Differenziabilità secondo Stolz. Le funzioni olomorfe

[Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info]

1 Derivazione complessa

Assegnato un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$, consideriamo una funzione da E a $\mathbb{C}$:

$$f : E \to \mathbb{C} \tag{1}$$

Come è noto, la coppia ordinata di variabili reali (x, y) individua il numero complesso $z = x + iy$, o ciò che è lo stesso, un punto del piano di Gauss[1] come illustrato in fig. 1.

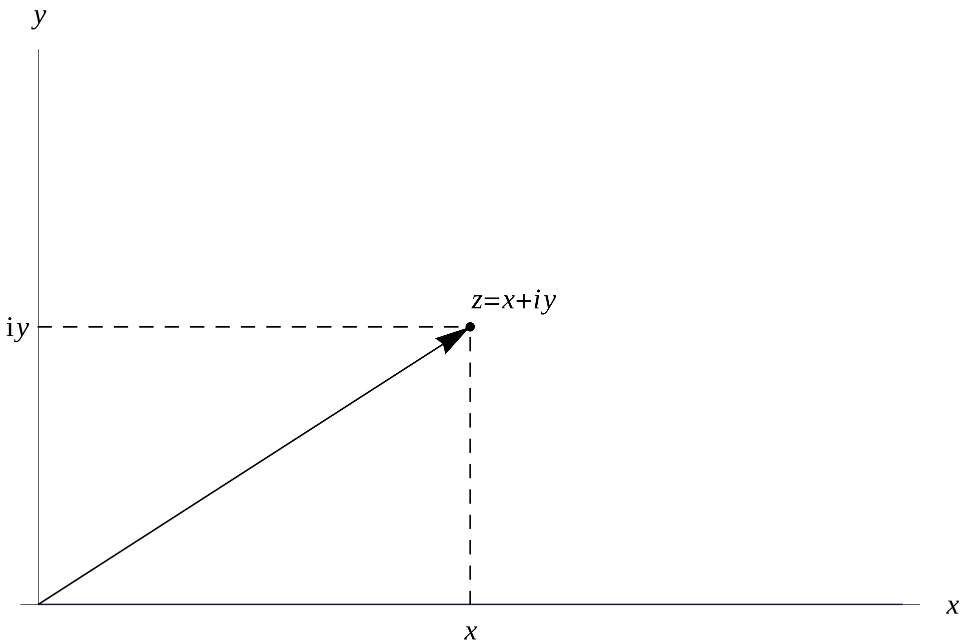

Figura 1: Un punto del piano di Gauss.

Quindi, la funzione (1) è la legge:

$$f : z \in E \to f(z) \in \mathbb{C} \tag{2}$$

ed è una *funzione complessa della variabile complessa* z. Ciò premesso, consideriamo un campo A (limitato o illimitato) contenuto in E. Assegnato $z_0 \in A$, in corrispondenza di un incremento Δz tale che $(z_0 + \Delta z) \in A$, l'incremento della funzione f è $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$.

Definizione 1 *Si dice* ***rapporto incrementale complesso*** *di incremento Δz, relativo alla funzione f e al punto $z_0 \in A$, il rapporto*

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{3}$$

[1] Si tratta di una rappresentazione geometrica dei numeri complessi sul piano euclideo. Come riportato nel libro di Roger Penrose *La strada che porta alla realtà*, Caspar Wessel nel 1797, Jean Robert Angard nel 1806, John Warren nel 1928 e Carl Friedrich Gauss, sicuramente prima del 1831, arrivarono tutti indipendentemente, all'idea di *piano complesso*.

Il rapporto incrementale è una funzione complessa della variabile complessa $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, il cui insieme ha per punto di accumulazione il punto $\Delta z = 0$, i.e. $(\Delta x, \Delta y) = (0,0)$, per cui ci poniamo il problema dell'esistenza del limite:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y},$$

avendo denotato con x_0 e y_0 rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di z_0. Se tale limite esiste ed è finito, diremo che f è **derivabile in modo complesso nel punto** z_0, scrivendo:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \tag{4}$$

Il numero complesso $f'(z_0)$ è la **derivata complessa** di f in z_0. Se f risulta derivabile in ogni punto $z \in A$, diremo che f **è derivabile in modo complesso in** A. Resta quindi definita una nuova funzione, ovvero la derivata complessa $f'(z)$ che può, a sua volta ammettere una derivata complessa, ovvero la **derivata complessa seconda** della funzione $f(z)$ e così via per le derivate di ordine superiore.

Dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 2

$$\left. \begin{array}{c} f \text{ è derivabile in modo complesso} \\ \text{in } z \in A \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ è differenziabile secondo Stolz} \\ \text{nel punto } z = x + iy \text{ e riesce} \\ f_x(x,y) + i f_y(x,y) = 0 \end{array} \right.$$

Dimostrazione. Implicazione diretta.

Per ipotesi:

$$\exists z \in A \mid \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) \in \mathbb{C},$$

quindi:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) + \omega(\Delta z),$$

dove $\omega(\Delta z)$ è un infinitesimo per $|\Delta z| \to 0$:

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \omega(\Delta z) = 0$$

Ciò implica

$$\begin{aligned} \Delta f &= f'(z)\,\Delta z + \omega(\Delta z)\,\Delta z \\ &= f'(z)\,(\Delta x + i\Delta y) + \omega(\Delta z)\,\Delta z \\ &= f'(z)\,\Delta x + i f'(z)\,\Delta y + \omega(\Delta z)\,\Delta z, \end{aligned}$$

avendosi

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\Delta f - [f'(z)\,\Delta x + i f'(z)\,\Delta y]}{|\Delta z|} = \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\omega(\Delta z)\,\Delta z}{|\Delta z|} = 0,$$

giacchè $\omega(\Delta z)\,\Delta z$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $|\Delta z|$. Da ciò segue la differenziabilità secondo Stolz di f nel punto $z \in A$. Dalla nozione di differenziabilità secondo Stolz, sappiamo che nel limite a primo membro dell'ultima equazione, i coefficienti degli incrementi $\Delta x, \Delta y$ sono i valori assunti dalle derivate parziali f_x, f_y nel punto (x,y), cioè

$$f'(z) = f_x(x,y), \quad i f'(z) = f_y(x,y),$$

cosicchè:

$$f_x(x,y) = -i f_y(x,y),$$

da cui l'asserto.

Implicazione inversa.

Per ipotesi la funzione è differenziabile in $z \in A$, per cui $\eta(\Delta z) = \Delta f - [f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y]$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $|\Delta z|$:

$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{\eta(\Delta z)}{\Delta z} = 0$$

Il rapporto incrementale si scrive:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{[f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y] + \eta(\Delta z)}{\Delta z}$$

Per ipotesi è $f_x(x,y) + i f_y(x,y) = 0$, onde:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{[f_x(x,y)\Delta x + i f_x(x,y)\Delta y] + \eta(\Delta z)}{|\Delta z|} \\ &= f_x(x,y) + \frac{\eta(\Delta z)}{|\Delta z|}\end{aligned}$$

Per $\Delta z \to 0$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f_x(x,y),$$

onde l'asserto. ■

Definizione 3 *Assegnata la funzione complessa (1), diremo che f è* ***olomorfa*** *in un campo $A \subseteq E$, se f è derivabile in modo complesso in A.*

Con tale definizione, il teorema precedente può essere enunciato come

Teorema 4

$$f \text{ è olmorfa in } A \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ è differenziabile secondo Stolz in } A \\ \text{e le sue derivate parziali verificano l'equazione} \\ f_x(x,y) + i f_y(x,y) = 0 \end{array} \right.$$

Definizione 5 *L'equazione*

$$f_x(x,y) + i f_y(x,y) = 0, \tag{5}$$

*è l'**equazione di Cauchy-Riemann** o **equazione di monogeneità**.*

Cerchiamo ora di sintetizzare le nozioni introdotte. Con la definizione di derivata complessa non abbiamo fatto altro che estendere il concetto di derivata di una funzione reale di una variabile reale, al caso di una funzione complessa di una variabile complessa. Si noti che tale estensione non è per nulla simile alla definizione di derivazione parziale di una $f(x,y)$ che eventualmente assume valori complessi, poichè nel caso della derivazione complessa le variabili (x,y) vengono "inglobate" nell'unica variabile complessa $z = x + iy$. In parole povere, la derivazione complessa "somiglia" più all'operazione di derivazione di una funzione di una sola variabile. Anche l'interpretazione geometrica ammette una ragionevole estensione al caso di una funzione complessa $f(z)$, per cui si attribuisce una *liscezza complessa* a una funzione olomorfa. Non a caso, quest'ultima è differenziabile secondo Stolz, per cui il grafico è dotato - punto per punto - di piano tangente. Tuttavia, da sola la differenziabilità non basta per garantire l'olomorfia di una funzione complessa, giacchè le sue derivate parziali devono soddisfare l'equazione di Cauchy-Riemann che può essere riscritta in termini di parte reale e parte immaginaria di f. Più precisamente, poniamo:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z),$$

per cui

$$f_x(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f_y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

onde l'equazione di Caucy-Riemann diventa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

cioè:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6}$$

Teorema 6 ***Ipotesi:*** *$f(z)$ è olomorfa in un campo connesso A. Le funzioni $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ verificano l'equazione:*

$$\varphi(u,v) = 0,$$

dove $\varphi : B \to \mathbb{R}$ con $B \subseteq \mathbb{R}^2$, è differenziabile secondo Stolz in B e tale che

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 > 0 \tag{7}$$

Tesi: *$f(z)$ =costante, $\forall z \in A$.*

Dimostrazione. Per ipotesi

$$\varphi[u(x,y), v(x,y)] = 0, \quad \forall (x,y) \in A$$

con φ funzione differenziabile secondo Stolz nel campo B, onde per il teorema di derivazione delle funzioni composte (vedi appunti precedenti):

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto delle (6):

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}, \tag{8}$$

che è un sistema omogeno nelle incognite $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)$, il cui determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{vmatrix} = -\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\right] < 0,$$

in virtù dell'ipotesi (7). Il non annullarsi del determinante implica l'esistenza della sola soluzione banale:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

che a sua volta implicano, attraverso le (6):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Per ipotesi A è un campo connesso, onde per un noto teorema si ha:

$$\forall (x,y) \in A, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Longrightarrow u(x,y) = C_1, \quad \forall (x,y) \in A$$
$$\forall (x,y) \in A, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow v(x,y) = C_2, \quad \forall (x,y) \in A,$$

essendo C_1, C_2 costanti reali. Cioè

$$f(x,y) = C_1 + iC_2, \quad \forall (x,y) \in A,$$

onde l'asserto. ■

Da tale teorema segue il corollario:

Corollario 7 *Una funzione olomorfa che in un campo connesso A assume solo valori reali o solo valori immaginari, è necessariamente costante in A.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo che f assuma solo valori reali in A, cioè $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x,y) = 0, \ \forall (x,y) \in A$, onde $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Dalle (6) segue

$$\forall (x,y) \in A, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \underset{A \text{ è connesso}}{\Longrightarrow} u(x,y) = C, \qquad \forall (x,y) \in A,$$

onde l'asserto. ■

Il corollario appena dimostrato fornisce, dunque, un'importante caratterizzazione di una funzione olomorfa in un campo connesso, secondo cui una qualunque funzione olomorfa che in un campo connesso assume solo valori reali o solo valori immaginari, si riduce a una costante.

Riferimenti bibliografici

[1] FicheraG., De Vito L.: *Funzioni analitiche di una variabile complessa,* Veschi, 1987.