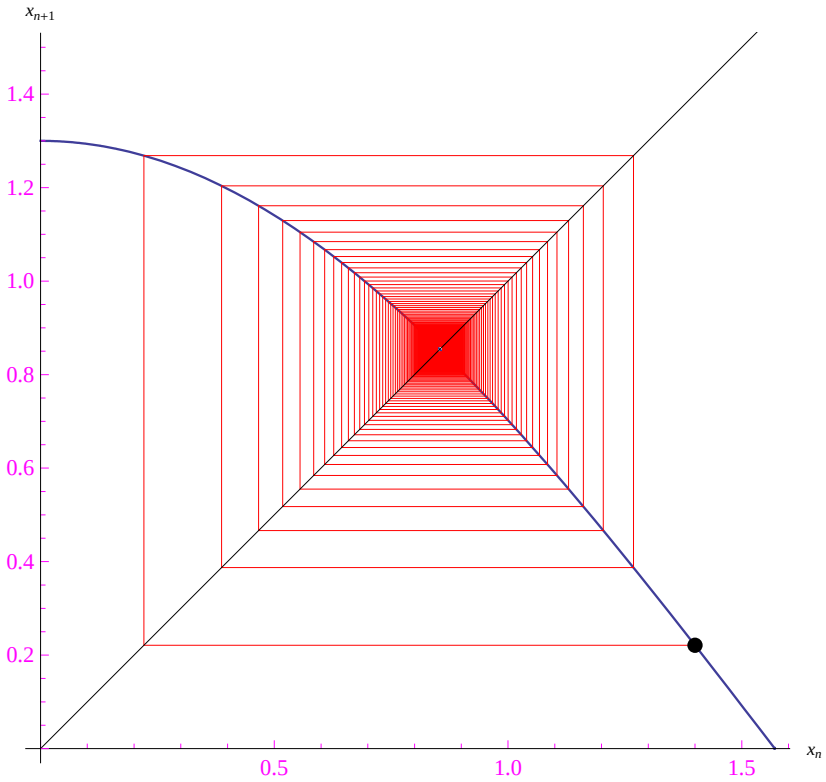
Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info
Quaderni di Analisi Matematica – 2016

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

La condizione di Lipschitz e il Teorema del punto fisso

Marcello Colozzo



1 La condizione di Lipschitz

Definizione 1 *(**Condizione di Lipschitz**) Sia $f : X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$.*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ verifica} \\ \text{la condizione di Lipschitz} \end{array}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda > 0 \mid |f(x') - f(x'')| \leq \lambda |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in X \tag{1}$$

*Il numero reale positivo γ si dice **coefficiente di Lipschitz**.*

Le funzioni che verificano la condizione (1) si dicono *lipschitziane*. Sussiste il seguente teorema per la cui dimostrazione rimandiamo a [1].

Teorema 2

$$f \text{ è lipschitziana in } X) \Longrightarrow f \text{ è uniformemente continua in } X$$

Osservazione 3 *La condizione di Lipschitz equivale a dire che esiste $\lambda > 0$ tale che comunque prendiamo $x_0 \in X$, il rapporto incrementale di f di punto iniziale x_0 è in valore assoluto minore o al più uguale a λ. Intuitivamente, una funzione lipschitziana è una funzione che varia "lentamente".*

Esempio 4 *Mostriamo che la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

è lipschitziana con coefficiente di Lipschitz $\lambda = 1$. Osserviamo innanzitutto che $\max_{\mathbb{R}} f = \frac{1}{2}$, riuscendo:

$$\begin{aligned}
|f(x') - f(x'')| &= \left| \frac{1}{1 + x'^2} - \frac{1}{1 + x''^2} \right| \\
&= \left| \frac{x''^2 - x'^2}{(1 + x'^2)(1 + x''^2)} \right| \\
&= \left| \frac{(x'' - x')(x'' + x')}{(1 + x'^2)(1 + x''^2)} \right| \\
&= \frac{|x'' + x'| \, |x' - x''|}{(1 + x'^2)(1 + x''^2)} \\
&\leq |x' - x''| \frac{|x'| + |x''|}{(1 + x'^2)(1 + x''^2)} \\
&= |x' - x''| \left(\frac{|x'|}{1 + |x'|^2} + \frac{|x''|}{1 + |x''|^2} \right) \\
&\leq |x' - x''| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2 Sistemi dinamici a tempo continuo

Consideriamo un sistema dinamico la cui variabile di stato x soddisfi un'equazione differenziale del primo ordine di forma normale:

$$\dot{x} = F(x, t),$$

dove $F : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$. Senza perdita di generalità, supponiamo che A sia un dominio rettangolare del tipo:

$$\begin{aligned} A &= \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [t_1, t_2], \quad -\infty < x < +\infty\right\} \\ &= [t_1, t_2] \times (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

Supponiamo che all'istante iniziale $t_0 \in [t_1, t_2]$ il sistema sia preparato nello stato x_0. Ciò implica il seguente problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Assegnata la regione $R_\Delta \subseteq A$:

$$R_\Delta = [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta] \times (-\infty, +\infty),$$

sussiste il teorema:

Teorema 5 ***(Teorema di esistenza ed unicità)***
Ipotesi:

1. *F è continua in R_Δ ed è ivi parzialmente derivabile rispetto a x.*
2. *F è lipschitziana rispetto a x:*

$$\exists \lambda > 0 \mid |F(t,x') - F(t,x'')| \leq \lambda |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in (-\infty, +\infty)$$

Tesi:

$$\exists! \xi(t) \in C^1([t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]) \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = F(\xi(t), t) \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad \forall t \in [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$$

In altri termini, se la funzione $F(t,x)$ è 1) continua in R_Δ ed è ivi parzialmente derivabile rispetto a x, 2) è lipschitiana rispetto a x, allora il problema di Cauchy (2) ammette una ed una sola soluzione in un opportuno intorno dell'istante iniziale t_0. I sistemi dinamici che verificano tale proprietà si dicono **deterministici**, giacchè lo stato a tutti i tempi $x(t)$ è univocamente determinato dallo stato iniziale x_0.

Riferiamoci in particolare ai **sistemi autonomi**, cioè a quei sistemi per i quali la funzione F non dipende esplicitamente dal tempo. Il problema di Cauchy (2) si riscrive:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{3}$$

e il teorema di esistenza ed unicità diventa:

Teorema 6 ***(Teorema di esistenza ed unicità)***
Ipotesi: *F è lipschitziana:*

$$\exists \lambda > 0 \mid |F(t,x') - F(t,x'')| \leq \lambda |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in (-\infty, +\infty)$$

Tesi:

$$\exists! \xi(t) \in C^1([t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]) \mid \begin{cases} \dot{\xi}(t) = F(\xi(t)) \\ \xi(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad \forall t \in [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$$

Denotiamo con $\{F_\lambda(x)\}$ la classe delle funzioni lipschitziane in $(-\infty, +\infty)$ con coefficiente di Lipschitz pari a $\lambda > 0$. L'insieme di tali funzioni individuano univocamente la classe dei sistemi autonomi deterministici.

3 Sistemi dinamici a tempo discreto

Comè noto, campionando l'intervallo $[t_1, t_2]$ l'equazione differenziale $\dot{x} = F(x)$ conduce a un'equazione *di ricorrenza*:

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{4}$$

dove $n \in \mathbb{N}$ è la variabile relativa al campionamento discreto, mentre $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione legata a F dalla relazione [2]:

$$f(x) = F(x) + x$$

L'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è l'insieme degli stati del sistema a tempo discreto, e l'n-esimo valore assunto da x compone una successione ricorsiva

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

giacchè i suoi termini sono dati dalla (4). Assegnato lo stato iniziale $x_0 \in X$, il processo di ricorrenza genera, dunque, una successione $\{x_n\}$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) \\
x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\
&\dots \\
x_n &= f^n(x_0) \\
&\dots
\end{aligned}$$

Qui f^n indica la composizione *n-esima* di f con se stessa eseguita n volte. Cioè:

$$f^n(x_0) = \underbrace{f(f(\dots f(x_0)))}_{n}$$

Secondo la definizione data in [3], un sistema dinamico a tempo discreto si comporta alla stregua di una black box, nel senso che emette un output sulla base di un input x e su una legge di trasformazione $f(x)$.

Nel piano cartesiano Oxy scriviamo $y = f(x)$, per cui $(x_n, x_{n+1}) \in \Gamma_f$, essendo Γ_f il grafico della funzione reale f. In altri termini, Γ_f è lo *spazio delle fasi* del sistema, a cui possiamo associare un'entropia:

$$\sigma_n = \ln n, \quad (n \in \mathbb{N} - \{0\})$$

A questo punto ricordiamo che il processo ricorsivo (4) viene utilizzato per la ricerca delle radici dell'equazione

$$f(x) = x \tag{5}$$

Più precisamente, l'algoritmo ricorsivo implementato dalla (4) converge se e solo se la funzione f verifica le ipotesi del teorema del punto fisso:

Teorema 7 ***(Teorema del punto fisso)***
Hp. $\exists\lambda \in (0,1) \mid |f'(x)| \leq \lambda, \ \forall x \in [a,b]$
Th. $\lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) = f(x_*)$, *dove x_* è la radice dell'equazione $f(x) = x$.*

In altri termini, se la funzione f varia "lentamente", allora l'algoritmo converge verso la radice dell'equazione. Dal punto di vista dell'evoluzione dinamica del sistema, si ha che il sistema medesimo oltre ad essere deterministico è "attratto" dallo stato x_*. Il punto $(x_*, f(x_*)) \in \Gamma$ è detto *attrattore.*

Da tale analisi emerge un'analogia con la condizione di Lipschitz che, appunto, richiede una variazione "lenta" della funzione in esame. Denotiamo, allora, con $\{f_\lambda(x)\}$ la classe delle funzioni $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che:

$$\exists \lambda \in (0,1) \mid |f'(x)| \leq \lambda, \ \ \forall x \in [a,b]$$

Possiamo allora congetturare:

Congettura 8 *Alla classe dei sistemi dinamici a tempo continuo $\{F_\lambda(x)\}$ con coefficiente di Lipschitz $\lambda \in (0,1)$, corrisponde la classe $\{f_\lambda(x)\}$ dei sistemi dinamici a tempo continuo, con $|f'(x)| \leq \lambda, \ \forall x \in [a,b]$.*

In altre parole, il Teorema del punto fisso altro non è che l'analogo discreto del Teorema di esistenza ed unicità, ma con una condizione più forte: il coefficiente di Lipschitz deve essere < 1. Viceversa, se $\lambda > 1$ il corrispondente sistema dinamico a tempo discreto è ancora deterministico ma non evolve verso un punto fisso. In generale, si possono avere più attrattori nello spazio delle fasi (il sistema diviene allora un oscillatore) o addirittura l'evoluzione può essere caotica. Iniziamo con l'analizzare il comportamento del sistema:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \text{con } f(x) = \cos x,$$

che verifica manifestamente l'ipotesi del teorema del punto fisso. In fig 1 riportiamo l'evoluzione deterministica del sistema con funzione $f(x) = \cos x$. L'evoluzione è indipendente da x_0, come mostrato in fig. 2 .

Se ora consideriamo la classe di sistemi dinamici

$$f_\lambda(x) = \cos \lambda x,$$

si ha che se $\lambda \in (0,1)$ il corrispondente sistema evolve verso l'unico punto fisso, in quanto è $|f'_\lambda(x)| = \lambda < 1$. Viceversa, se $\lambda > 1$ è violata la condizione sulla derivata e l'algoritmo ricorsivo non converge verso la radice dell'equazione $\cos \lambda x = x$. Dal punto di vista del comportamento del sistema dinamico, si ha che non ci sono punti fissi.

Una classe interessante di sistemi dinamici è:

$$f_{\lambda>0}(x) = 1 - \lambda x^2, \quad \text{con } x \in [0,1]$$

Riesce:

$$|f'_\lambda(x)| = 2\lambda x,$$

per cui sono verificate le ipotesi del teorema del punto fisso se e solo se $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Ad esempio, per $\lambda = 0.2$, assumendo $x_0 = 0.1$, si ottiene l'evoluzione dinamica graficata in fig. 3.

Se prendiamo $\lambda = 0.8$, l'evoluzione oscilla tra due punti fissi come mostrato in fig. 4.

Come nel caso della mappa logistica [2], anche qui esistono dei valori caratteristici del parametro λ per i quali si verifica un raddoppiamento del periodo degli attrattori, come possiamo vedere nel diagramma di fig.5. In particolare, per $\lambda > \lambda_{caos} \simeq 1.4$ ogni punto di Γ_f è un attrattore, per cui il sistema esplora l'intero spazio delle fasi (ergodicità, caos).

***

Dal teorema del punto fisso e dall'arbitrarietà di x_0 segue che posto

$$f_n(x) = f(f(f(...f(x)))),$$

si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = f(x_*), \quad \forall x \in [a,b]$$

Cioè la successione di funzioni $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge alla funzione costante $g(x) \equiv f(x_*)$.

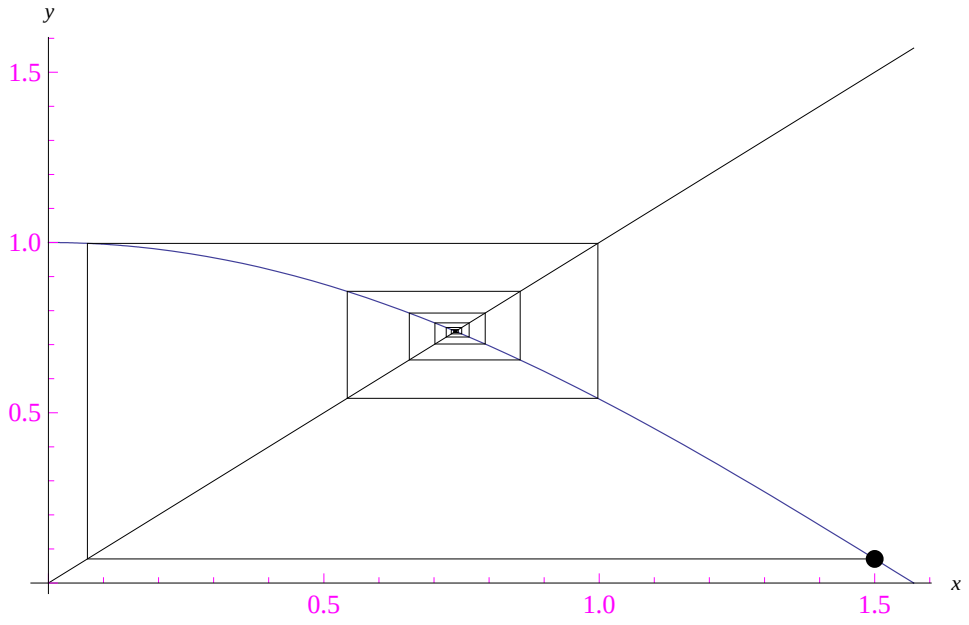


Figura 1: Lo stato iniziale del sistema con $f(x) = \cos x$ è $x_0 = 1.5$. Lo stato evolve deterministicamente verso il punto fisso $(x_*, \cos x_*)$ con x_* radice di $\cos x = x$.

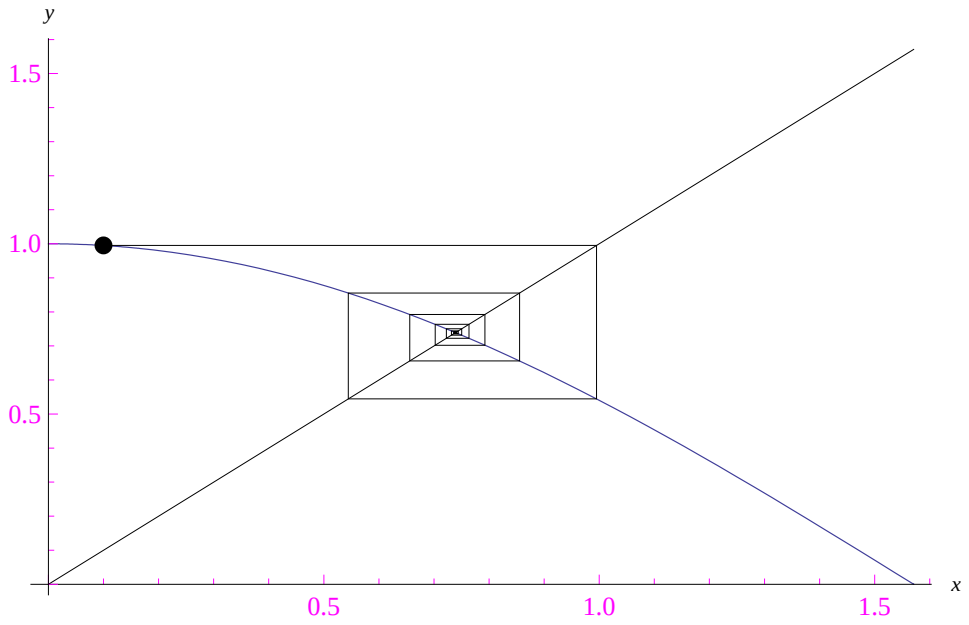


Figura 2: Evoluzione dinamica del sistema $f(x) = \cos x$ a partire dallo stato iniziale $x_0 = 0.1$.

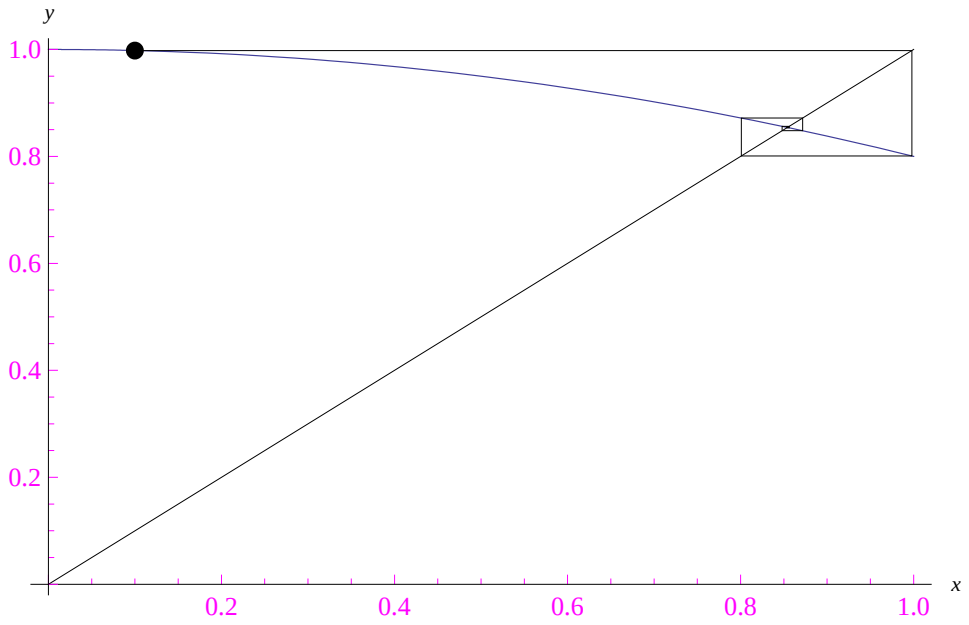


Figura 3: Evoluzione dinamica del sistema $f_{\lambda=0.2}(x)$ a partire dallo stato iniziale $x_0 = 0.1$.

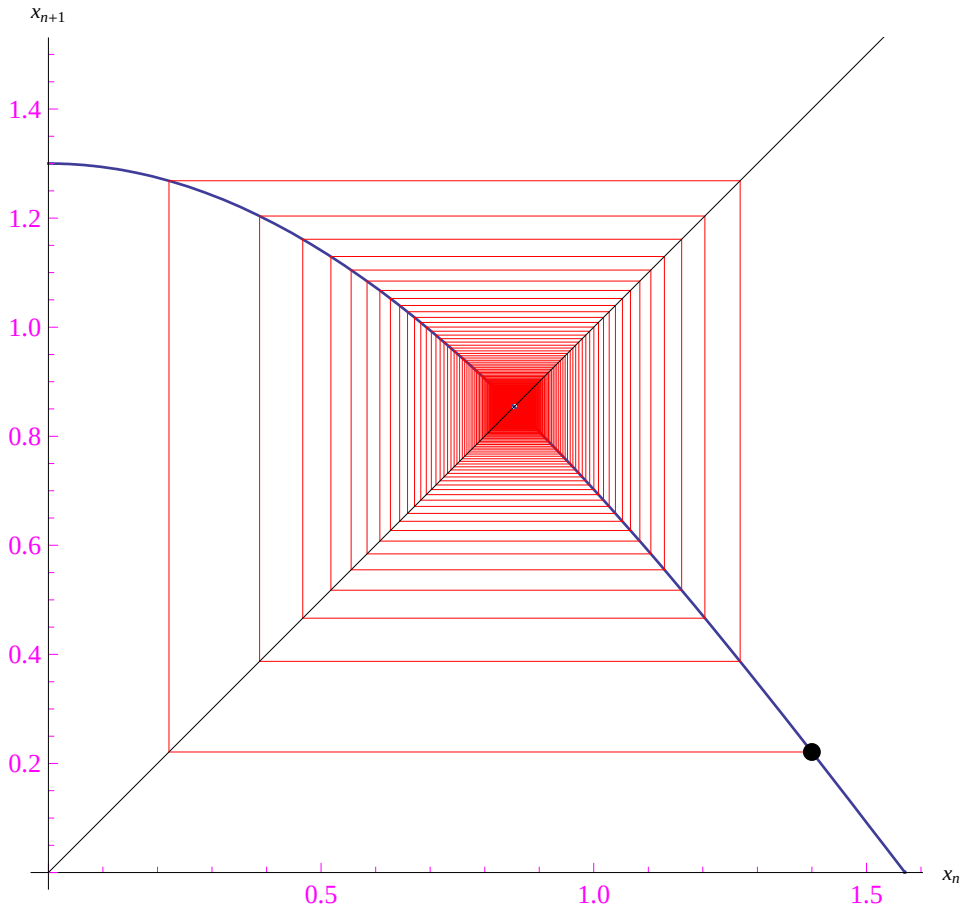


Figura 4: Evoluzione dinamica del sistema $f_{\lambda=0.8}(x)$ a partire dallo stato iniziale $x_0 = 0.1$. Il sistema oscilla tra due attrattori.

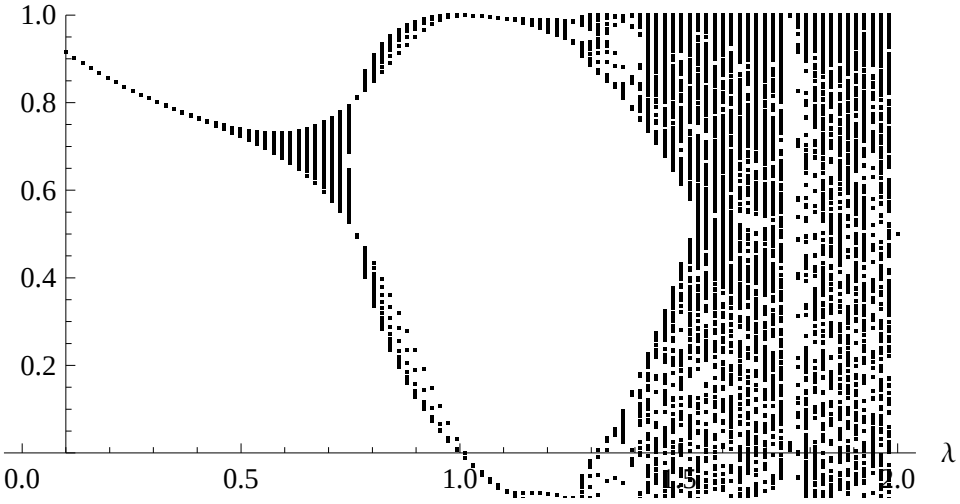


Figura 5: Diagramma delle orbite per il sistema dinamico con funzione di trasferimento $f(x) = 1 - \lambda x^2$. Per $\lambda > \lambda_{caos} \simeq 1.4$, il sistema diviene caotico.

4 Ricorsione di $f_\lambda(x) = \sin(\lambda \cos x)$

Consideriamo ora la classe di sistemi dinamici ad un parametro:

$$f_\lambda(x) = \sin(\lambda \cos x), \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Se ci riferiamo all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Riferimenti bibliografici

[1] Fiorenza R., Greco D. 1978. *Lezioni di Analisi Matematica*. Liguori Editore.

[2] Colozzo M., 2012. *Computabilità di sistemi dinamici a tempo continuo*. Scientia

[3] Arbib. Brains M. A., 1987. *Machines and Mathematics*, McGraw-Hill.