Funzioni non regolari all'infinito

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Devo aver letto da qualche parte che la continuità di una funzione reale di una variabile reale rappresenta la soglia minima per l'*onestà* della funzione medesima. Ricordiamo che con tale termine si indica scherzosamente, ma efficacemente, la regolarità di una funzione, intesa come continuità, nonchè esistenza delle derivate (continue) fino ad un certo ordine n (in tal caso si dice che la funzione è di classe C^n sul suo campo di esistenza).

La soglia minima è, invece, rappresentata dalla regolarità intesa come esistenza del limite (finito o infinito). Prendiamo ad esempio, la funzione $\sin x$ che è onesta, in quanto di classe C^∞ sul campo reale $\mathbb{R}$. Ma se vogliamo attenerci alla definizione precedente, siamo costretti ad asserire che tale funzione non è onesta per $|x| \to +\infty$. Sussiste, invero, la seguente proposizione:

Proposizione 1 *La funzione* $\sin x$ *è non regolare per* $|x| \to +\infty$

Dimostrazione. Posto $f(x) = \sin x$, osserviamo che tale funzione non può essere divergente per $|x| \to +\infty$, in quanto limitata tra -1 e $+1$. Gli zeri di f sono:

$$x_k = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

I punti in cui è $f(x) = 1$:

$$x'_k = \frac{\pi}{2}(1 + 4k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

I punti in cui è $f(x) = -1$:

$$x''_k = \frac{\pi}{2}(3 + 4k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

In fig. 1 riportiamo il diagramma cartesiano della restrizione di $f(x)$ all'intervallo $[0, 2\pi]$.

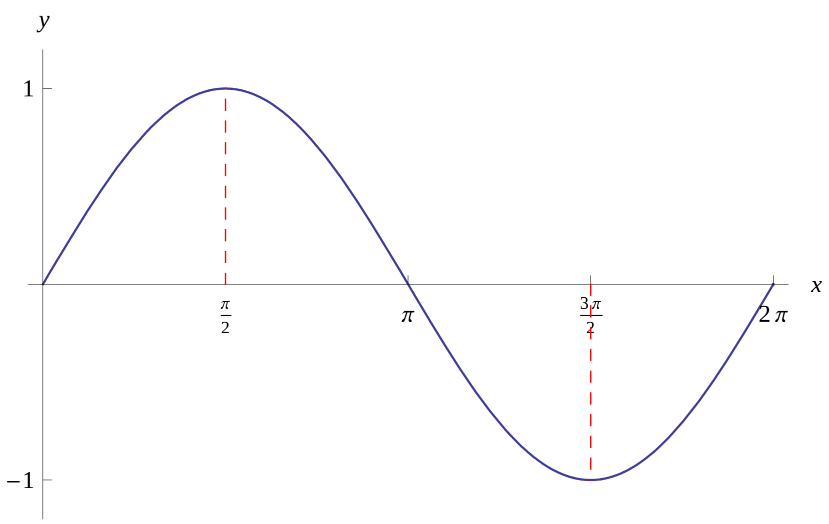

Figura 1: Diagramma cartesiano di $\sin x$ per $x \in [0, 2\pi]$.

Restano così definite le successioni:

$$\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \{x'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \{x''_k\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

che sono divergenti per per $|k| \to +\infty$. Senza perdita di generalità, consideriamo il caso $k \to +\infty$:

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = \lim_{k\to+\infty} x'_k = \lim_{k\to+\infty} x''_k = +\infty \tag{1}$$

Applicando la definizione di limite di una successione:

$$\forall I_\sigma(+\infty),\ \begin{cases} \exists n_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n_\sigma \Longrightarrow x_k \in I_\sigma(+\infty) \\ \exists n'_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n'_\sigma \Longrightarrow x'_k \in I_\sigma(+\infty) \\ \exists n''_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n''_\sigma \Longrightarrow x''_k \in I_\sigma(+\infty) \end{cases},$$

dove $I_\sigma(+\infty) = (\sigma, +\infty)$ con $\sigma > 0$. Posto $\bar{n}_\sigma = \max\{n_\sigma, n'_\sigma, n''_\sigma\}$, si ha:

$$\forall I_\sigma(+\infty),\ \exists \bar{n}_\sigma \in \mathbb{N} \mid\ k > \bar{n}_\sigma \Longrightarrow x_k, x'_k, x''_k \in I_\sigma(+\infty)$$

Da ciò segue:

$$\forall I_\sigma(+\infty),\ \exists x, x', x'' \in I_\sigma(+\infty) \mid \left(\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x') = 1 \\ f(x'') = -1 \end{cases} \right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\nexists l \in \mathbb{R} \mid \forall J_\varepsilon(l),\ \exists I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon(l))$$
$$\Longrightarrow \nexists l \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

■

La proposizione appena dimostrata si generalizza a una qualunque funzione periodica:

Proposizione 2

$$f \text{ è periodica} \Longrightarrow f \text{ è non regolare per } |x| \to +\infty$$

Si osservi che l'implicazione non è invertibile:

$$f \text{ è non regolare per } |x| \to +\infty \nRightarrow f \text{ è periodica}$$

Cioè la non regolarità per $|x| \to +\infty$ è condizione necessaria ma non sufficiente per la periodicità. Un esempio è offerto dalla funzione $f(x) = \sin x^2$ che è manifestamente non periodica. Dal momento che anche questa funzione è limitata tra -1 e 1, per cui se è regolare per $|x| \to +\infty$ è necessariamente convergente a $l \in [-1, 1]$. Tuttavia, a ogni intorno $J_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ possiamo associare intorni $I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) = (\delta_\varepsilon, +\infty)$ tali che $x \in I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \nRightarrow f(x) \in J_\varepsilon(l)$, come illustrato in fig. 2

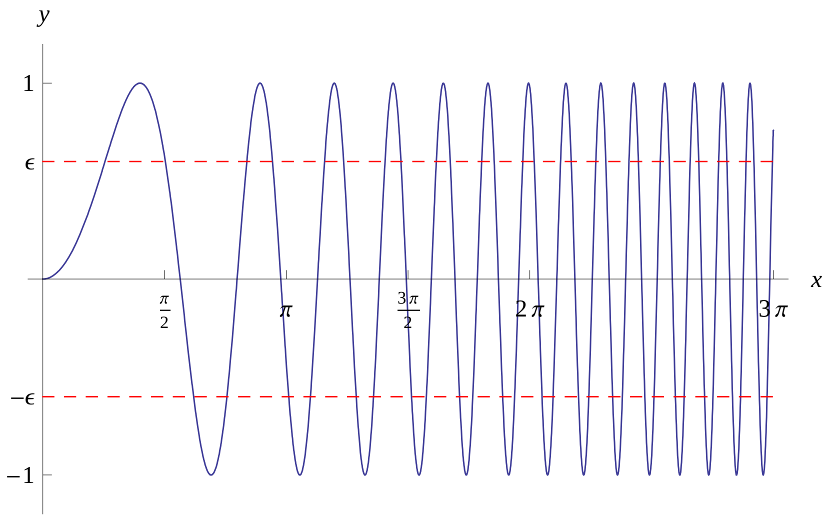

Figura 2: Diagramma cartesiano di $\sin x^2$ per $x \in [0, 3\pi]$. Preso ad arbitrio $J_\varepsilon(l) = (l - 1, l + 1)$ (in questo caso abbiamo supposto $l = 0$) possiamo associare intorni $I_{\delta_\varepsilon}(+\infty)$ tali che $x \in I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \nRightarrow (x, \sin x^2) \in \mathcal{R}_\varepsilon = I_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \times J_\varepsilon(l)$.