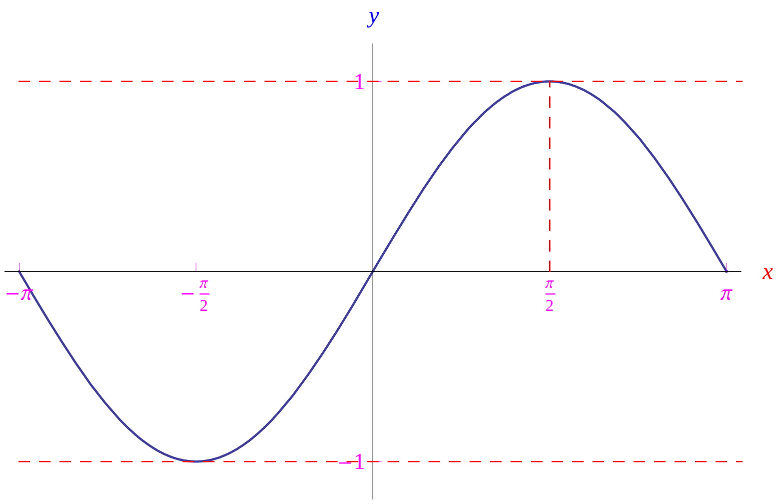

Figura 10: Grafico di $\sin x$ in $[-\pi, \pi]$.

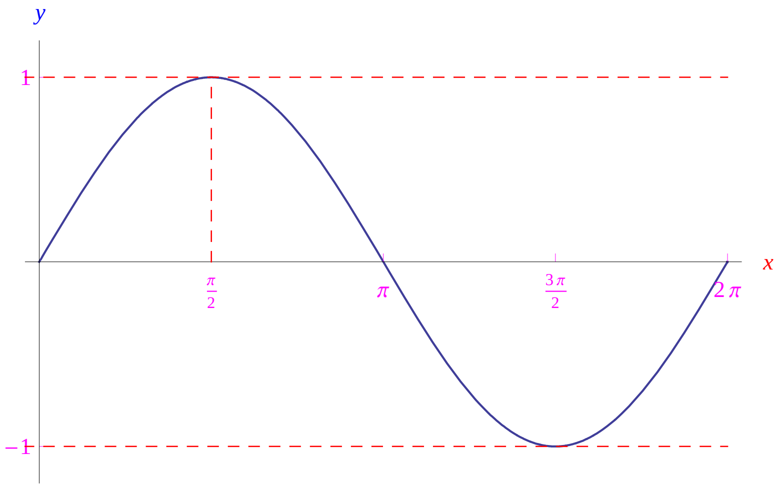

Figura 11: Grafico di $\sin x$ in $[0, 2\pi]$.

3 Studio della funzione $g(x) = \cos x$

Abbiamo visto che $\cos x$ è strettamente decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e che il codominio della restrizione al suddetto intervallo è $[0, 1]$. Cioè $\cos x$ assume in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tutti e soli i valori appartenenti a $[0, 1]$:

$$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 1 \geq g(x) \geq 0 \tag{15}$$

Dalla fig. 6 vediamo che $g(x)$ è strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \Longrightarrow 0 \geq g(x) \geq -1 \tag{16}$$

Dalle (15)-(16) segue $g([0, \pi]) = [-1, 1]$. Ma g è pari, per cui:

$$g([0, \pi]) = [-1, 1] \underset{g \text{ è pari}}{\Longrightarrow} g([-\pi, 0]) = [-1, 1]$$

Ne consegue che il codominio di $\cos x$ è $[-1, 1]$. Sempre dalla simmetria rispetto all'asse y, vediamo che $\cos x$ è strettamente crescente in $[-\pi, 0]$ e strettamente crescente in $[0, \pi]$.

Per lo studio della monotonia di $\cos x$ in $(-\infty, +\infty)$, poniamo:

$$J_k = [k\pi, (k+1)\pi], \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Dobbiamo distinguere k pari da k dispari. Abbiamo:

$$k \text{ pari} \Longrightarrow k = 2h, \text{ con } h \in \mathbb{Z},$$

per cui:

$$J_{2h} = [2h\pi, (2h+1)\pi] = [2h\pi, \pi + 2h\pi], \quad \text{con } h \in \mathbb{Z} \tag{17}$$

Ma $\cos x$ è periodica di periodo 2π, onde è strettamente decrescente in ogni intervallo J_{2h} (in quanto è strettamente decrescente in $[0, \pi]$). Se k è dispari ($k = 2h + 1$):

$$J_{2h+1} = [(2h+1)\pi, (2h+2)\pi], \quad \text{con } h \in \mathbb{Z}$$

Cioè:

$$J_{2h+1} = [\pi + 2h\pi, 2\pi + 2h\pi], \quad \text{con } h \in \mathbb{Z} \tag{18}$$

Dalla circonferenza trigonometrica vediamo che $\cos x$ è strettamente crescente in $[\pi, 2\pi]$, per cui in forza della periodicità si ha che $\cos x$ è strettamente crescente in ogni intervallo J_{2h+1}.

Esplicitiamo alcuni intervalli di monotonia. Dalla (18) vediamo che $\cos x$ è strettamente crescente in:

$$\begin{aligned} & h=-1 \Longrightarrow J_{-1}=[-\pi,0] \\ & h=0 \Longrightarrow J_{1}=[\pi,2\pi] \\ & h=+1 \Longrightarrow J_{3}=[3\pi,4\pi] \\ & h=-2 \Longrightarrow J_{-3}=[-3\pi,-2\pi] \\ & h=+2 \Longrightarrow J_{5}=[5\pi,6\pi] \\ & h=-3 \Longrightarrow J_{-5}=[-5\pi,-4\pi] \\ & h=+3 \Longrightarrow J_{7}=[7\pi,8\pi] \\ & \quad \ldots \end{aligned} \tag{19}$$

Nelle figg. 12-13-14-15 riportiamo il grafico della restrizione di $\cos x$ a vari intervalli.

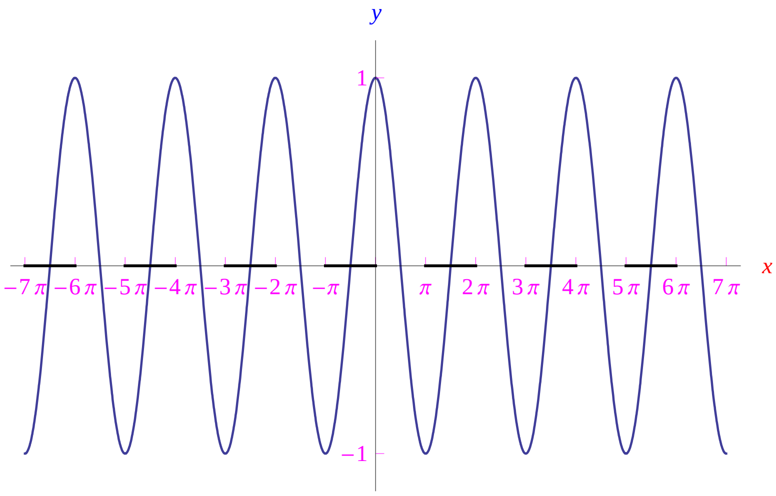

Figura 12: Grafico di $\cos x$ in $[-7\pi, 7\pi]$, da cui sono visibili gli intervalli di crescenza (19).

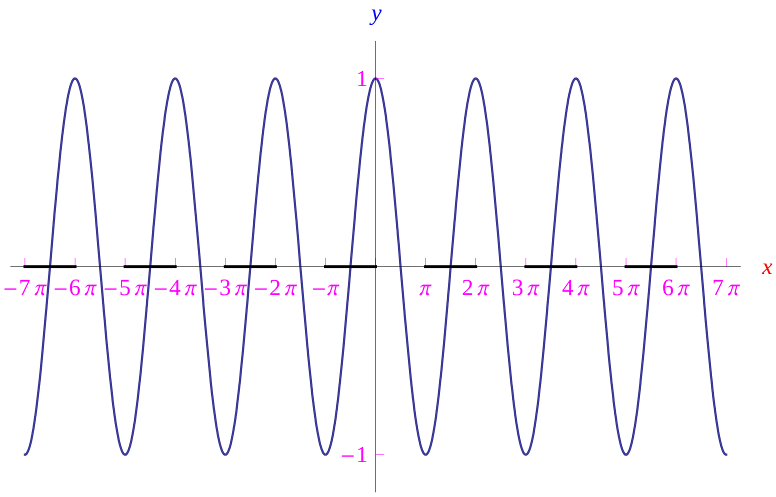

Figura 13: Grafico di $\cos x$ in $[-\pi, 2\pi]$.

Il grafico della funzione $\cos x$ si chiama **cosinusoide**. Gli zeri della funzione sono:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Assume il valore $+1$ nei punti:

$$x'_k = 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

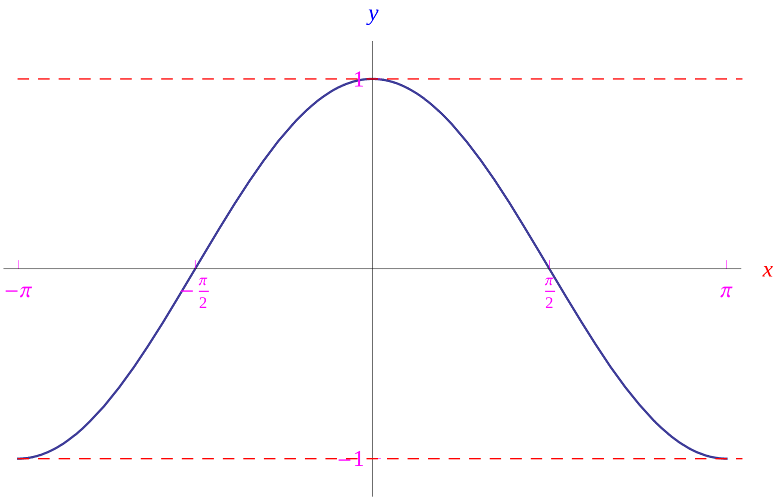

Figura 14: Grafico di $\cos x$ in $[-\pi, \pi]$.

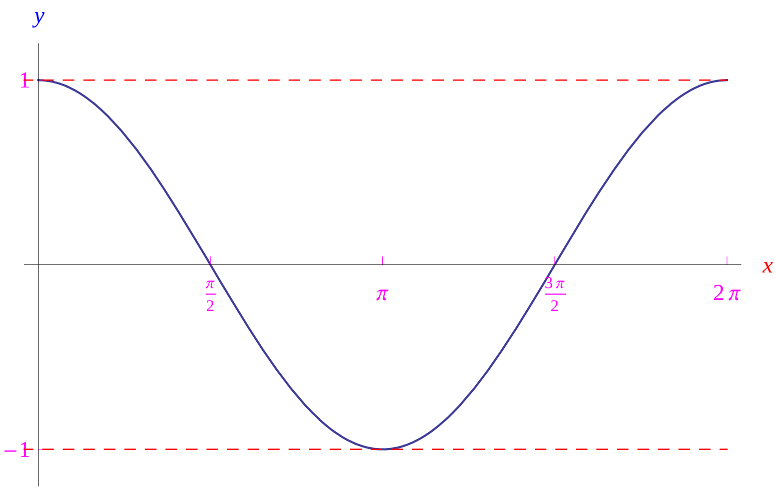

Figura 15: Grafico di $\cos x$ in $[0, 2\pi]$.

Assume il valore -1 nei punti:

$$x''_k = \pi + 2k\pi = \pi\,(2k+1)\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

La fig. riporta il grafico di $\sin x, \cos x$.

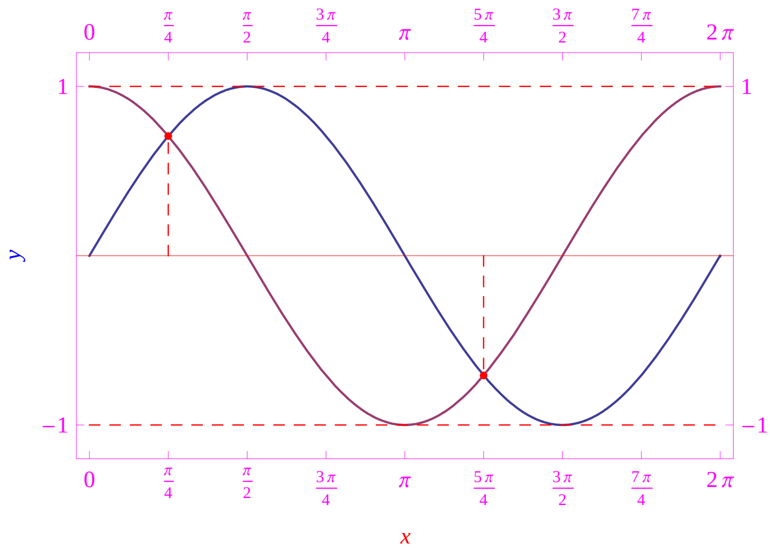

Figura 16: Grafico di $\sin x, \cos x$ in $[0, 2\pi]$.