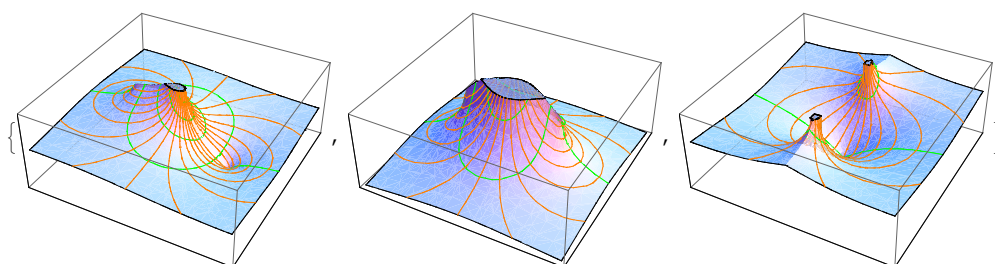


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Funzioni reali di n variabili reali

Marcello Colozzo



Indice

1	Funzioni reali di n variabili reali	2
1.1	Definizione di funzione	2
1.2	Limite di una funzione di più variabili	7
1.3	Funzioni continue	11
1.4	Esercizi svolti	13
1.5	Esercizi proposti	57
1.6	Calcolo differenziale per funzioni di più variabili (parte I)	59
1.6.1	Derivazione parziale delle funzioni di due variabili	59
1.7	Derivazione parziale delle funzioni di $n > 2$ variabili	70
1.8	Differenziale totale	71
1.9	Derivazione di funzioni composte	75
1.9.1	Esercizi svolti	79
1.10	Funzioni costanti	88
1.11	Derivata secondo una direzione	89
1.11.1	Esercizi svolti	93
1.12	Differenziali totali successivi. L'operatore differenziale d	95
1.12.1	Esercizi	99
1.13	Formula di Taylor	111
1.14	Funzioni omogenee: teorema di Eulero	118
1.15	Forme quadratiche	119
I		122

Capitolo 1

Funzioni reali di n variabili reali

1.1 Definizione di funzione

Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1 Una funzione reale f delle n variabili reali x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) è una legge:

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

che ad ogni $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ associa univocamente il numero reale $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. L'insieme X è l'**insieme di definizione** della funzione.

Osservazione 2 Una funzione viene indicata con una lettera del tipo f, g , mentre il valore assunto in un punto $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, con $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o con $f(P)$.

Definizione 3 Dicesi **diagramma cartesiano** o **grafico** di una funzione f definita in $X \subseteq \mathbb{R}^n$, l'insieme di punti:

$$G(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X, x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \quad (1.2)$$

Ad esempio, per $n = 1$ è $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$. Il grafico è:

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, y = f(x)\}, \quad (1.3)$$

cioè la curva di equazione $y = f(x)$. Per $n = 2$ è $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Il grafico è:

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}, \quad (1.4)$$

cioè la superficie di equazione $z = f(x, y)$.

Definizione 4 Dicesi **ipersuperficie di livello** di una funzione f definita in $X \subseteq \mathbb{R}^{n \geq 2}$, l'insieme di punti:

$$\Gamma(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\}, \quad (1.5)$$

essendo c una costante reale assegnata.

Ad esempio, per $n = 2$ abbiamo le **curve di livello**:

$$\Gamma(f) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = c\} \quad (1.6)$$

Per $n = 3$ abbiamo le **superfici di livello**:

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x, y, z) = c\}, \quad (1.7)$$

Vediamo quindi che a differenza del caso 1-dimensionale ci si preoccupa esclusivamente di tracciare il grafico di f , nel caso 2-dimensionale dobbiamo cercare di visualizzare sia il grafico che le curve di livello. Per $n \geq 3$ si procede esclusivamente per via analitica, giacchè non è possibile visualizzare oggetti in $\mathbb{R}^{n \geq 4}$. L'ambiente di calcolo **Mathematica** implementa un set di istruzioni grafiche riassunte nel seguente schema:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \implies \text{Plot} \\ f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \implies \text{Plot3D}, \quad \text{ContourPlot}, \quad \text{DensityPlot} \end{aligned}$$

Esempio 5

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Qui è $X = \mathbb{R}^2$, mentre il grafico è un paraboloide di rivoluzione¹, come mostrato in fig. 1.1 Le curve di livello sono $\Gamma(f) : x^2 + y^2 = c > 0$, cioè circonferenze centrate nell'origine e di raggio $\sqrt{c}$.

Esempio 6

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Qui è $X = \mathbb{R}^2$, mentre il grafico è un paraboloide iperbolico. Le curve di livello sono $\Gamma(f) : x^2 - y^2 = c > 0$, cioè iperboli equilateri, come mostrato in fig. 1.2.

Esempio 7

$$f(x, y) = \ln(x^3 + y^3)$$

Questa funzione è definita in

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \quad y > -x\}$$

Il grafico è in fig. 1.3.

Le curve di livello sono

$$\Gamma(f) : \ln(x^3 + y^3) = K \implies x^3 + y^3 = e^K \stackrel{\text{def}}{=} c > 0,$$

plottate in fig. 1.4.

Esempio 8

$$f(x, y) = \ln(x + y)$$

L'insieme di definizione è il semipiano

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \quad y > -x\},$$

che è un campo illimitato e connesso.

¹È una superficie di rotazione, in questo caso generata dalla rotazione di una parabola attorno all'asse z .

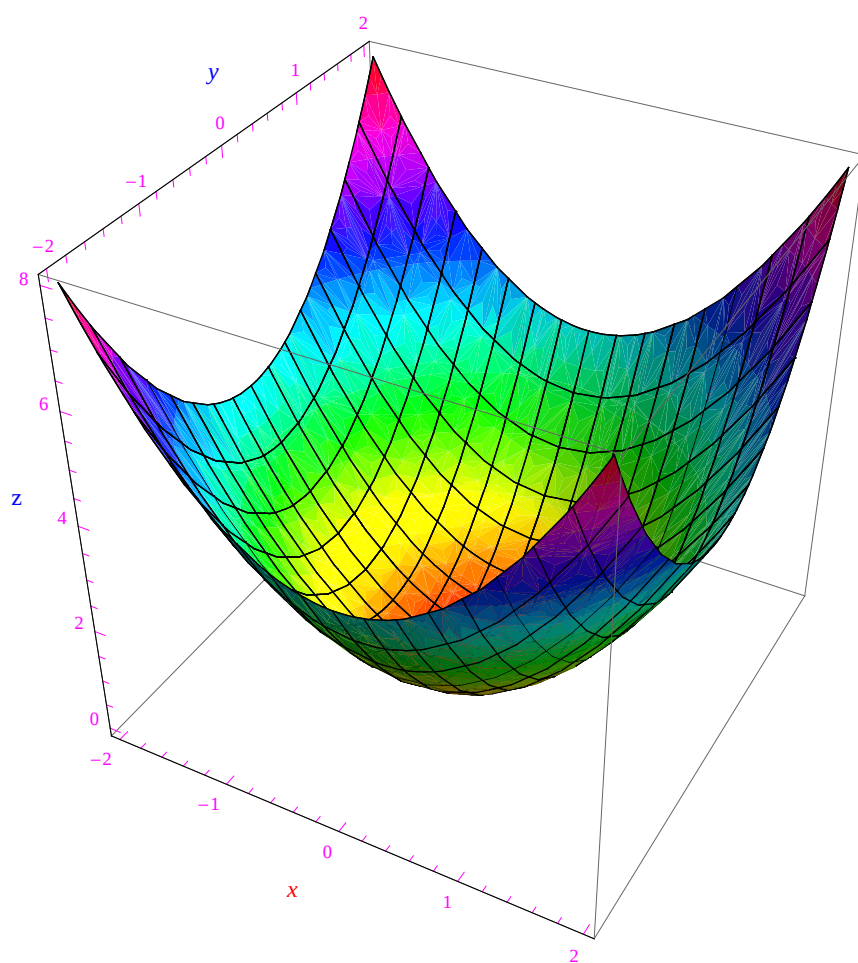


Figura 1.1: Grafico di $f(x, y) = x^2 + y^2$

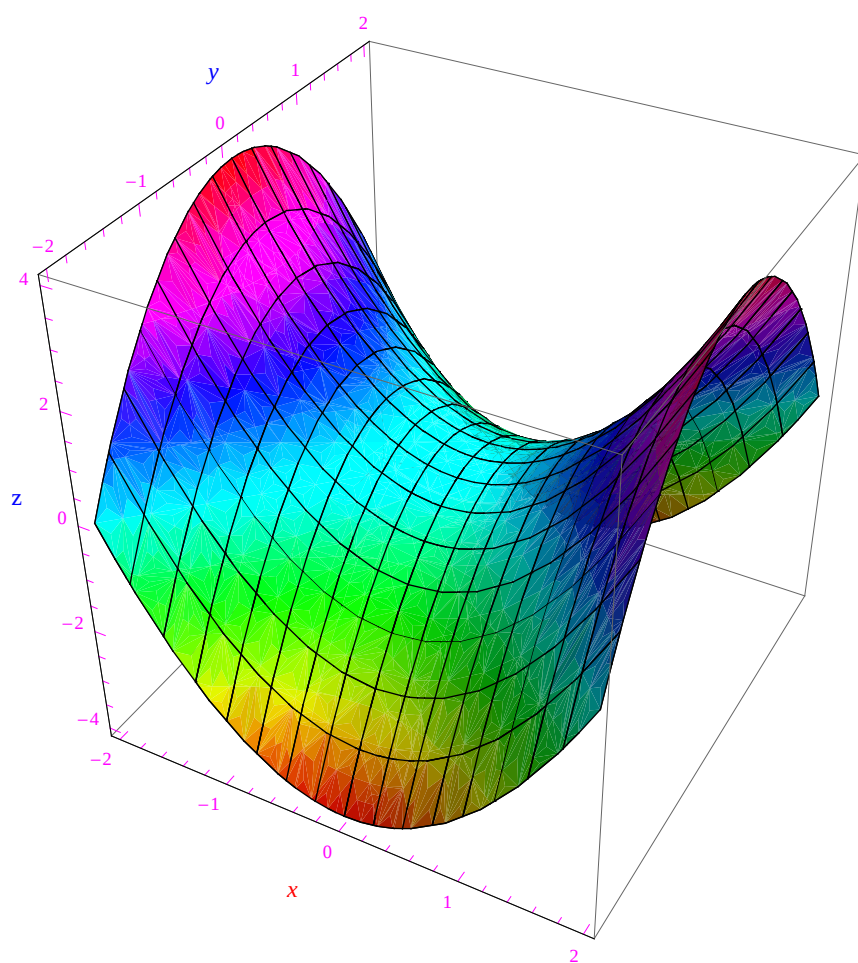


Figura 1.2: Grafico di $f(x, y) = x^2 - y^2$

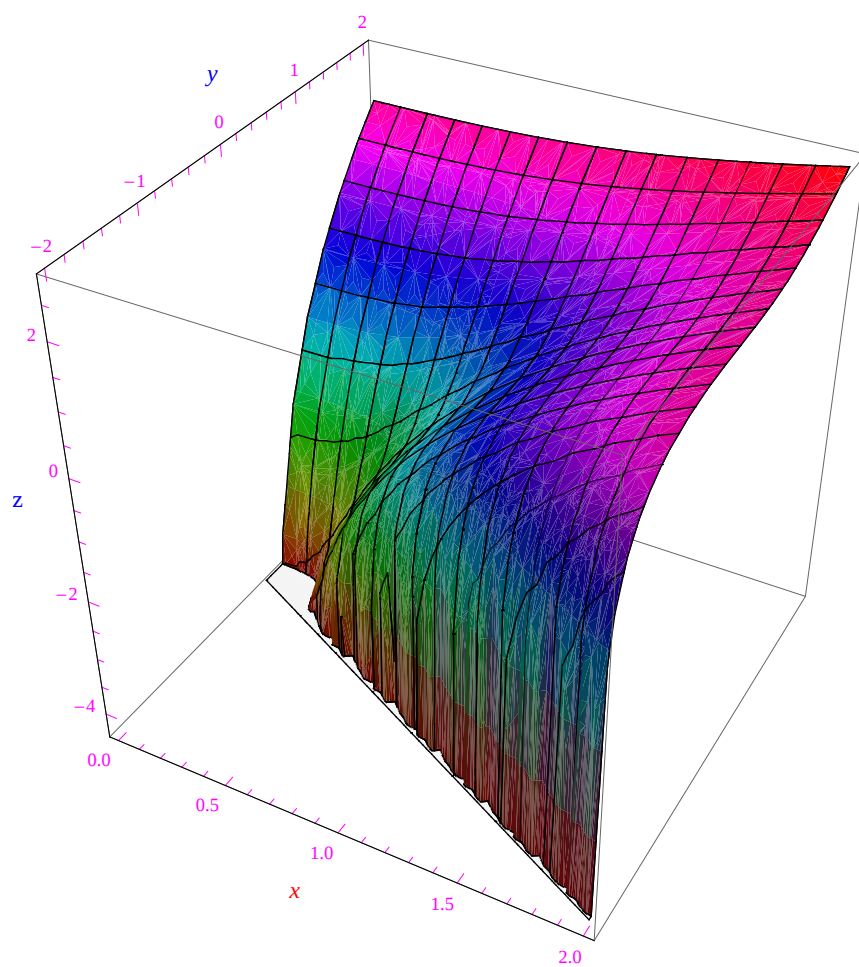
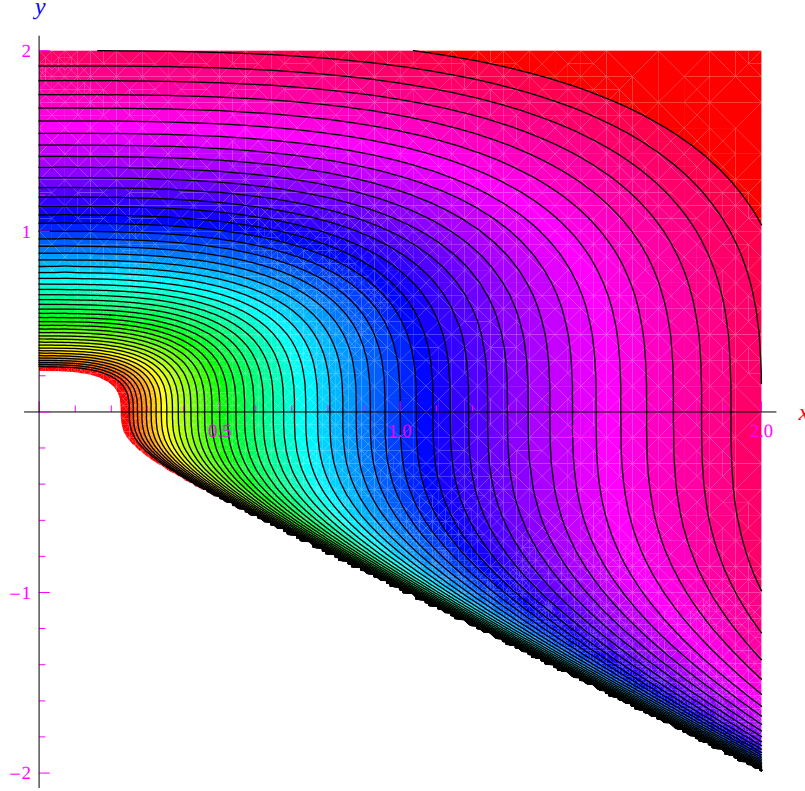


Figura 1.3: Grafico di $f(x, y) = \ln(x^3 + y^3)$


 Figura 1.4: Curve di livello di $f(x, y) = \ln(x^3 + y^3)$

1.2 Limite di una funzione di più variabili

Assegnato lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, denotiamo con $I_\delta(O)$ il campo circolare di centro l'origine e raggio δ :

$$I_\delta(O) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k^2 < \delta^2 \right\}$$

Definizione 9

$$I(\infty) \subset \mathbb{R}^n \text{ è un } \textbf{intorno del punto all'infinito} \iff I(\infty) \cap C(I_\delta(O)) \neq \emptyset, \forall \delta > 0 \quad (1.8)$$

essendo $C(I_\delta(O)) = \mathbb{R}^n - I_\delta(O)$, i.e. il complementare in $\mathbb{R}^n$ di $I_\delta(O)$.

La definizione di punto di accumulazione si estende immediatamente al punto all'infinito che possiamo denotare con l'usuale simbolo convenzionale ∞ :

Definizione 10 Il punto all'infinito è di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}^n$, se in ogni suo intorno cade almeno un punto di X . In simboli:

$$\infty \text{ è di accumulazione per } X \subseteq \mathbb{R}^n \iff \forall I(\infty), \exists P \in X \cap I(\infty)$$

Sia f definita in $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Se il punto all'infinito è di accumulazione per X , sussiste la definizione seguente:

Definizione 11 La funzione f è **convergente** per $P \rightarrow \infty$, se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall J_\varepsilon(l), \exists I(\infty) \mid P \in X \cap I(\infty) \implies f(P) \in J_\varepsilon(l),$$

essendo $J_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ un intorno di l . Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(P) = l$$

La definizione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(P) = l \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid P \in X \quad \rho > \delta_\varepsilon \implies |f(P) - l| < \varepsilon$$

essendo $\rho = \overline{OP} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$

Definizione 12 La funzione f è **divergente positivamente** per $P \rightarrow \infty$, se

$$\forall J_\varepsilon(+\infty), \exists I(\infty) \mid P \in X \cap I(\infty) \implies f(P) \in J_\varepsilon(+\infty),$$

essendo $J_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon, +\infty)$.

Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(P) = +\infty$$

La definizione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(P) = +\infty \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid P \in X \quad \rho > \delta_\varepsilon \implies f(P) > \varepsilon$$

Definizione 13 La funzione f è **divergente negativamente** per $P \rightarrow \infty$, se

$$\forall J_\varepsilon(-\infty), \exists I(\infty) \mid P \in X \cap I(\infty) \implies f(P) \in J_\varepsilon(-\infty),$$

essendo $J_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\varepsilon)$.

Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(P) = -\infty$$

La definizione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} f(P) = -\infty \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid P \in X, \quad \rho > \delta_\varepsilon \implies f(P) < -\varepsilon$$

Consideriamo ora un punto P_0 che sia di accumulazione al finito per X , cioè $P_0 \in \mathcal{D}(X)$, ove $\mathcal{D}(X)$ è il derivato di X .

Definizione 14 La funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è **convergente** in P_0 , se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall J_\varepsilon(l), \exists I_{\delta_\varepsilon}(P_0) \mid P \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(P_0) - \{P_0\} \implies f(P) \in J_\varepsilon(l)$$

Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l$$

La definizione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid P \in X, \quad 0 < \rho < \delta_\varepsilon \implies |f(P) - l| < \varepsilon)$$

Qui è $\rho = \text{dist}(P, P_0) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^{(0)})^2}$, essendo $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ le coordinate cartesiane di P_0 .

Definizione 15 La funzione f è **divergente positivamente** in P_0 , se

$$\forall J_\varepsilon(+\infty), \exists I_{\delta_\varepsilon}(P_0) \mid P \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(P_0) - \{P_0\} \implies f(P) \in J_\varepsilon(+\infty)$$

Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = +\infty$$

La definizione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = +\infty \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid P \in X, \quad 0 < \rho < \delta_\varepsilon \implies f(P) > \varepsilon)$$

Definizione 16 La funzione f è **divergente negativamente** in P_0 , se

$$\forall J_\varepsilon(-\infty), \exists I_{\delta_\varepsilon}(P_0) \mid P \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(P_0) - \{P_0\} \implies f(P) \in J_\varepsilon(-\infty)$$

Quindi scriviamo:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = -\infty$$

La definizione precedente può essere riscritta:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = -\infty \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid P \in X, \quad 0 < \rho < \delta_\varepsilon \implies f(P) < -\varepsilon)$$

Nel caso di una funzione di due variabili, si usa scrivere:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) &= l, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) &= l \end{aligned}$$

anzichè:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l$$

Esempio 17

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Risulta:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{x^2 + y^2} > \delta_\varepsilon \implies x^2 + y^2 > \varepsilon$$

Quindi:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} (x^2 + y^2) = +\infty$$

Esempio 18

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad (1.9)$$

Questa funzione è definita in $X = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, con $O(0, 0)$ punto di accumulazione, per cui studiamo il comportamento nel limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. A tale scopo osserviamo che:

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{0\}, f(0, y) = 0$$

Cioè f è identicamente nulla se calcolata lungo l'asse x , ed è una costante ($= 1$) sull'asse y , giacché

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, f(x, 0) = 1$$

Ne consegue che in ogni intorno di $(0, 0)$ cadono infiniti punti in cui f è nulla, e infiniti punti in cui vale 1. Ciò implica:

$$\nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

Alternativamente, passiamo a coordinate polari nel piano xy :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Segue $g(r, \varphi) = f[(r, \varphi)] = \cos^2 \varphi$. Il limite è:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi$$

Cioè il valore dipende dalla direzione (φ) secondo cui $P(x, y)$ si avvicina all'origine. Da ciò segue che il limite non esiste. Si noti che i valori 0 e 1 vengono riprodotti ponendo $\varphi = \pi/2$ ($P(x, y)$ si avvicina all'origine lungo l'asse y) e $\varphi = 0$ ($P(x, y)$ si avvicina all'origine lungo l'asse x). Il grafico è riportato in fig 1.5.

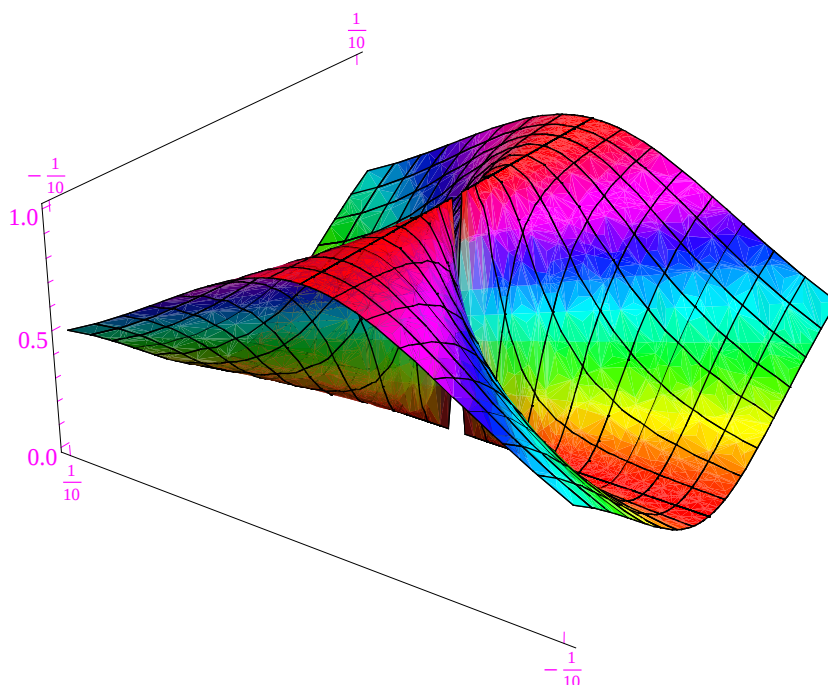


Figura 1.5: Grafico di $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

Osservazione 19 I teoremi sui limiti delle funzioni di una variabile che non coinvolgono proprietà di monotonia, si estendono al caso di $n > 1$ variabili.

1.3 Funzioni continue

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{D}(X) \neq \emptyset$.

Definizione 20

$$f \text{ è } \textbf{continua} \text{ in } P_0 \iff \left(\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0) \right) \quad (1.10)$$

Nel caso contrario diremo che P_0 è **punto di discontinuità per** f . In questa circostanza i casi possibili sono:

1. $P_0 \in \mathcal{D}(X)$, $P_0 \notin X$ (cioè la funzione non è definita in P_0).
2. $P_0 \in X \cap \mathcal{D}(X)$, cioè la funzione è definita in P_0 , ma si verifica una delle seguenti circostanze:

- (a) $\nexists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$
- (b) $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l \in \mathbb{R}$, con $l \neq f(P_0)$
- (c) $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \pm\infty$

Consideriamo il caso 2b:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l \in \mathbb{R}, \quad \text{con } l \neq f(P_0),$$

cioè la funzione è convergente in P_0 , ma il limite è diverso dal valore assunto da f in P_0 . In tal caso, possiamo definire la funzione:

$$g : P \in X \longrightarrow \begin{cases} f(P), & \text{se } P \neq P_0 \\ l, & \text{se } P = P_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Diremo che la funzione (1.11) è *ottenuta modificando il valore di f in P_0* . Consideriamo ora il caso 1. Anche qui si verifica uno dei sottocasi a, b, c. Precisamente:

- a. $\nexists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$
- b. $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l \in \mathbb{R}$
- c. $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \pm\infty$

Riferiamoci al caso b:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = l \in \mathbb{R}, \quad \text{con } P_0 \in \mathcal{D}(X), P_0 \notin X,$$

cioè la funzione è convergente in P_0 ma non è ivi definita. Possiamo comunque definire la funzione seguente:

$$h : P \in X \cup \{P_0\} \longrightarrow \begin{cases} f(P), & \text{se } P \neq P_0 \\ l, & \text{se } P = P_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Diremo che la funzione (1.12) è **il prolungamento continuo di f su P_0** . In entrambi i casi (1.11)-(1.12), P_0 è una **discontinuità eliminabile per f** .

Esempio 21 Sia

$$f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$$

La funzione è definita in $X = \mathbb{R}^2 - \{P_0\}$, essendo $P_0(0, 0) \in \mathcal{D}(X)$. Per il calcolo del limite per $P \rightarrow P_0$, è conveniente passare a coordinate polari nel piano xy :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Quindi

$$g(r, \varphi) = f[x(r, \varphi), y(r, \varphi)] = \frac{r^4 \cos^4 \varphi}{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = r^2 \cos^4 \varphi$$

Cosicché

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^4 \varphi = 0 \cdot \cos^4 \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in [0, \pi]$$

Da ciò segue che P_0 è una discontinuità eliminabile. La funzione è resa continua prolungando per continuità:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

Il grafico è riportato in fig 1.6.

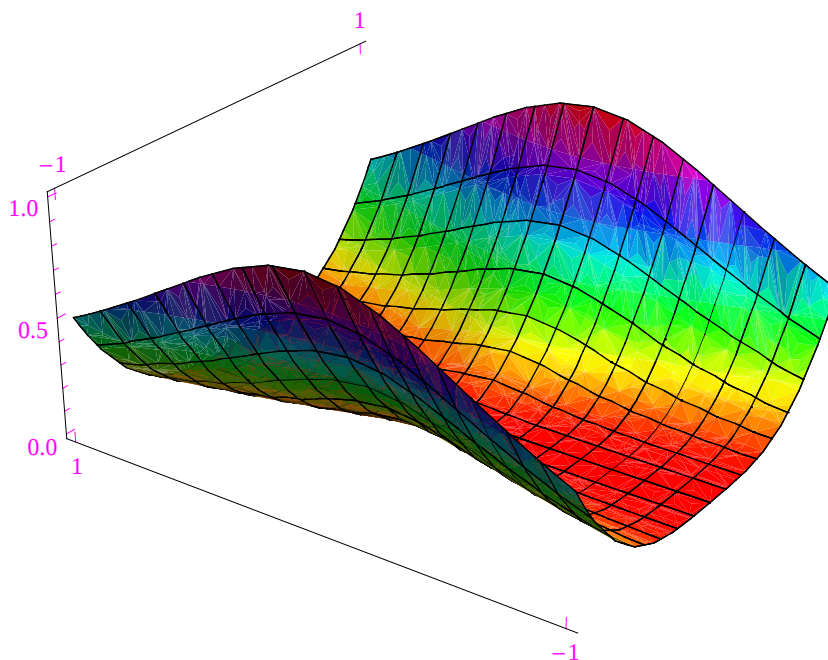


Figura 1.6: Grafico di $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$

In tutti gli altri casi P_0 è un **punto di discontinuità non eliminabile** o che è una **singolarità** per f . Ciò si verifica se f è divergente in P_0 o se il limite non esiste. Ad esempio, il punto $P_0(0, 0)$ è una singolarità per la funzione (1.9).

Definizione 22 Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è **continua** in X , se è continua in ogni $P \in X$.

1.4 Esercizi svolti

Esercizio 23 *Assegnata la funzione:*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (1.13)$$

determinare l'insieme di definizione e le curve di livello. La funzione è continua?

Soluzione. Deve essere $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, per cui:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad (1.14)$$

cioè il dominio circolare di centro $(0, 0)$ e raggio 1. La generica curva di livello ha equazione

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = c \geq 0 \iff 1 - x^2 - y^2 = c^2 \iff x^2 + y^2 = 1 - c^2$$

Osserviamo che deve risultare $c \geq 0$ e $1 - c^2 \geq 0$, i.e. $0 \leq c \leq 1$. Ne consegue che la più generale curva di livello è

$$\gamma_c : x^2 + y^2 = 1 - c^2, \quad \forall c \in [0, 1],$$

ossia γ_c appartiene alla famiglia di circonferenze concentriche di centro $O(0, 0)$ e raggio $\sqrt{1 - c^2}$, $\forall c \in [0, 1]$.

Riguardo all'ultimo quesito, la funzione è manifestamente continua in D .

Esercizio 24 *Determinare l'insieme di definizione e le curve di livello della funzione:*

$$f(x, y) = 1 + \sqrt{-(x - y)^2} \quad (1.15)$$

Soluzione. Deve essere

$$-(x - y)^2 \geq 0 \iff (x - y)^2 \leq 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

onde:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, y = x\} \quad (1.16)$$

Cioè la funzione è definita sulla bisettrice del primo e terzo quadrante. Più precisamente:

$$f(x, y) = 1, \quad \forall (x, y) \in A,$$

ovvero la funzione è una costante. Ne consegue che l'unica curva di livello è l'insieme di definizione.

Esercizio 25 *Determinare l'insieme di definizione della funzione:*

$$f(x, y) = \ln(x + y) \quad (1.17)$$

Soluzione. Deve essere

$$x + y > 0 \iff y > -x$$

onde:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -x < y < +\infty\} \quad (1.18)$$

Cioè la funzione è definita nella regione al di sopra dalla bisettrice del secondo e quarto quadrante. Le curve di livello sono definite implicitamente dall'equazione

$$\ln(x + y) = K \implies x + y = e^K \stackrel{\text{def}}{=} c > 0$$

Segue che le curve di livello della funzione assegnata compongono il fascio improprio di rette

$$y = -x + c, \quad 0 < c < +\infty \quad (1.19)$$

Esercizio 26 Determinare l'insieme di definizione e le curve di livello della funzione:

$$f(x, y) = |x| + \arccos y \quad (1.20)$$

Soluzione. Deve essere

$$|y| \leq 1 \iff y \in [-1, 1]$$

onde:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -1 \leq y \leq 1\} \quad (1.21)$$

Cioè la striscia orizzontale $\mathbb{R} \times [-1, 1]$. L'equazione della generica curva di livello si scrive:

$$|x| + \arccos y = c \iff y = \cos(c - |x|)$$

Per $c = 0$ otteniamo il luogo degli zeri

$$y = \cos(-|x|) = \cos(|x|) = \cos x,$$

ovvero la cosinusoidale è il luogo degli zeri della funzione assegnata.

Esercizio 27 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$$

Soluzione. Deve essere

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 - y^2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-1, 1] \\ y \in [-1, 1] \end{cases}$$

onde:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

Cioè il quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Esercizio 28 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1}$$

Soluzione. Deve essere

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ y^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases}$$

onde:

$$A = \mathbb{R}^2 - \mathcal{R}$$

dove $\mathcal{R} = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Esercizio 29 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$$

Soluzione. Deve essere

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{y}{x} \leq 1 \\ \frac{y}{x} \geq -1 \end{cases} \quad (1.22)$$

Indichiamo con A_1 l'insieme delle soluzioni della prima delle (1.22) e con A_2 l'insieme delle soluzioni della seconda delle (1.22).

$$\frac{y}{x} \leq 1 \iff \frac{y-x}{x} \leq 0$$

Risolviando quindi la disequazione $\frac{y-x}{x} \leq 0$:

$$\begin{aligned} x > 0 &\implies y - x \leq 0 \implies y \leq x \\ x < 0 &\implies y - x \geq 0 \implies y \geq x \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < +\infty, -\infty < y \leq x\} \\ X_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < 0, x \leq y < +\infty\}, \end{aligned}$$

cosicchè $A_1 = X_1 \cup X_2$. Passiamo ora alle soluzioni della seconda delle (1.22):

$$\frac{y}{x} \geq -1 \iff \frac{y+x}{x} \leq 0$$

Cioè:

$$\begin{aligned} x > 0 &\implies y + x \leq 0 \implies y \leq -x \\ x < 0 &\implies y + x \geq 0 \implies y \geq -x \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < +\infty, -x \leq y < +\infty\} \\ Y_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < 0, -\infty < y \leq -x\}, \end{aligned}$$

cosicchè $A_2 = Y_1 \cup Y_2$. Finalmente:

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cap A_2 \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -x \leq y \leq x\} - \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

Ne concludiamo che l'insieme di definizione della funzione proposta è la regione compresa tra le due bisettrici $y = x$ e $y = -x$, esclusa l'origine $(0, 0)$.

Esercizio 30 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) \tag{1.23}$$

Soluzione. Deve essere

$$\left|\frac{x}{y}\right| \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{x}{y} \leq 1 \\ \frac{x}{y} \geq -1 \end{cases} \tag{1.24}$$

L'insieme di definizione è:

$$X = X_1 \cup X_2, \tag{1.25}$$

dove:

$$X_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{y} \leq 1 \right\}$$

$$X_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{y} \geq -1 \right\}$$

Abbiamo:

$$(x, y) \in X_1 \iff \frac{x - y}{y} \leq 0$$

Risolvendo:

$$y > 0 \implies x - y \leq 0 \implies x \leq y$$

$$y < 0 \implies x - y \geq 0 \implies x \geq y,$$

per cui $X_1 = A_1 \cup A_2$, essendo:

$$A_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < +\infty, -\infty < x \leq y \}$$

$$A_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < y < 0, y \leq x < +\infty \}$$

Determiniamo l'insieme X_2 :

$$(x, y) \in X_2 \iff \frac{x + y}{y} \geq 0$$

Risolvendo:

$$y > 0 \implies x + y \geq 0 \implies x \geq -y$$

$$y < 0 \implies x + y \leq 0 \implies x \leq -y,$$

per cui $X_2 = B_1 \cup B_2$, essendo:

$$B_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < +\infty, -y \leq x < +\infty \}$$

$$B_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < y < 0, -\infty < x \leq -y \},$$

Finalmente, dalla (1.25):

$$X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -|x| \geq y \geq |x| \} \setminus \{ (0, 0) \}$$

come illustrato in fig 1.7.

Esercizio 31 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)}, \quad (1.26)$$

essendo $a > 0$.

Soluzione. Deve essere:

$$(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2) \geq 0 \quad (1.27)$$

$$\iff (x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 - 2a^2) \leq 0$$

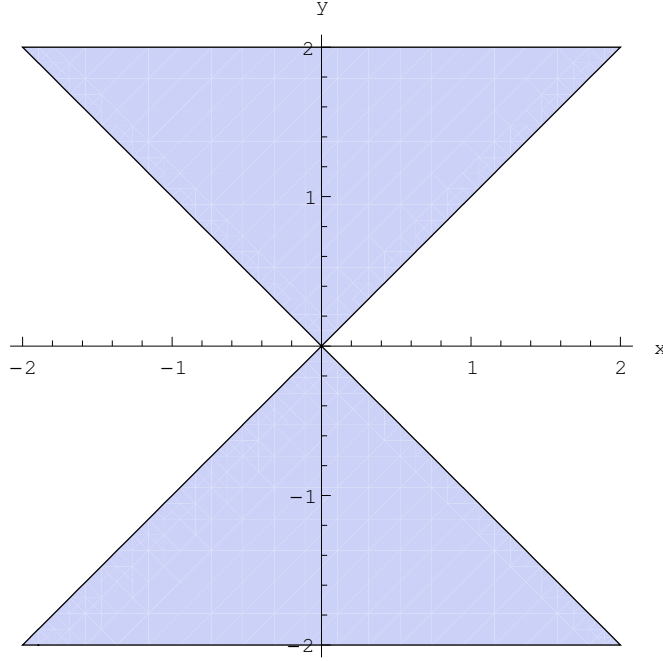


Figura 1.7: Campo di esistenza della funzione $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$. Si badi che il campo è illimitato. In figura appare limitato, in quanto per tracciarlo con il programma di calcolo *Mathematica*, abbiamo fissato gli intervalli $[-2, 2]$ sui rispettivi assi coordinati. L'origine $(0, 0)$ non appartiene all'insieme di definizione.

Poniamo per definizione:

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq a^2\}$$

Affinchè sia verificata la (1.27), deve essere:

$$\forall (x, y) \in X_1, (x, y) \in X_2,$$

dove:

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$$

Sia

$$\begin{aligned} A_1 &= X_1 \cap X_2 \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2\} \end{aligned}$$

Poniamo:

$$Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < a^2\}$$

Quindi:

$$A_2 = \{(x, y) \in Y_1 \mid x^2 + y^2 > 2a^2\} = \emptyset$$

Pertanto, l'insieme di definizione della funzione assegnata è:

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_2 = A_1 \cup \emptyset = A_1 \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2a^2\} \end{aligned}$$

cioè la corona circolare di raggi a e $2a$, circonferenze incluse.

Esercizio 32 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{y \sin x} \quad (1.28)$$

Soluzione. Deve essere:

$$\begin{aligned} y \geq 0 &\implies \sin x \geq 0 \implies x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ y \leq 0 &\implies \sin x \leq 0 \implies x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k+1)\pi, 2\pi(k+1)] \end{aligned}$$

La funzione è definita in $A = X_1 \cup X_2$, dove:

$$\begin{aligned} X_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi], 0 \leq y < +\infty \right\} \\ X_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k+1)\pi, 2\pi(k+1)], -\infty < y \leq 0 \right\}, \end{aligned}$$

come illustrato in fig. 1.8

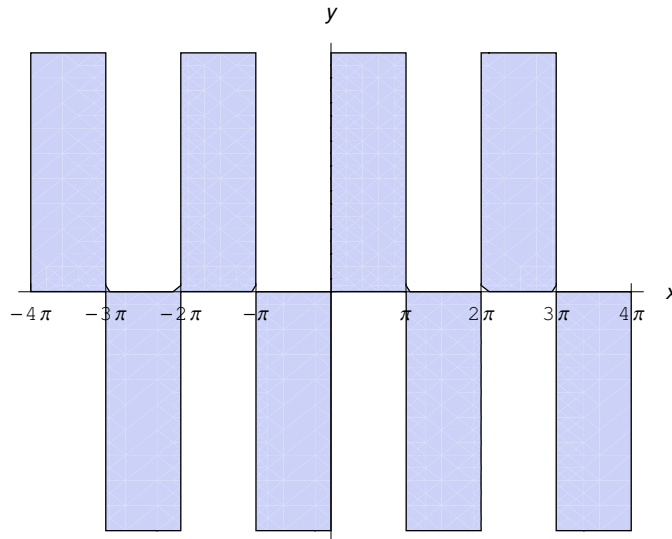


Figura 1.8: Insieme di definizione della funzione (1.28).

Esercizio 33

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \ln \sqrt{x^2 + y^2} &= \ln 0^+ = -\infty \end{aligned} \quad (1.29)$$

Cioè $P_0(0, 0)$ è una singolarità per f . Il grafico è riportato in fig 1.9.

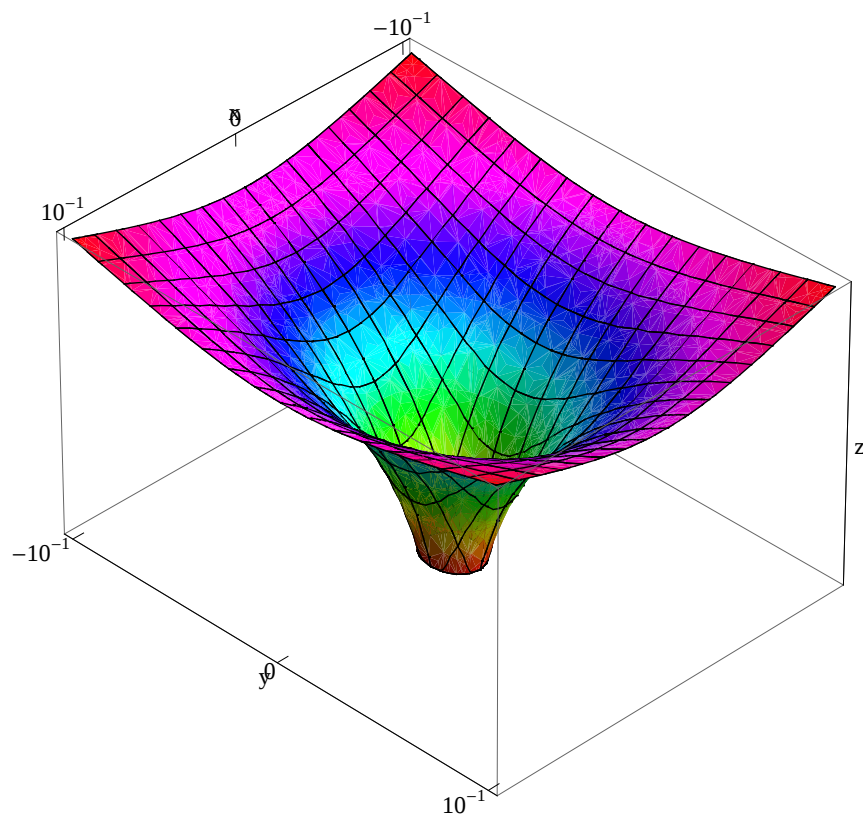


Figura 1.9: Grafico di $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. Per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ la funzione diverge negativamente.

Esercizio 34 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y) \quad (1.30)$$

Soluzione. Deve essere:

$$y > -x^2,$$

onde la funzione è definita in

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -x^2 < y < +\infty\}$$

Esercizio 35 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}} \quad (1.31)$$

Soluzione. Deve essere:

$$y - \sqrt{x} > 0 \implies \begin{cases} x \geq 0 \\ y > \sqrt{x} \end{cases}$$

Quindi la funzione è definita in

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, \sqrt{x} < y < +\infty\}$$

Esercizio 36 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{y}}} \quad (1.32)$$

Soluzione. Deve essere:

$$x - \sqrt{y} > 0 \implies \begin{cases} y \geq 0 \\ y < x^2 \end{cases}$$

Quindi la funzione è definita in

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, 0 \leq y < +\infty\}$$

Esercizio 37 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y - \sqrt{x}}} \quad (1.33)$$

Soluzione. Deve essere:

$$x - \sqrt{y} \neq 0 \implies \begin{cases} x \geq 0 \\ y \neq \sqrt{x} \end{cases}$$

Quindi la funzione è definita in

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, -\infty < y < +\infty, y \neq \sqrt{x}\}$$

Esercizio 38 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y} \quad (1.34)$$

Soluzione. Deve essere:

$$y \neq 0, x \neq 1$$

Cioè tutto il piano escluso l'asse x e la retta verticale $x = 1$.

Esercizio 39 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} \quad (1.35)$$

Soluzione. Deve essere $\sin(x^2 + y^2) \geq 0$, cioè:

$$2n\pi \leq x^2 + y^2 \leq \pi(1 + 2n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi la funzione è definita in:

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n,$$

dove:

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2n\pi \leq x^2 + y^2 \leq \pi(1 + 2n), \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Esercizio 40 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (1.36)$$

Soluzione. Deve essere $x \geq 0, y \geq 0$, per cui la funzione è definita in

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, -\infty \leq y < +\infty\}$$

Esercizio 41 Assegnata la funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{\sqrt{y} - 2|x|} + \ln(2x - 1), \quad (1.37)$$

determinare il suo insieme di definizione $A \subseteq \mathbb{R}^2$, nonché il comportamento nei punti $O(0, 0)$ e $P_0(\frac{1}{2}, 1)$.

Soluzione. Deve essere:

$$\begin{cases} \sqrt{y} - 2|x| \geq 0 \\ 2x - y > 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione.

$$\sqrt{y} - 2|x| \geq 0 \iff \begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq 4x^2 \end{cases}$$

Cioè:

$$\sqrt{y} - 2|x| \geq 0 \iff (x, y) \in A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, 4x^2 \leq y < +\infty\}$$

Risolviamo la seconda disequazione.

$$2x - y > 0 \iff (x, y) \in A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < 2x\}$$

Insieme di definizione

Risulta:

$$A = A_1 \cap A_2$$

Per determinare l'intersezione tra i due campi A_1 e A_2 , troviamo le coordinate dei punti comuni alla retta $r: y = 2x$ e alla parabola $\gamma: 4x^2$, cioè le coppie (x, y) tali che:

$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 2x \end{cases},$$

da cui:

$$O(0, 0), P_0\left(\frac{1}{2}, 1\right) \in r \cap \gamma$$

A questo punto risulta facile determinare A :

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \frac{1}{2}, 4x^2 \leq y < 2x \right\},$$

che è riportato in fig. 1.10

Comportamento nei punti $O(0, 0)$, $P_0(\frac{1}{2}, 1)$.

Abbiamo i punti $O(0, 0)$, $P_0(\frac{1}{2}, 1) \notin A$, $O, P_0 \in \mathcal{D}(A)$. Risulta:

$$\lim_{P \rightarrow O} f(P) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} f(x, y) = 0^+ + \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2}^- \\ y \rightarrow 1^-}} f(x, y) = 0^+ + \ln 0^+ = -\infty$$

Ne concludiamo che O e P_0 sono punti di discontinuità di seconda specie (i.e. singolarità) per f .

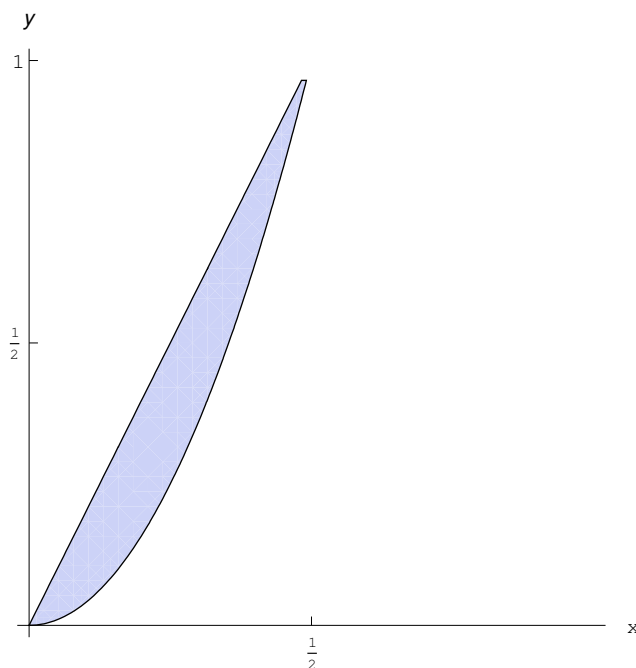


Figura 1.10: Insieme di definizione della funzione $f(x, y) = \sqrt{\sqrt{y} - 2|x|} + \ln(2x - 1)$. Il segmento appartenente alla retta $y = 2x$, di estremi $O(0, 0)$ e $P_0(\frac{1}{2}, 1)$ è escluso.

Esercizio 42 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{\sqrt{y} - 2|x|} + \sqrt{2x - 1}$$

Soluzione. Deve essere:

$$\begin{cases} \sqrt{y} - 2|x| \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases},$$

la cui soluzione porge:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 4x^2 \leq y < 2x \right\}$$

Come vedremo più avanti, l'insieme D è un dominio normale rispetto a entrambi gli assi coordinati.

Esercizio 43 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{|x^2 - y^2|}{\ln(x^2 + y^2)}} \quad (1.38)$$

Soluzione. Deve essere:

$$\frac{|x^2 - y^2|}{\ln(x^2 + y^2)} \geq 0 \iff \ln(x^2 + y^2) > 0 \iff x^2 + y^2 > 1,$$

onde:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$$

Esercizio 44 Detto A_α l'insieme di definizione della funzione:

$$f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}, \quad (1.39)$$

determinare il valore del parametro reale α che massimizza l'area di A_α .

Soluzione. Deve essere:

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ 1 - y^2 \geq 0 \\ \alpha - x - y \geq 0 \end{cases}$$

RisolviAMO la prima disequazione.

$$\begin{aligned} 4 - x^2 \geq 0 &\iff (x, y) \in X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, -\infty < y < +\infty\} \\ &= [-2, 2] \times (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

RisolviAMO la seconda disequazione.

$$\begin{aligned} 1 - y^2 \geq 0 &\iff (x, y) \in X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -1 \leq y \leq 1\} \\ &= (-\infty, +\infty) \times [-1, 1] \end{aligned}$$

RisolviAMO la terza disequazione.

$$\alpha - x - y \geq 0 \iff (x, y) \in X_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -\infty \leq y \leq -x + \alpha\}$$

L'insieme di definizione è:

$$A_\alpha = X_1 \cap X_2 \cap X_3$$

DistinguiAMO i vari casi:

$$1. \ 0 \leq \alpha \leq 1$$

L'insieme di definizione è illustrato in fig. 1.11.

Risulta:

$$A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, -\infty < x \leq -y + \alpha\}$$

Nelle figg. 1.12-1.13 sono riportati i casi speciali $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

$$2. \ 1 < \alpha \leq 2$$

L'insieme di definizione è illustrato in fig. 1.14. In fig. 1.15 è riportato il caso speciale $\alpha = 2$.

$$3. \ 2 < \alpha \leq 3$$

L'insieme di definizione è illustrato in fig. 1.16. In fig. 1.17 è riportato il caso speciale $\alpha = 3$. Risulta

$$A_{\alpha=3} = [-2, 2] \times [1, 1]$$

$$4. \ \alpha > 3$$

L'insieme di definizione è illustrato in fig. 1.18. Risulta:

$$A_{\alpha>3} = [-2, 2] \times [1, 1]$$

Indicando con $S(\alpha)$ l'area di A_α , si ha:

$$S(\alpha) = 8, \quad \forall \alpha \geq 3$$

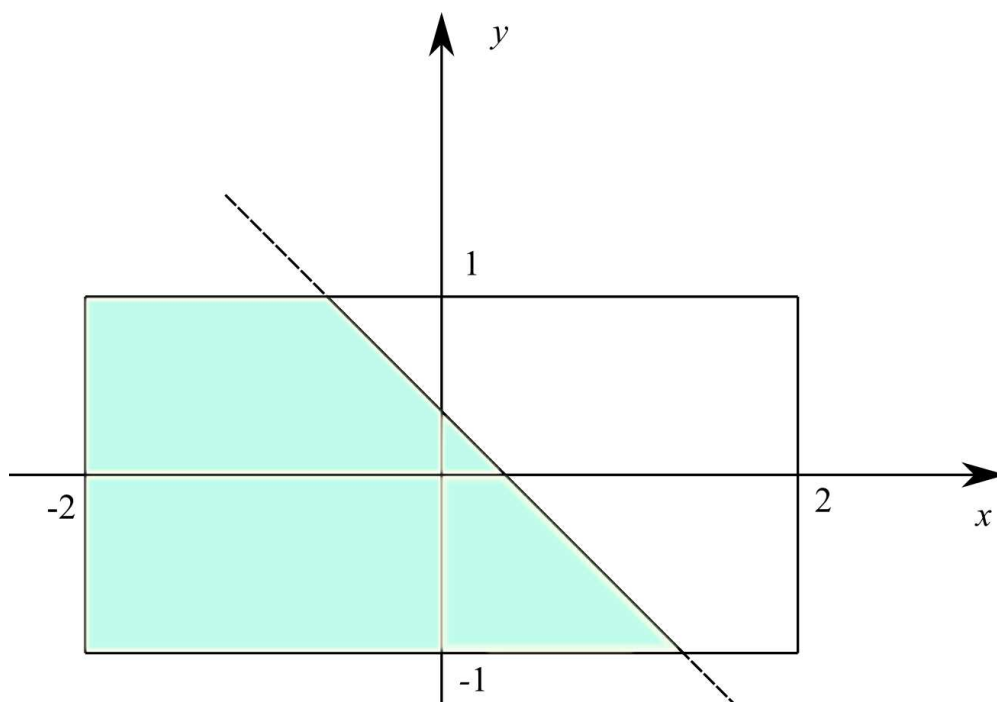


Figura 1.11: Insieme di definizione di $f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}$ per $0 \leq \alpha \leq 1$.

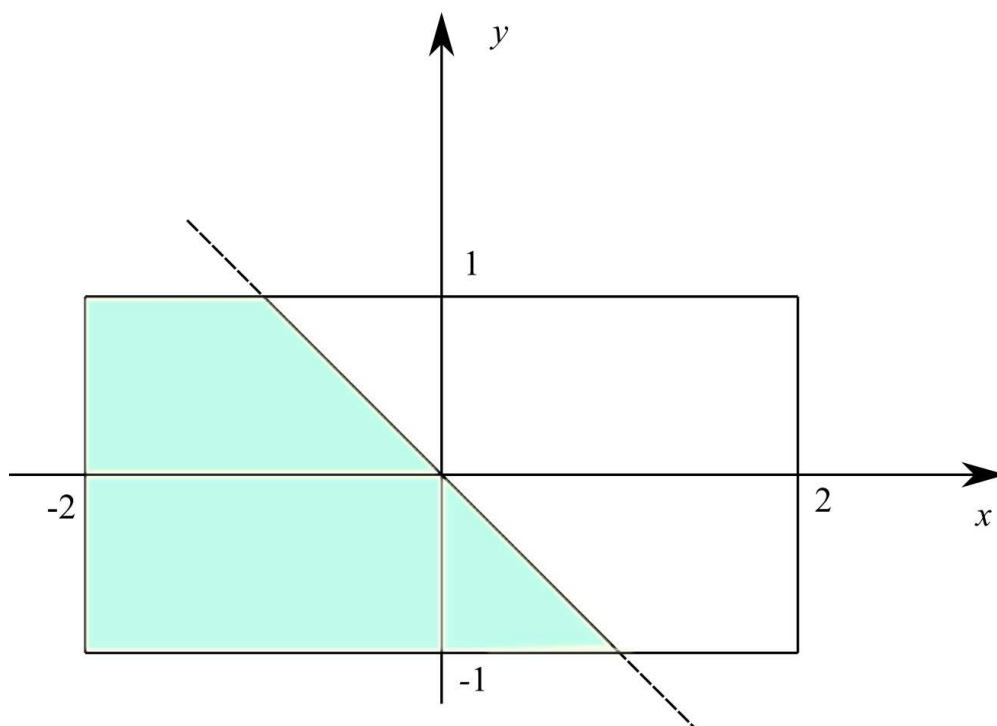


Figura 1.12: Insieme di definizione di $f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}$ per $\alpha = 0$.

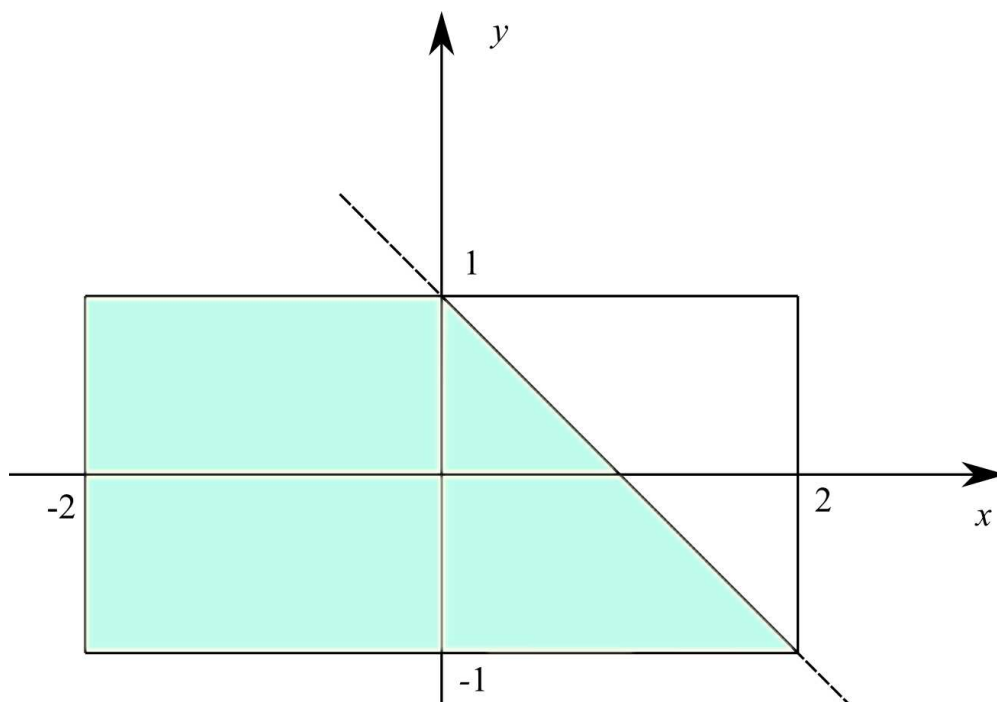


Figura 1.13: Insieme di definizione di $f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}$ per $\alpha = 1$.

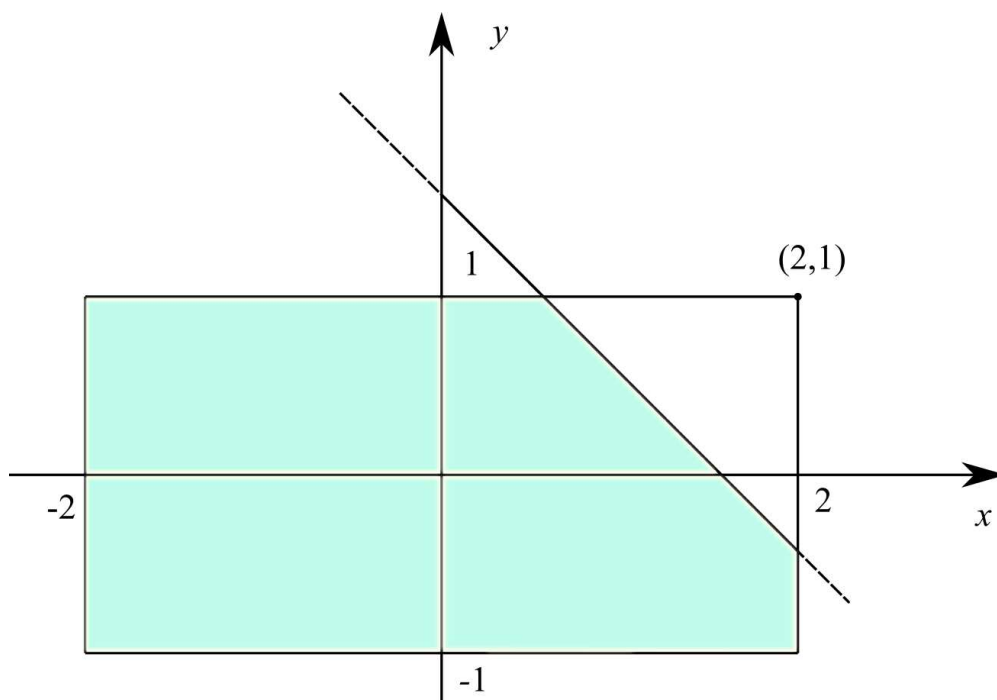


Figura 1.14: Insieme di definizione di $f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}$ per $1 < \alpha \leq 2$.

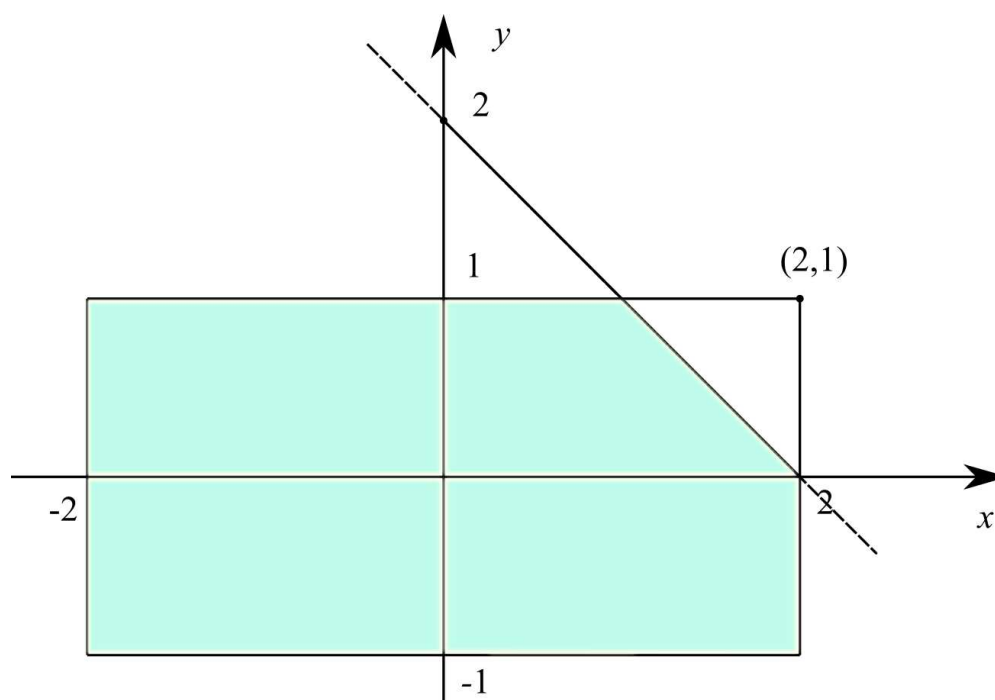


Figura 1.15: Insieme di definizione di $f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}$ per $\alpha = 2$.

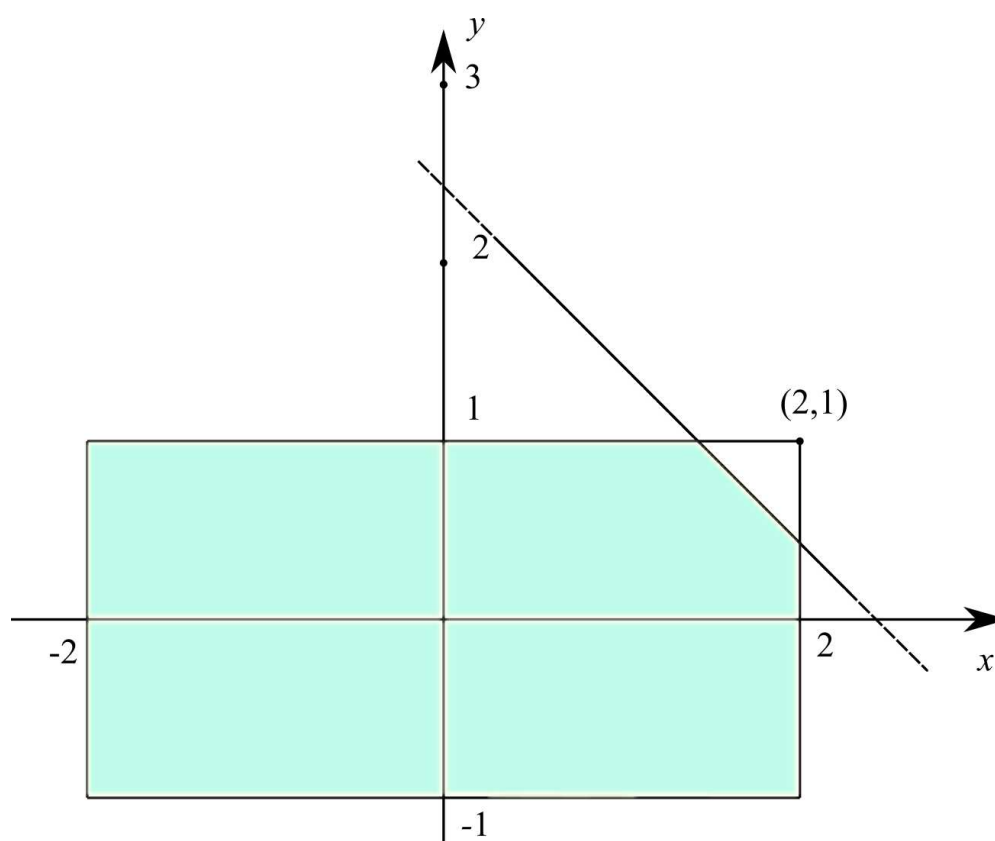


Figura 1.16: Insieme di definizione di $f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}$ per $2 < \alpha \leq 3$.

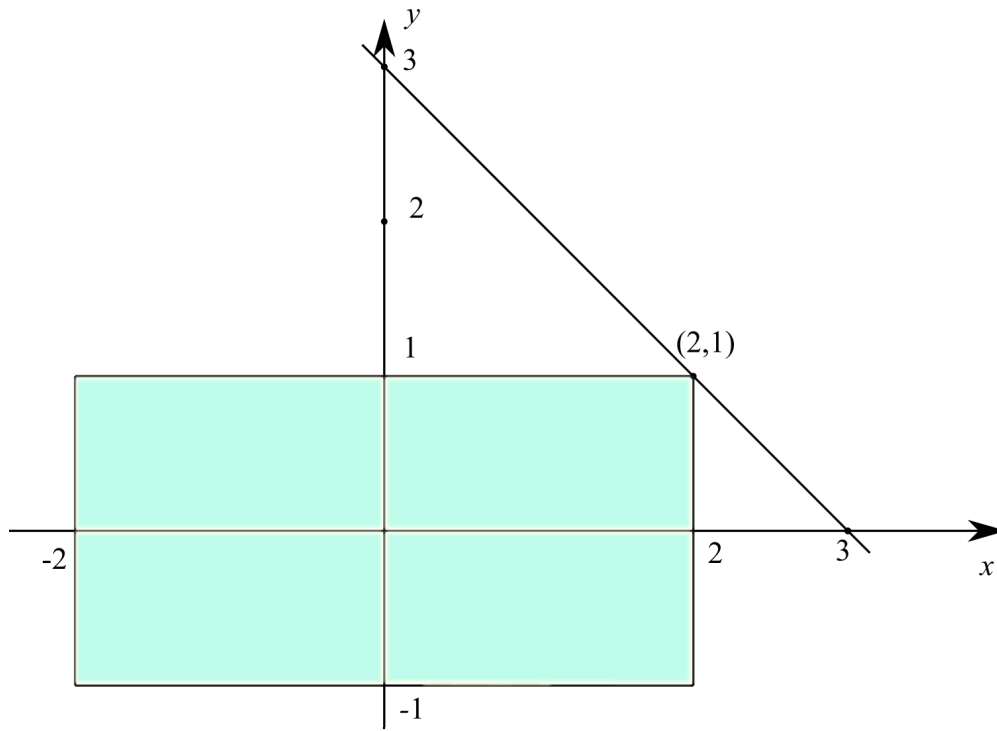


Figura 1.17: Insieme di definizione di $f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}$ per $\alpha = 3$.

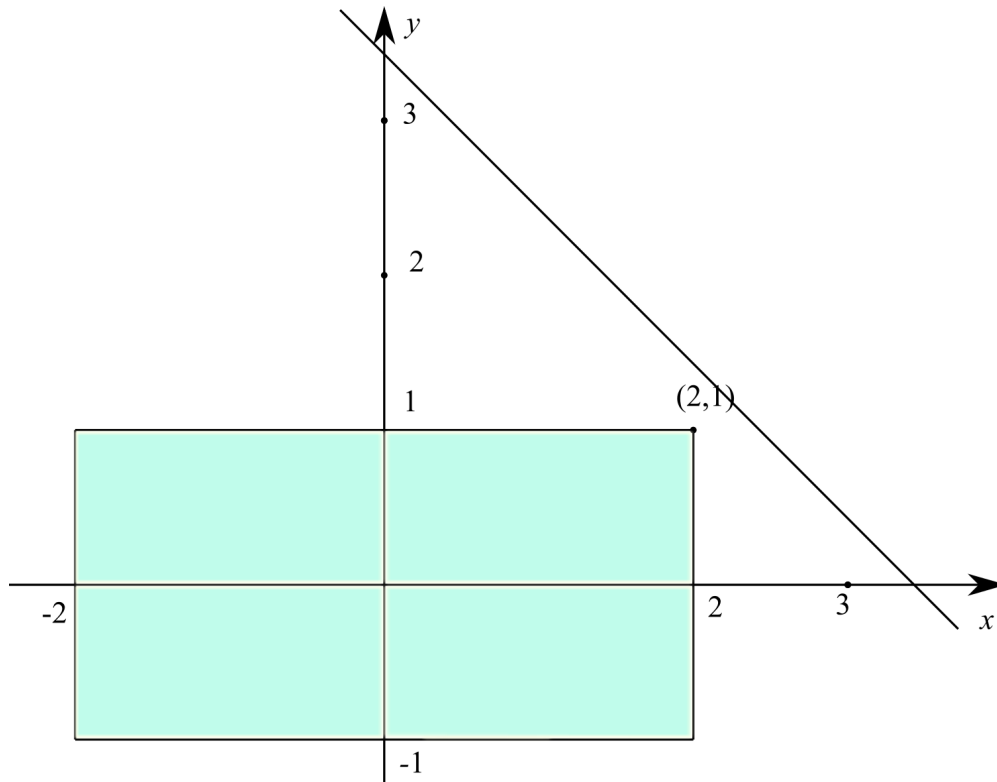


Figura 1.18: Insieme di definizione di $f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}$ per $\alpha > 3$.

5. $-1 < \alpha < 0$

L'insieme di definizione è illustrato in fig. 1.19.

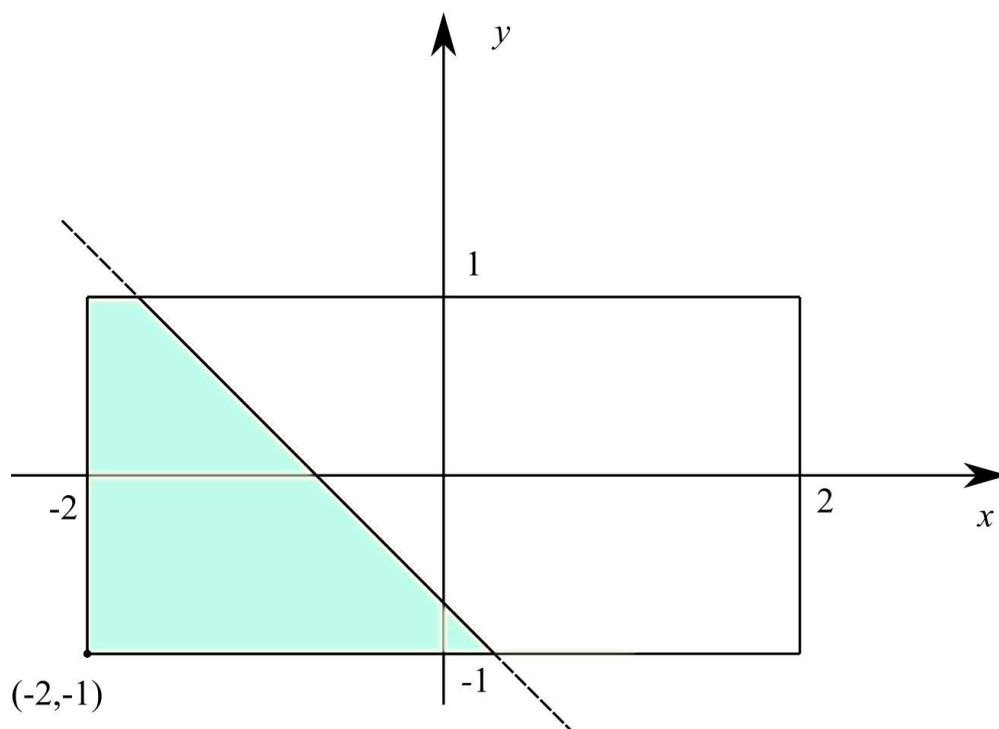


Figura 1.19: Insieme di definizione di $f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}$ per $-1 < \alpha < 0$.

6. $\alpha = -3$

L'insieme di definizione è illustrato in fig. 1.20. Risulta $A_{\alpha=-3} = \{(-2, -1)\} \implies S(-3) = 0$.

7. $\alpha < -3$

È manifestamente $A_{\alpha < -3} = \emptyset$, ovvero $S(\alpha) = 0, \forall \alpha \leq -3$.

Conclusione 45 Risulta:

$$\begin{aligned} A_\alpha \neq \emptyset &\iff \alpha \geq -3 \\ S(\alpha) \neq 0 &\iff \alpha > -3 \\ S(\alpha) = \max S(\alpha) = 8 &\iff \alpha > 3 \end{aligned}$$

Esercizio 46 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \arctan \frac{x - y}{1 + x^2 y^2}$$

Soluzione. Deve essere:

$$1 + x^2 y^2 \neq 0,$$

che è verificata per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, per cui:

$$A = \mathbb{R}^2$$

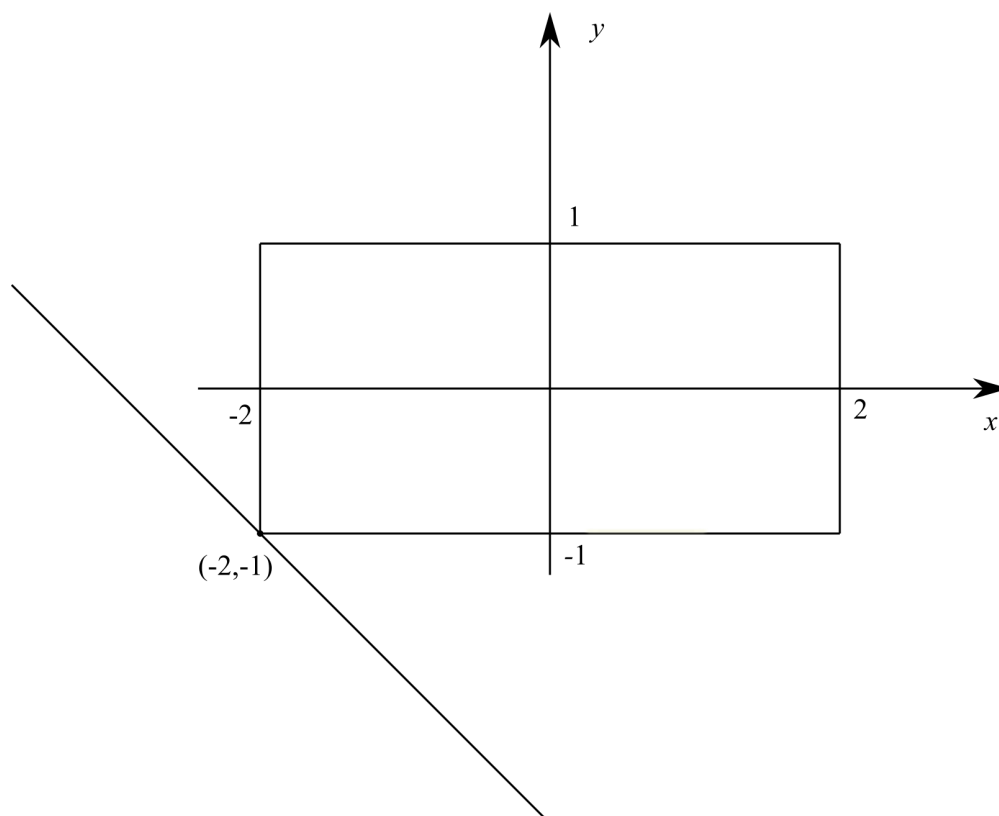


Figura 1.20: Insieme di definizione di $f_\alpha(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt[4]{\alpha - x - y}$ per $\alpha = -3$.

Esercizio 47 Sia

$$f(x, y) = \frac{1}{(x - y)^2} \quad (1.40)$$

tale funzione è definita in:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\} = \text{campo illimitato non connesso}$$

Insieme delle singolarità:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

Cioè la retta del piano xy di equazione $y = x$ (bisettrice del I e III quadrante).

$$\forall P_0 \in S, \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = +\infty$$

In fig 1.21. riportiamo il grafico per $x \in [-2, -10^{-1}]$, $y \in [10^{-1}, 3]$.

Esercizio 48

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$$

Tale funzione è definita in $X = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, essendo Γ la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Risulta:

$$\forall Q \in \Gamma, \lim_{P \rightarrow Q} f(P) = \infty$$

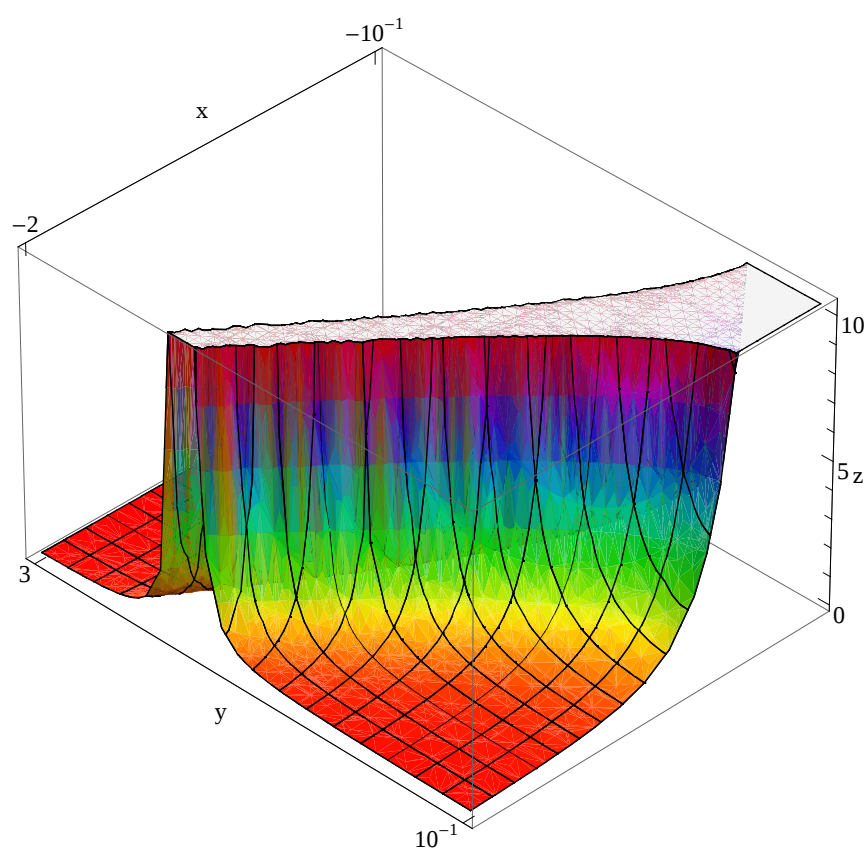


Figura 1.21: Grafico di $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$ per $(x, y) \in [-2, -10^{-1}] \times [10^{-1}, 3]$. La funzione diverge positivamente lungo la bisettrice del I e del III quadrante.

Passando a coordinate polari:

$$\lim_{P \rightarrow Q} f(P) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{1-r^2} = \begin{cases} +\infty, & r \rightarrow 1^- \\ -\infty, & r \rightarrow 1^+ \end{cases}$$

Si conclude che Γ è una **curva di singolarità** per f .

Esercizio 49 Dopo aver determinato l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \frac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1-y}},$$

calcolare il limite:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 1^-}} f(x, y)$$

Soluzione. Deve essere:

$$\sqrt{x} - \sqrt{1-y} \neq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-y \geq 0 \\ x \neq 1-y \end{cases}$$

onde:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, -\infty < y \leq 1, y \neq -x + 1\}$$

cioè il campo illimitato e non connesso $X = [0, +\infty) \times (-\infty, 1] \setminus S$, essendo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, y = -x + 1\}$.
Da ciò segue che $P_0(0, 1) \notin X$, $P_0 \in \mathcal{D}(X)$.

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 1^-}} \frac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1-y}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 1^-}} \left(\frac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1-y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-y}} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 1^-}} (\sqrt{x} + \sqrt{1-y}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quindi P_0 è una discontinuità eliminabile. Prolungando per continuità:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}, & \text{se } (x, y) \in X \setminus \{(0, 1)\} \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

Esercizio 50 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy} \tag{1.41}$$

Soluzione. Deve essere:

$$\begin{cases} \left| \frac{x}{2} \right| \leq 1 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è tale che:

$$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \iff -2 \leq x \leq 2$$

Quindi:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, xy \geq 0\}$$

Cioè:

$$X = ([-2, 0] \times (-\infty, 0]) \cup ((0, 2] \times [0, +\infty))$$

Esercizio 51 Determinare l'insieme di definizione e le curve di livello delle funzioni:

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{a - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - b} \right), \quad (1.42)$$

$$g(x, y) = \sqrt{6 - 2x - 3y} \quad (1.43)$$

essendo $a > b > 0$.

Soluzione. Per la funzione f Deve essere:

$$\frac{a - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - b} > 0$$

Abbiamo:

$$a - x^2 - y^2 > 0 \implies x^2 + y^2 - b > 0 \quad (1.44)$$

Posto $Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < a\}$, si ha che la (1.44) è verificata in:

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid b < x^2 + y^2 < a\}$$

Consideriamo ora:

$$a - x^2 - y^2 < 0 \implies x^2 + y^2 - b < 0, \quad (1.45)$$

il cui insieme di soluzioni è manifestamente l'insieme vuoto. Quindi l'insieme di definizione di f è:

$$X = X_1 \cup \emptyset = X_1$$

cioè la corona circolare di centro l'origine e raggi $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, circonferenze escluse. Le curve di livello sono:

$$\ln \left(\frac{a - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - b} \right) = c_1 \iff \frac{a - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - b} = e^{c_1} \stackrel{\text{def}}{=} c > 0$$

Quindi:

$$x^2 + y^2 = \frac{2a + bc}{c + 1}$$

Ne concludiamo che le curve di livello della funzione f sono circonferenze concentriche nell'origine e di raggio $\sqrt{\frac{2a+bc}{c+1}}$, al variare di c in $(0, +\infty)$, come mostrato in fig. 1.22.

Per la funzione $g(x, y)$ deve essere

$$6 - 2x - 3y > 0,$$

cioè:

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y \leq -\frac{2}{3}x + 2 \right\},$$

ovvero l'insieme dei punti sotteso dalla retta $2x + 3y - 6 = 0$. Le curve di livello sono:

$$2x + 3y + (c - 6) = 0, \quad \text{per } c \in [0, +\infty) \quad (1.46)$$

Ne concludiamo che l'insieme delle curve di livello della funzione g è il fascio improprio di rette di equazione (1.46).

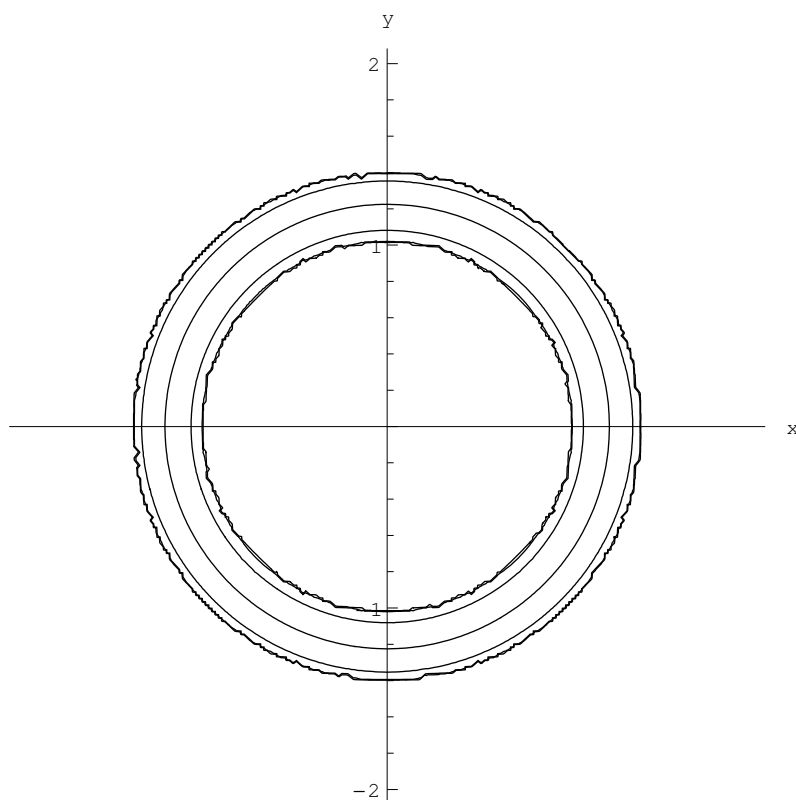


Figura 1.22: Curve di livello di $f(x, y) = \ln \left(\frac{a - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - b} \right)$ per $a = 2, b = 1$. Le curve “irregolari” corrispondono alle circonferenze di centro l’origine e raggi a e b , rispettivamente (su tali circonferenze la funzione non è definita).

Esercizio 52 Assegnata la funzione di due variabili:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}, \quad (1.47)$$

dimostrare i seguenti punti:

1. la funzione è pari;
2. la funzione è antisimmetrica rispetto alla permutazione delle variabili indipendenti;
3. la funzione è antisimmetrica rispetto alla sostituzione $(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

Soluzione

1. L'insieme di definizione della funzione è $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$, cioè il piano cartesiano privato degli assi coordinati.

$$\forall (x, y) \in X, \quad f(-x, -y) = \frac{x^2 - y^2}{xy} = f(x, y),$$

da cui la parità della funzione.

2.

$$\forall (x, y) \in X, \quad f(y, x) = \frac{y^2 - x^2}{2yx} = -f(x, y),$$

da cui l'antisimmetria rispetto alla permutazione delle variabili indipendenti.

Esercizio 53 Assegnata la funzione di due variabili:

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}, \quad (1.48)$$

determinare i valori assunti da f lungo la circonferenza del piano xy di centro l'origine e raggio R , discutendone l'andamento al variare di R .

Soluzione. L'espressione analitica della funzione può essere riscritta come:

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{1 - (x^2 + y^2)}$$

La funzione è definita in

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\},$$

cioè è definita in tutto il piano xy , ad esclusione della circonferenza di centro l'origine e raggio 1. La circonferenza Γ del piano xy di centro l'origine e raggio R ha equazione $x^2 + y^2 = R^2$, per cui:

$$\forall (x, y) \in \Gamma, \quad f(x, y) = \frac{R^4}{1 - R^2},$$

cioè la funzione assume un valore costante su Γ . Ora, se facciamo variare il raggio R , si ottiene la funzione:

$$f(R) = \frac{R^4}{1 - R^2},$$

che è definita per $R \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$. Notiamo che per $R \rightarrow 1$ la funzione diverge:

$$\lim_{R \rightarrow 1^+} f(R) = -\infty, \quad \lim_{R \rightarrow 1^-} f(R) = +\infty$$

Esercizio 54 Assegnata la funzione di due variabili:

$$f(x, y) = 1 + x - y, \quad (1.49)$$

studiare l'andamento di f lungo la parabola $y = x^2$

Soluzione. Per $y = x^2$ resta definita la funzione

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, x^2) = 1 + x - x^2$$

il cui grafico è una parabola che volge la concavità verso il basso, ed interseca l'asse x nei punti $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, come riportato in figura 1.23

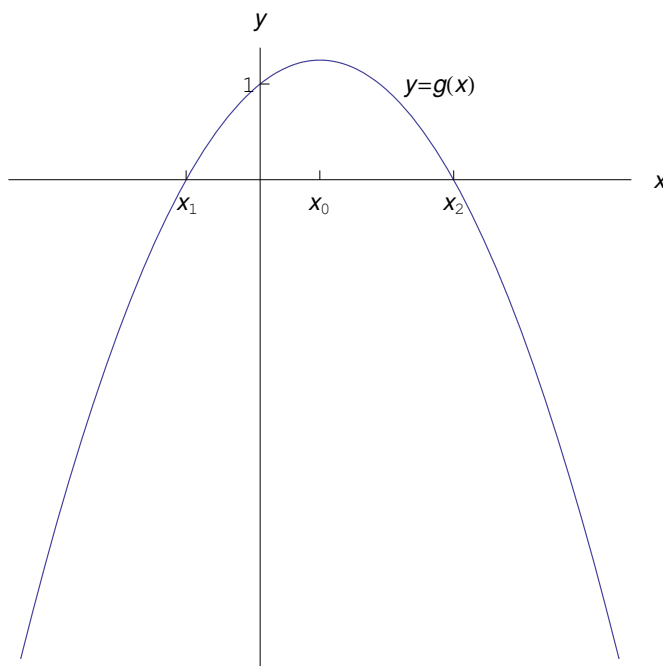


Figura 1.23: Grafico di $g(x) = f(x, x^2)$.

Esercizio 55 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \ln(y^2 - x^2 - 1) + \ln(4 - x^2 - y^2) \quad (1.50)$$

Soluzione. L'insieme di definizione è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni in due variabili:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 - 1 > 0 \\ 4 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \quad (1.51)$$

Risolviamo la prima delle (1.51). Abbiamo:

$$y^2 - x^2 - 1 > 0 \iff y > \sqrt{x^2 + 1}, \quad y < -\sqrt{x^2 + 1}$$

Detto X_1 l'insieme delle soluzioni della prima delle (1.51), si ha:

$$X_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -\sqrt{x^2 + 1} > y > \sqrt{x^2 + 1} \right\} \quad (1.52)$$

Risolviamo la seconda delle (1.51). Abbiamo:

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \iff x^2 + y^2 < 4$$

Detto X_2 l'insieme delle soluzioni della seconda delle (1.51), si ha:

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\} \quad (1.53)$$

L'insieme di definizione è dunque $X = X_1 \cap X_2$. Per esplicitare l'intersezione, determiniamo le coordinate dei punti:

$$P_1, P_2 \in \gamma_1 \cap \gamma_2,$$

dove $\gamma_1 : y = \sqrt{x^2 + 1}$, $\gamma_2 : x^2 + y^2 = 4$, e le coordinate dei punti:

$$P'_1, P'_2 \in \gamma'_1 \cap \gamma_2,$$

dove $\gamma'_1 : y = -\sqrt{x^2 + 1}$. Per la prima coppia di punti risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x^2 + 1} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases},$$

cioè:

$$2x^2 - 3 = 0,$$

onde:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y_1 = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Quindi $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$. Per la seconda coppia di punti, procediamo per simmetria ottenendo $P'_1(x_1, -y_1), P'_2(x_2, -y_2)$. Tracciando le curve (fig. 1.24), vediamo che $X = A_1 \cup A_2$, dove:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{x^2 + 1} < y < \sqrt{4 - x^2} \right\} \\ A_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{4 - x^2} < y < -\sqrt{x^2 + 1} \right\} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Esercizio 56 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad (1.55)$$

Soluzione. L'insieme di definizione è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni in due variabili:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 - 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.56)$$

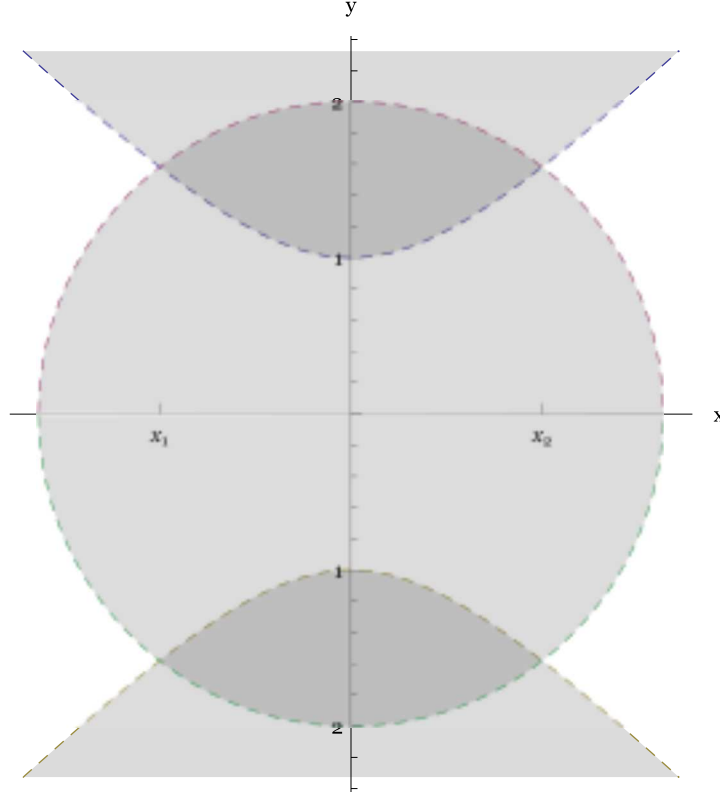


Figura 1.24: L'insieme di definizione della funzione (1.50) è la zona ombreggiata. Si tratta dell'unione dei due campi connessi espressi dalle (1.54).

Confrontando con l'esercizio precedente, vediamo che l'insieme di definizione è la chiusura del campo $X = A_1 \cup A_2$, dove A_1 e A_2 sono i campi connessi dati dalle (1.54). Quindi $D = D_1 \cup D_2$, essendo:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{x^2 + 1} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\} \\ D_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq -\sqrt{x^2 + 1} \right\} \end{aligned} \quad (1.57)$$

D_1 e D_2 sono domini internamente connessi.

Esercizio 57 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{x^3 - y}{4 - x^2 - y^2} \right) \quad (1.58)$$

Soluzione. L'insieme di definizione è l'insieme delle soluzioni della disequazione in due variabili:

$$\frac{x^3 - y}{4 - x^2 - y^2} > 0$$

Abbiamo:

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \implies x^3 - y > 0$$

Poniamo per definizione:

$$\begin{aligned} X_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid 4 - x^2 - y^2 > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4\} \end{aligned}$$

Imponiamo:

$$\forall (x, y) \in X_1, \quad x^3 - y > 0$$

Poniamo:

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < x^3\}$$

cioè la regione sottesa dalla parabola cubica $y = x^3$ (curva esclusa). Determiniamo $A_1 = X_1 \cap X_2$. A tale scopo calcoliamo le coordinate dei punti di intersezione delle curve $\gamma_1 : y = x^3$, $\gamma_2 : x^2 + y^2 = 4$. Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Cioè:

$$x^6 + x^2 - 4 = 0$$

Tale equazione può essere risolta solo per via numerica, ottenendo:

$$x_1 \simeq 1.174, \quad x_2 = -x_1$$

da cui le coordinate dei punti di intersezione: $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in \gamma_1 \cap \gamma_2$, dove $y_1 = x_1^3$, $y_2 = x_2^3$. Graficando i campi X_1 e X_2 , vediamo che la loro intersezione $A_1 \stackrel{\text{def}}{=} X_1 \cap X_2$ è data da $A'_1 \cup A'_2$, dove:

$$\begin{aligned} A'_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 < x < x_1, -\sqrt{4 - x^2} < y < x^3\} \\ A'_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < x < 2, -\sqrt{4 - x^2} < y < \sqrt{4 - x^2}\} \end{aligned}$$

Dobbiamo ora considerare il caso $4 - x^2 - y^2 < 0$:

$$4 - x^2 - y^2 < 0 \implies x^3 - y < 0$$

Perciò poniamo:

$$Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 4\}$$

Deve essere:

$$\forall (x, y) \in Y_1, \quad (x, y) \in x^3 - y < 0,$$

essendo:

$$Y_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\infty < x < +\infty, x^3 < y < +\infty\}$$

cioè la regione al di sopra dalla parabola cubica $y = x^3$ (curva esclusa). Poniamo $A_2 = Y_1 \cap Y_2$. Graficando i campi Y_1 e Y_2 , vediamo che:

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 4, y > x^3\}$$

L'insieme di definizione è $A = A_1 \cup A_2$ ed è riportato in fig. 1.25.

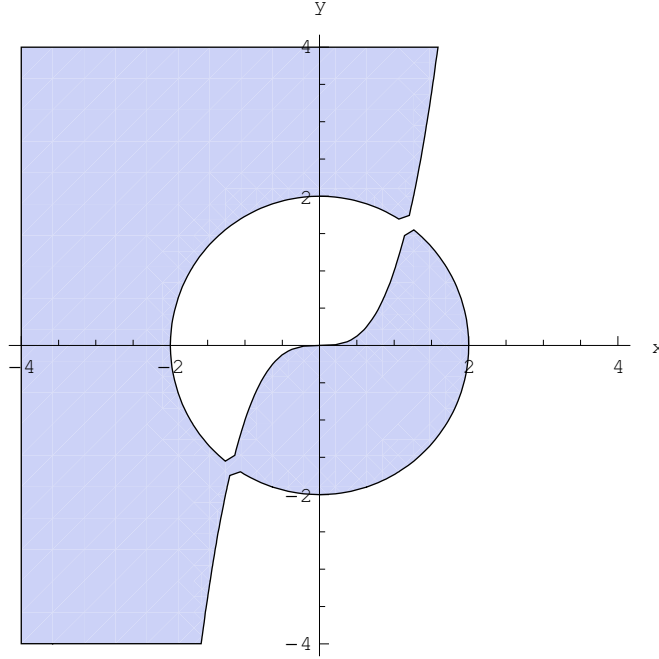


Figura 1.25: L'insieme di definizione della funzione (1.58). Si badi che il campo è illimitato. In figura appare limitato, in quanto per tracciarlo con il programma di calcolo **Mathematica**, abbiamo fissato gli intervalli $[-4, 4]$ sui rispettivi assi coordinati. Inoltre, è esclusa la parabola semicubica $y = x^3$.

Esercizio 58 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{256 - x^2 - y^2} + \sqrt{y - x^4 + 8x^2 - 16} \quad (1.59)$$

Soluzione. L'insieme di definizione è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni in due variabili:

$$\begin{cases} 256 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ y - x^4 + 8x^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

Iniziamo a risolvere la prima. Deve essere $x^2 + y^2 < 256$, cioè:

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 256\}$$

Passiamo alla seconda.

$$y \geq (x^2 - 4)^2$$

Cioè:

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\infty < x < +\infty, (x^2 - 4)^2 \leq y < +\infty\}$$

L'insieme di definizione è $X = X_1 \cap X_2$. Determiniamo prima i punti di intersezione delle curve $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 256$, $\gamma_2 : y = (x^2 - 4)^2$. A tale scopo risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 256 \\ y = (x^2 - 4)^2 \end{cases}$$

Abbiamo:

$$x^2 (x^6 - 16x^4 + 96x^2 - 255) = 0$$

Cioè:

$$x^2 = 0, \quad x^6 - 16x^4 + 96x^2 - 255 = 0$$

La prima porge la radice doppia $x = 0$, mentre la seconda si risolve numericamente, ottenendo le radici semplici: $x_1 \simeq -2.823$, $x_2 = -x_1$. Quindi i punti comuni alle due curve sono:

$$P_0(0, 16), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$$

dove $y_1 = (x_1^2 - 4)^2$, $y_2 = (x_2^2 - 4)^2$. Da un'analisi grafica si deduce che l'insieme di definizione è:

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < x < x_2, (x^2 - 4)^2 \leq y \leq \sqrt{256 - x^2} \right\},$$

come illustrato in fig. 1.26.

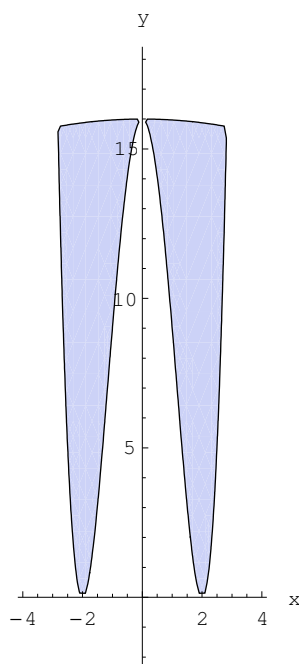


Figura 1.26: L'insieme di definizione della funzione (1.59) è la regione compresa tra le curve $y = (x^2 - 4)^2$ e $y = \sqrt{256 - x^2}$.

Esercizio 59 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + 4 + y} + \ln(x^2 + 4y^2 - 4) \quad (1.61)$$

Soluzione. L'insieme di definizione è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni in due variabili:

$$\begin{cases} -x^2 + 4 + y \geq 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 > 0 \end{cases} \quad (1.62)$$

Risolvi la prima disequazione. Deve essere $y \geq x^2 - 4$, per cui l'insieme delle soluzioni è:

$$X_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\infty < x < +\infty, x^2 - 4 < y < +\infty \right\},$$

cioè i punti al di sopra della parabola $y = x^2 - 4$.

Risolvi la seconda disequazione. Deve essere $x^2 + 4y^2 > 4$, per cui l'insieme delle soluzioni è

$$X_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 > 1 \right\},$$

cioè i punti esterni all'ellisse di semiassi $a = 2$, $b = 1$. L'insieme di definizione è $X = X_1 \cap X_2$. Per determinare l'intersezione degli insiemi X_1 e X_2 , ricerchiamo le coordinate dei punti di intersezione delle curve $\gamma_1 : y = x^2 - 4$, $\gamma_2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Risolviamo dunque il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

Abbiamo:

$$4x^4 - 31x^2 + 60 = 0$$

da cui:

$$x^2 = 4, \frac{15}{4}$$

cioè:

$$x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = -\frac{\sqrt{15}}{4}, x_4 = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Abbiamo quindi i punti di intersezione: $P_1(-2, 0)$, $P_2(2, 0)$, $P_3\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $P_4\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{4}\right)$. A questo punto è facile rendersi conto che l'insieme di definizione è $X = A_1 \cup A_2$, dove:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 < x < +2, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} < y < +\infty \right\} \\ A_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\frac{\sqrt{15}}{2} < x < +\frac{\sqrt{15}}{2}, x^2 - 4 < y < -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right\}, \end{aligned}$$

come illustrato in fig. 1.27.

Esercizio 60 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)} + \sqrt{y^2 - y - 2} \quad (1.63)$$

Soluzione. L'insieme di definizione è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni in due variabili:

$$\begin{cases} 9 - (x^2 + y^2) \geq 0 \\ y^2 - y - 2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

Risolvi la prima disequazione. Deve essere $x^2 + y^2 \leq 9$, per cui l'insieme delle soluzioni è:

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Risolvi la seconda disequazione. Le radici dell'equazione $y^2 - y - 2 = 0$ sono $y = -1, 2$, per cui l'insieme delle soluzioni è:

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\infty < x < +\infty, -1 \geq y \geq 2\},$$

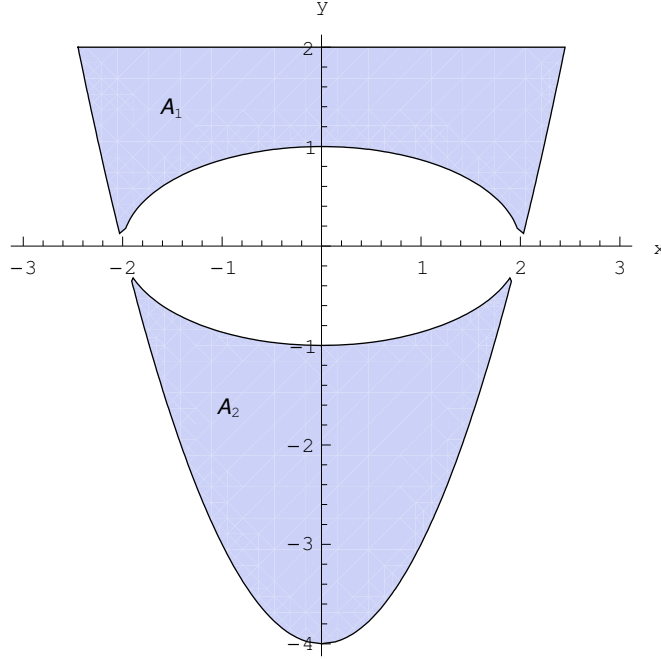


Figura 1.27: Insieme di definizione della funzione 1.61 . La porzione di ellisse è esclusa. Si badi che il campo non illimitato dalla retta orizzontale $y = 2$. In figura appare limitato da tale retta, in quanto per tracciarlo con il programma di calcolo **Mathematica**, abbiamo fissato l'intervallo $[-4, 2]$ sull'asse y .

L'insieme di definizione è $X = X_1 \cap X_2$. Per determinare l'intersezione degli insiemi X_1 e X_2 , ricerchiamo le coordinate dei punti di intersezione di $\gamma : x^2 + y^2 = 9$ con le rette $r_1 : y = 2$, $r_2 : y = -1$. Risolviamo dunque i sistemi:

$$S_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 2 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = -1 \end{cases}$$

Le soluzioni di S_1 sono $(x, y) = (-\sqrt{5}, 2)$, $(x, y) = (\sqrt{5}, 2)$, onde abbiamo i punti di intersezione $P_1(-\sqrt{5}, 2)$, $P_2(\sqrt{5}, 2) \in \gamma \cap r_1$. Le soluzioni di S_2 sono $(x, y) = (-2\sqrt{2}, -1)$, $(x, y) = (2\sqrt{2}, -1)$, onde abbiamo i punti di intersezione $Q_1(-2\sqrt{2}, -1)$, $Q_2(2\sqrt{2}, -1) \in \gamma \cap r_2$. L'insieme di definizione è $X = D_1 \cup D_2$, dove:

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}, -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq -1 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}, 2 \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \right\}$$

Gli insiemi D_1 e D_2 sono domini internamente connessi. L'insieme di definizione è illustrato in fig. 1.28.

Esercizio 61 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3 - y} + \sqrt{y - x^2 + 9} \quad (1.65)$$

Soluzione. L'insieme di definizione è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni in due variabili:

$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 - y \geq 0 \\ y - x^2 + 9 \geq 0 \end{cases} \quad (1.66)$$

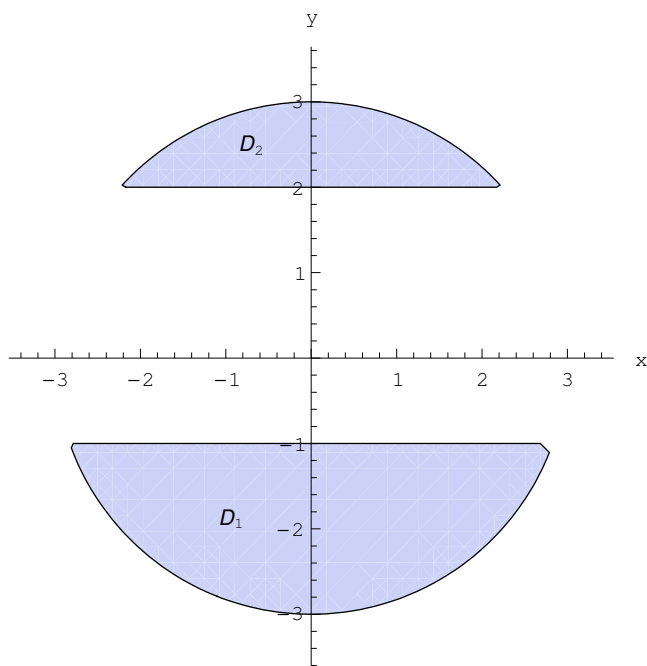


Figura 1.28: L'insieme di definizione della funzione 1.63 è l'unione dei due domini ombreggiati.

Risolvi la prima disequazione. Deve essere $y \leq -x^2 + 4x - 3$, che definisce la regione dei punti sottesa dalla parabola $\gamma_1 : y = -x^2 + 4x - 3$. Quest'ultima volge la concavità verso il basso e interseca l'asse x in $x = 1, 3$. Quindi l'insieme delle soluzioni è:

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y \leq -x^2 + 4x - 3\}$$

Risolvi la seconda disequazione. Deve essere $y \geq x^2 - 9$, che definisce la regione al di sopra della parabola $\gamma_2 : y = x^2 - 9$. Quest'ultima volge la concavità verso l'alto e interseca l'asse x nei punti $x = \pm 3$. L'insieme delle soluzioni è:

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\infty < x < +\infty, x^2 - 9 \leq y < +\infty\},$$

L'insieme di definizione è $X_1 \cap X_2$. Per determinare l'intersezione degli insiemi X_1 e X_2 , ricerchiamo le coordinate dei punti di intersezione di γ_1 e γ_2 . Risolviamo dunque il sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro:

$$0 = -2x^2 + 4x + 6,$$

cioè:

$$x = -1, x = 3$$

Le soluzioni sono dunque $(x, y) = (-1, -8)$, $(x, y) = (3, 0)$, onde abbiamo i punti di intersezione $P_1(-1, -8)$, $P_2(3, 0) \in \gamma_1 \cap \gamma_2$. L'insieme di definizione è il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 3, x^2 - 9 \leq y \leq -x^2 + 4x - 3\}$$

L'insieme di definizione è illustrato in fig. 1.29.

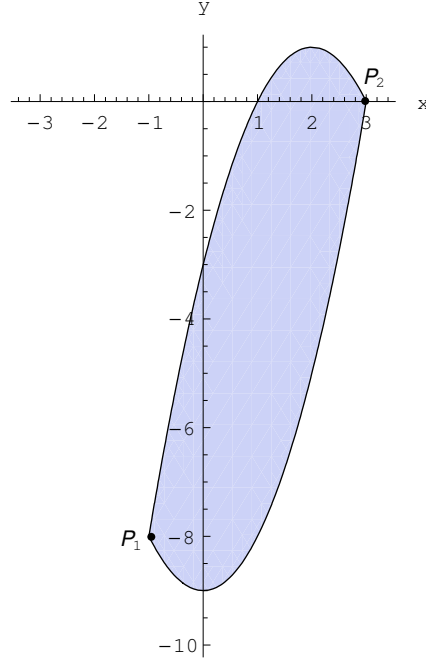


Figura 1.29: Insieme di definizione della funzione 1.65.

Esercizio 62 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = (x^3 - y - 1)^{\sqrt{x-1}} + \ln(36 - 4x^2 - 9y^2) \quad (1.67)$$

Soluzione. L'insieme di definizione è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni in due variabili:

$$\begin{cases} x^3 - y - 1 > 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 36 - 4x^2 - 9y^2 > 0 \end{cases} \quad (1.68)$$

Risolviamo la prima disequazione. Deve essere $y < x^3 - 1$, che definisce la regione sottesa dalla parabola cubica $\gamma_1 : y = x^3 - 1$. L'insieme delle soluzioni è:

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < x^3 - 1\}$$

Risolviamo la seconda disequazione. Deve essere $x - 1 \geq 0$, che definisce la regione:

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x < +\infty, -\infty < y < +\infty\},$$

Risolviamo la terza disequazione. Deve essere $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$, che definisce la regione interna all'ellisse di semiassi 3 e 2. Quindi:

$$X_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1 \right\},$$

L'insieme di definizione è $X_1 \cap X_2 \cap X_3$. Per determinare l'intersezione degli insiemi X_1 e X_2 e X_3 , ricerchiamo le coordinate dei punti $P \in \gamma_1 \cap r \cap \gamma_2$, dove: $\gamma_1 : y = x^3 - 1$, $r : x - 1 = 0$, $\gamma_2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Più precisamente, ci interessa il punto $P_1 \in \gamma_1 \cap \gamma_2$, come illustrato in fig. 1.30. Risolviamo dunque il sistema:

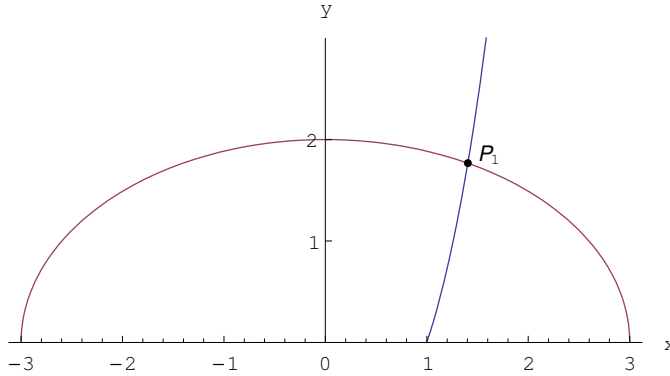


Figura 1.30: Intersezione dell'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ con la parabola cubica $y = x^3 - 1$.

$$\begin{cases} 36 - 4x^2 - 9y^2 = 0 \\ x^3 - y - 1 = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$9x^6 - 18x^3 + 4x^2 - 27 = 0,$$

che non può essere risolta per via algebrica. Risolvendo numericamente, vediamo che la soluzione che ci interessa è $x_1 \simeq 1.404$. In definitiva vediamo che l'insieme di definizione è:

$$X = A_1 \cup A_2,$$

dove:

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x \leq x_1, -2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} < y < x^3 - 1 \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < x \leq 3, -2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} < y < 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \right\}$$

L'insieme di definizione è illustrato in fig. 1.31.

Esercizio 63 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) + \sqrt{x^2 - y} \quad (1.69)$$

Soluzione. L'insieme di definizione è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni in due variabili:

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 > 0 \\ x^2 - y \geq 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

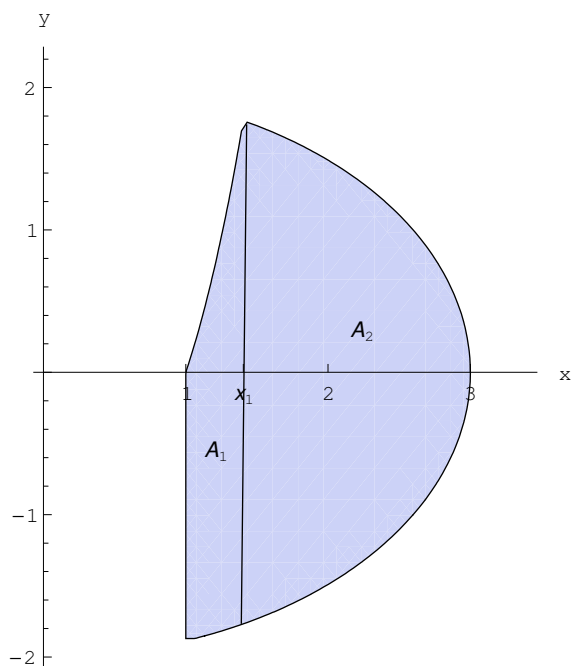


Figura 1.31: Insieme di definizione della funzione 1.67. Gli archi di ellisse e di parabola sono esclusi.

Risolviamo la prima disequazione. Deve essere $1 - x^2 - y^2 > 0$, che definisce la regione:

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

Risolviamo la seconda disequazione. Deve essere $y - x^2 \leq 0$, che definisce la regione sottesa dalla parabola $y = x^2$. Quindi:

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -\infty \leq y < x^2\},$$

L'insieme di definizione è $X_1 \cap X_2$. Per determinare l'intersezione degli insiemi X_1 e X_2 , ricerchiamo le coordinate dei punti $P \in \gamma_1 \cap \gamma_2$, dove: $\gamma_1 : y = x^2$, $\gamma_2 : x^2 + y^2 = 1$. Risolviamo dunque il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

da cui:

$$x^4 + x^2 - 1 = 0,$$

le cui soluzioni reali sono:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \quad x_2 = -x_1$$

Quindi abbiamo i punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2) \in \gamma_1 \cap \gamma_2$, dove $y_1 = y_2 = x_1^2$. Risulta

$$X = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

dove:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad -\sqrt{1-y^2} < x \leq -\sqrt{y} \right\} \\ A_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x \leq 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0 \right\} \\ A_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \sqrt{y} < x \leq \sqrt{1-y^2} \right\} \end{aligned}$$

L'insieme di definizione è illustrato in fig. 1.32.

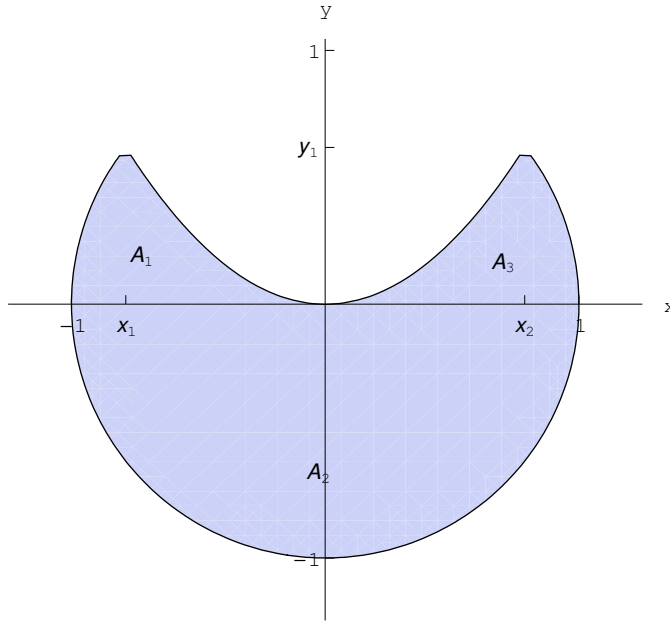


Figura 1.32: Insieme di definizione della funzione 1.69. Gli archi di circonferenza sono esclusi.

Esercizio 64

$$f(x, y) = \cos \frac{1}{xy}$$

Posto $\xi = xy$:

$$f(\xi) = \cos \frac{1}{\xi}$$

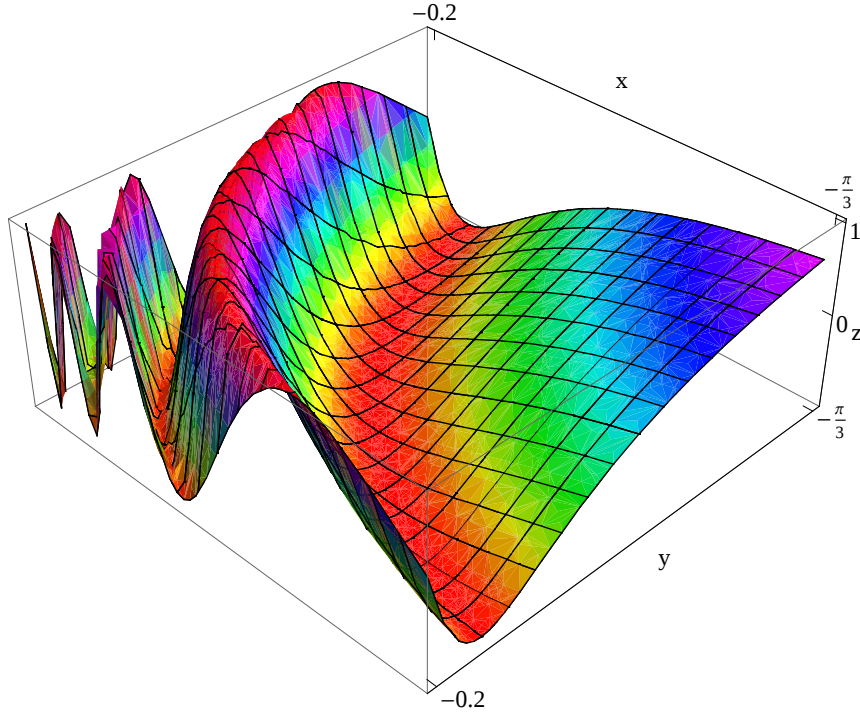
segue

$$\nexists \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) \implies \nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$$

Inoltre:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$$

Cioè X è il campo illimitato costituito da $\mathbb{R}^2$ privato degli assi coordinati. Quest'ultimi sono luoghi di singolarità per f , il cui grafico è mostrato in fig. 1.33.


 Figura 1.33: Grafico di $f(x, y) = \cos \frac{1}{xy}$

Esercizio 65 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y-1}{x+1}\right) \quad (1.71)$$

Soluzione. Deve essere:

$$\left|\frac{y-1}{x+1}\right| \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{y-1}{x+1} \leq 1 \\ \frac{y-1}{x+1} \geq -1 \end{cases} \quad (1.72)$$

Denotiamo con A_1 l'insieme delle soluzioni della prima delle (1.72) e con A_2 l'insieme delle soluzioni della seconda delle (1.72).

Calcolo A_1 .

$$\frac{y-1}{x+1} \leq 1 \iff \frac{x-y+2}{x+1} \geq 0$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} x+1 > 0 &\implies x-y+2 \geq 0 \implies y \leq x+2 \\ x+1 < 0 &\implies x-y+2 \leq 0 \implies y \geq x+2 \end{aligned}$$

Cioè:

$$A_1 = S_1 \cup S_2, \quad (1.73)$$

dove:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < +\infty, -\infty < y \leq x+2\} \\ S_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < -1, x+2 < y \leq +\infty\} \end{aligned}$$

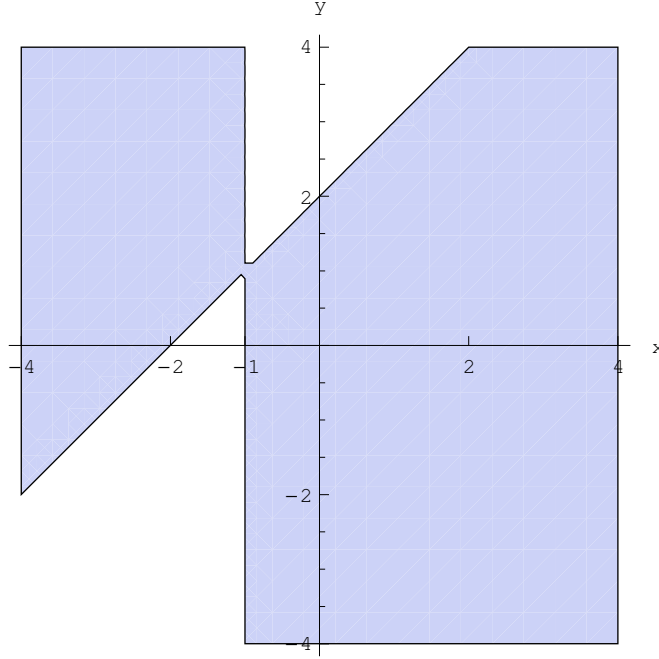


Figura 1.34: Rappresentazione grafica dell'insieme (1.73). La retta $x - 1 = 0$ è esclusa.

In fig. 1.34 riportiamo l'insieme A_1 .

Calcolo A_2 .

$$\frac{y-1}{x+1} \geq -1 \iff \frac{x+y}{x+1} \geq 0$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} x+1 > 0 &\implies y+x \geq 0 \implies y \geq -x \\ x+1 < 0 &\implies y+x \leq 0 \implies y \leq -x \end{aligned}$$

Cioè:

$$A_2 = S'_1 \cup S'_2, \quad (1.74)$$

dove:

$$\begin{aligned} S'_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < +\infty, -x < y \leq +\infty\} \\ S'_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < -1, -\infty < y \leq -x\} \end{aligned}$$

In fig. 1.35 riportiamo l'insieme A_1 .

Finalmente:

$$\begin{aligned} X &= A_1 \cap A_2 \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < -1, x+2 < y \leq -x\} \cup \\ &\quad \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < +\infty, -x < y \leq x+2\} \end{aligned}$$

Quindi X è la regione del piano tra le rette $y = -x$ e $y = x + 2$, escludendo il punto di intersezione $P_0(-1, 1)$, come illustrato in fig. 1.36. Studiamo il comportamento della funzione in un intorno di P_0 . A tale scopo cerchiamo di determinare (se esiste) il limite:

$$\lambda = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) = \frac{0}{0}$$

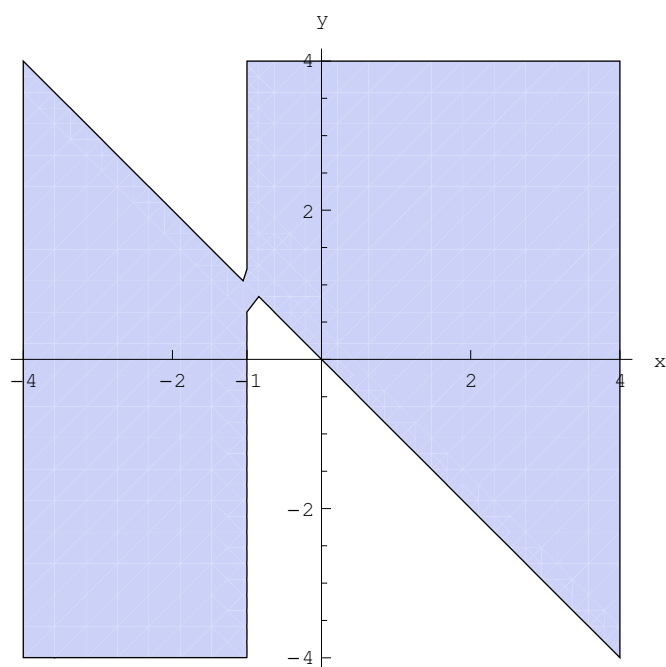


Figura 1.35: Rappresentazione grafica dell'insieme (1.74). La retta $x - 1 = 0$ è esclusa.

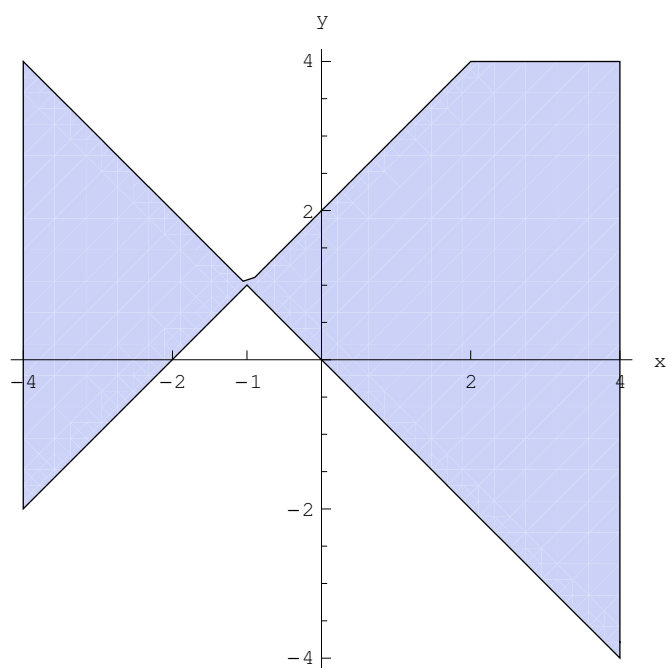


Figura 1.36: Insieme di definizione della funzione (1.71). Il punto $(-1, 1)$ non appartiene all'insieme.

Calcoliamo il limite “marciando” verso P_0 lungo due direzioni distinte. Precisamente, spostiamoci prima lungo la retta $y = -x$, cosicchè:

$$f(x, -x) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

Cioè la funzione è costante lungo la bisettrice $y = -x$. In tale direzione il limite è:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} f(x, -x) = -\frac{\pi}{2}$$

Marciamo ora lungo la direzione $y = x + 2$:

$$f(x, x + 2) = \frac{\pi}{2}$$

In tale direzione il limite è:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} f(x, x + 2) = \frac{\pi}{2}$$

Abbiamo così ottenuto due valori diversi. Ciò implica che $\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y)$ e quindi P_0 è una singolarità. Le curve di livello sono tali che:

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{y-1}{x+1}\right) &= c_1, \quad \text{con } c_1 \in (-\infty, +\infty) \\ \iff \frac{y-1}{x+1} &= \sin c_1 \stackrel{\text{def}}{=} c \\ \iff cx - y - (1+c) &= 0 \end{aligned}$$

Cioè il fascio di rette di centro la singolarità, come illustrato in fig. 1.37.

Esercizio 66 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = y^2 + \ln x^2 \tag{1.75}$$

Soluzione. Deve essere $x^2 > 0 \iff x \neq 0$, cosicchè:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, x \neq 0, -\infty < y < +\infty\}$$

Esercizio 67 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \sqrt{y - x^2 + 2x - 1} \tag{1.76}$$

Disegnare le curve di livello di f .

Soluzione. Deve essere:

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ y - x^2 + 2x - 1 \geq 0 \end{cases} ,$$

i cui insiemi di soluzioni sono:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\ X_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq (x - 1)^2\} \end{aligned}$$

Cerchiamo i punti appartenenti a $\partial X_1 \cap \partial X_2$. A tale scopo risolviamo il sistema di equazioni algebriche:

$$\begin{cases} y = (x - 1)^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

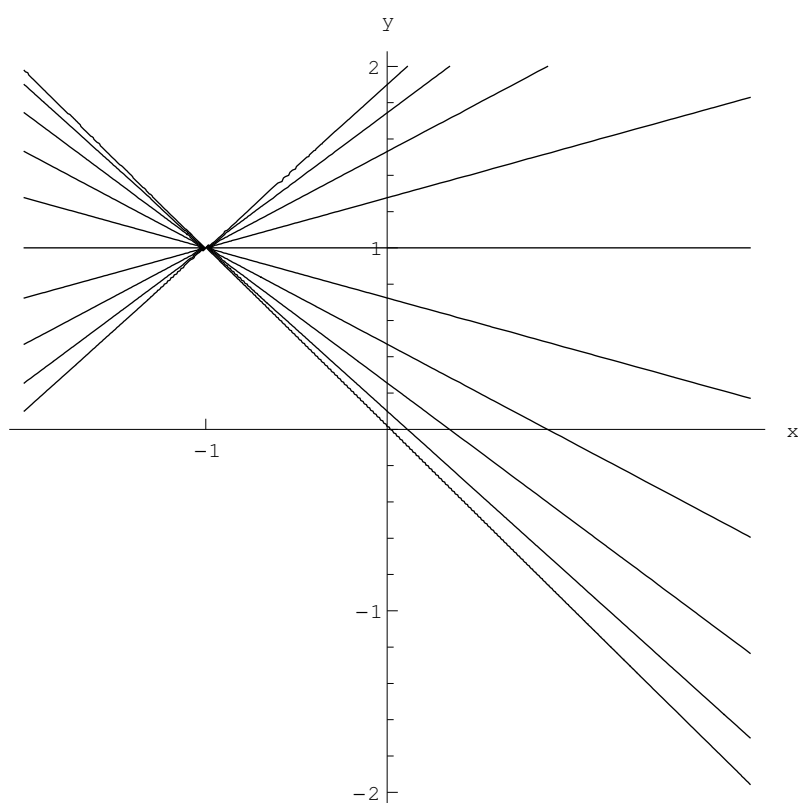


Figura 1.37: L'insieme delle curve di livello della funzione (1.71) è il fascio di rette centrato in $P_0(-1, 1)$.

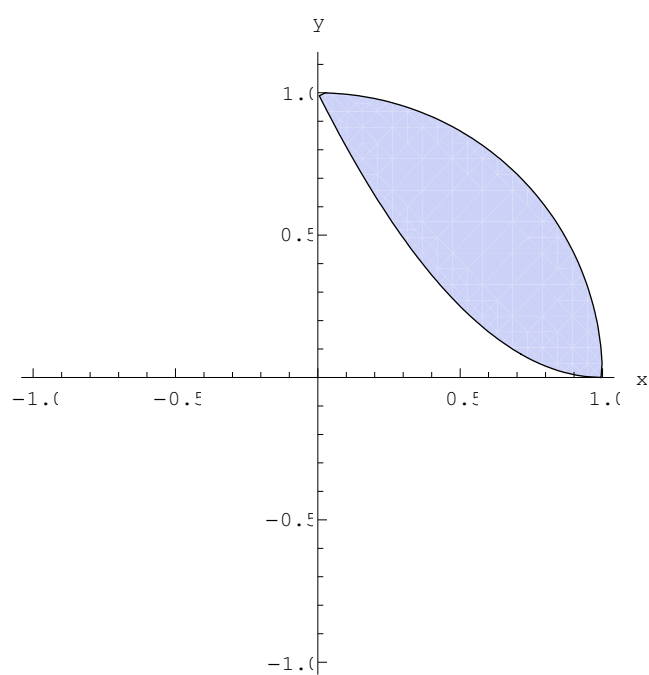


Figura 1.38: Insieme di definizione della funzione (1.76).

Le soluzioni reali sono $x = 0$ e $x = 1$. Quindi $(0, 1), (1, 0) \in \partial X_1 \cap \partial X_2$. Graficando otteniamo l'insieme di definizione di f , come illustrato in fig. 1.38: Cioè:

$$X = X_1 \cap X_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1, (x-1)^2 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

Le curve di livello hanno equazione:

$$\sqrt{1-x^2-y^2} + \sqrt{y-x^2+2x-1} = c, \quad \text{con } 0 \leq c < \infty$$

In fig. 1.39:

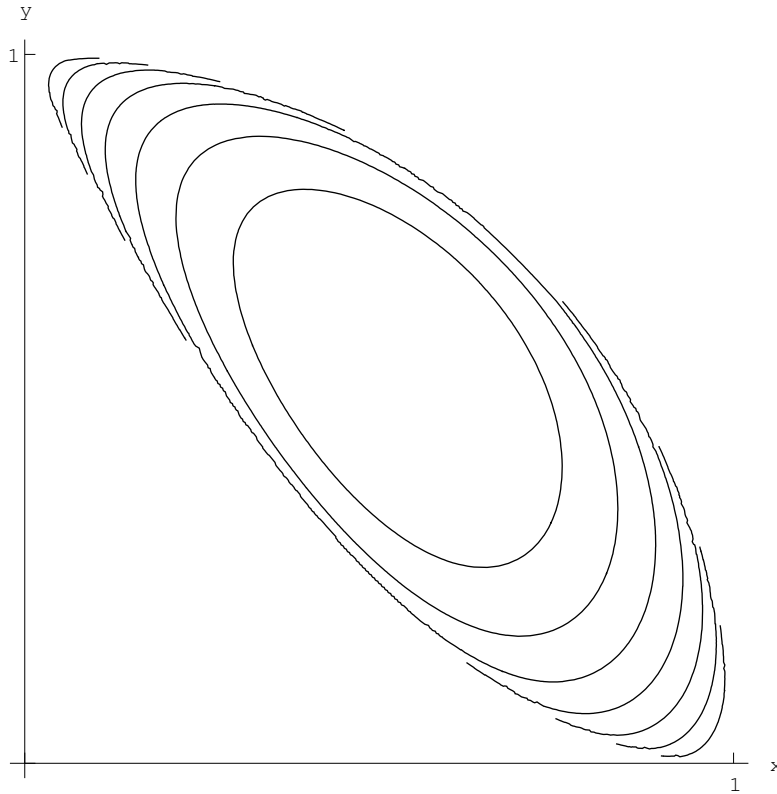


Figura 1.39: Curve di livello della funzione (1.76).

Esercizio 68 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)}$$

Soluzione. Deve essere:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2) &\geq 0 \\ \iff (x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 - 2a^2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$x^2 + y^2 - a^2 \geq 0 \implies x^2 + y^2 - 2a^2 \leq 0$$

Poniamo:

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - a^2 \geq 0\}$$

Esercizio 69

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad (1.77)$$

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Passando a coordinate polari:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r^2}{r^2} = 1^-,$$

donde $(0, 0)$ è una discontinuità eliminabile. Prolungando per continuità:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Il grafico è mostrato in fig. 1.40.

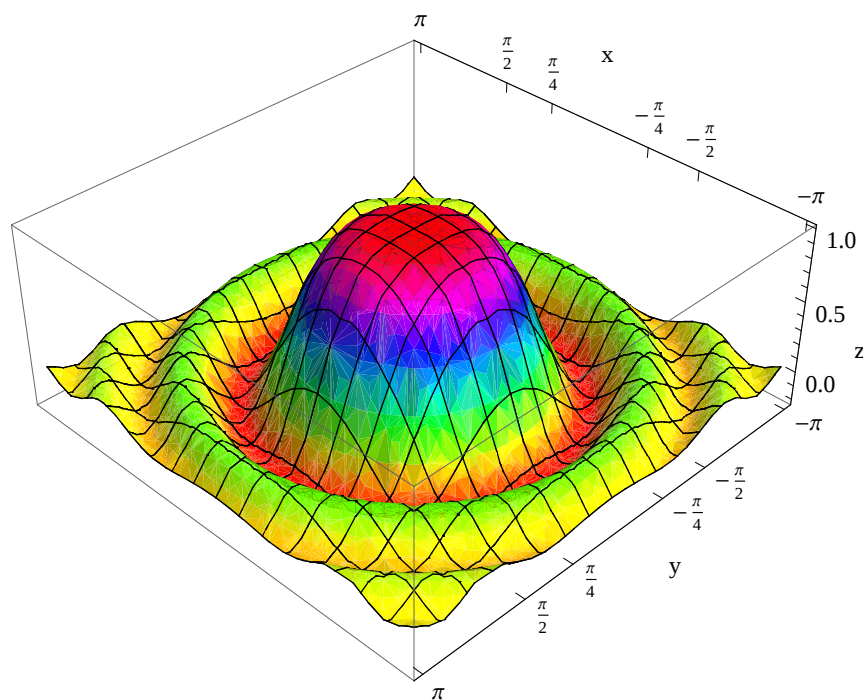


Figura 1.40: Grafico di $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

Esercizio 70

$$f(x, y) = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Passando a coordinate polari:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r}{r} = 1^-,$$

donde $(0, 0)$ è una discontinuità eliminabile. Prolungando per continuità:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Il grafico è mostrato in fig. 1.41.

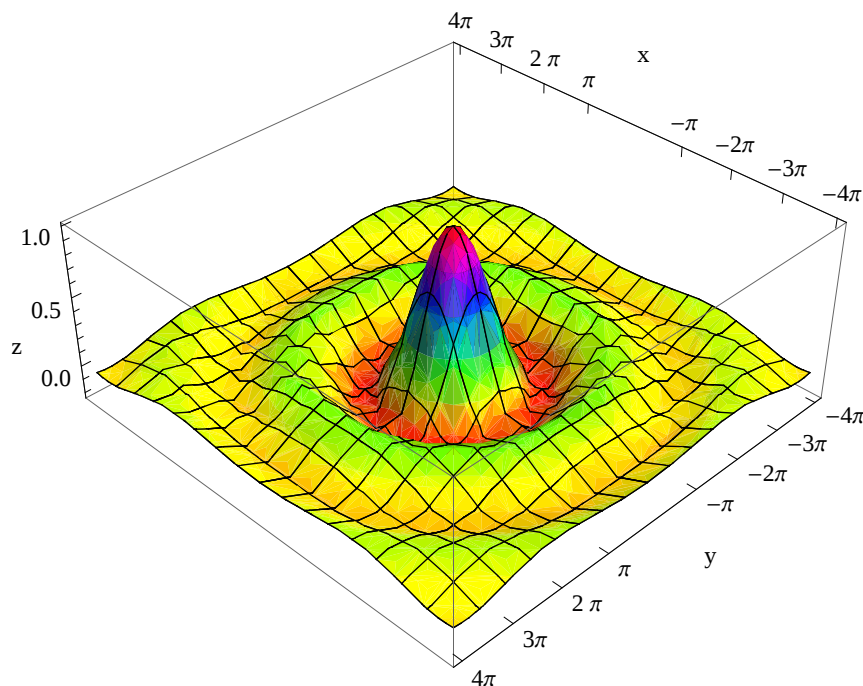


Figura 1.41: Grafico di $f(x, y) = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Esercizio 71

$$f(x, y) = \frac{x \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}, \text{ con } P_0(0, 0)$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) &= \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \right) \cdot \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right] \\ &= 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

donde P_0 è una discontinuità eliminabile. Prolungando per continuità:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esercizio 72 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1 - y}},$$

calcolare:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 1^-}} f(x, y)$$

Soluzione. Abbiamo:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, -\infty < y \leq 1, y \neq -x + 1\}$$

cioè il campo illimitato e non connesso $X = [0, +\infty) \times (-\infty, 1] \setminus S$, essendo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + 1\}$, cioè la retta di equazione $y = -x + 1$. Da ciò segue che $P_0(0, 1) \notin X$.

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 1^-}} \frac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1 - y}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 1^-}} \left(\sqrt{x} + \sqrt{1 - y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quindi P_0 è una discontinuità eliminabile. Prolungando per continuità:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

Esercizio 73 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{2x - y}{x^2 + y^2},$$

calcolare:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$$

Soluzione. Abbiamo:

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}, \quad P_0(0, 0)$$

Passando a coordinate polari:

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x - y}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos \varphi - \sin \varphi}{r} \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{se } 2 \cos \varphi > \sin \varphi \\ -\infty, & \text{se } 2 \cos \varphi < \sin \varphi \end{cases}, \end{aligned}$$

donde $\nexists \lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$. Quindi P_0 è una singolarità per f .

Il grafico è mostrato in fig. 1.42.

Esercizio 74 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{\arcsin(xy - 2)}{\arctan(3xy - 6)},$$

calcolare:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y)$$

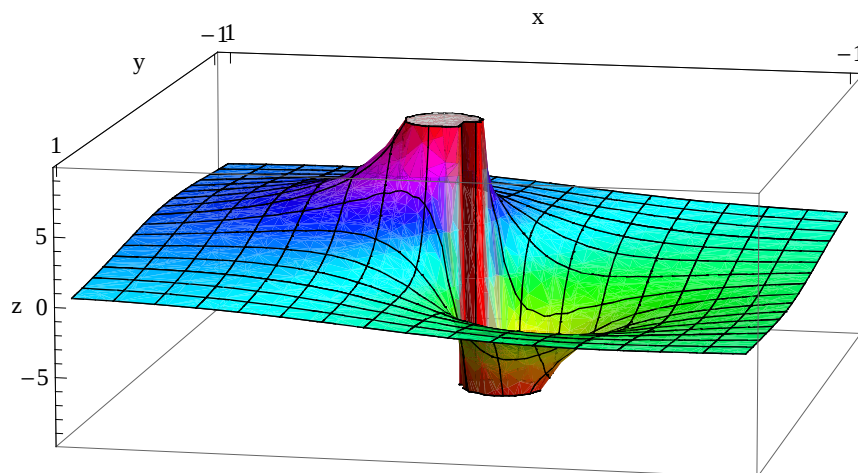


Figura 1.42: Grafico di $f(x, y) = \frac{2x-y}{x^2+y^2}$ in un intorno di $P_0(0, 0)$.

Soluzione. È conveniente eseguire il cambio di variabile

$$\xi = xy,$$

donde abbiamo la funzione di una sola variabile:

$$f(\xi) = \frac{\arcsin(\xi - 2)}{\arctan(3\xi - 6)},$$

definita in $E = [1, 2) \cup (2, 3]$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) &= \lim_{\xi \rightarrow 2} f(\xi) \\ &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 2} \left[\frac{\arcsin(\xi - 2)}{\xi - 2} \cdot \frac{\xi - 2}{3\xi - 6} \cdot \frac{3\xi - 6}{\arctan(3\xi - 6)} \right] \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 2} \left[\frac{\arcsin(\xi - 2)}{\xi - 2} \right] \cdot \lim_{\xi \rightarrow 2} \left[\frac{\xi - 2}{3\xi - 6} \right] \cdot \lim_{\xi \rightarrow 2} \left[\frac{3\xi - 6}{\arctan(3\xi - 6)} \right] \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

quindi P_0 è una discontinuità eliminabile.

Il grafico è mostrato in fig. 1.43.

1.5 Esercizi proposti

Lo svolgimento degli esercizi è riportato in Appendice ??

Esercizio 75 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{\sqrt{x}} + \ln(y - \sqrt{x}) \\ g(x, y) &= e^{\sqrt{x}} + \ln(x - \sqrt{y}) \end{aligned} \tag{1.78}$$

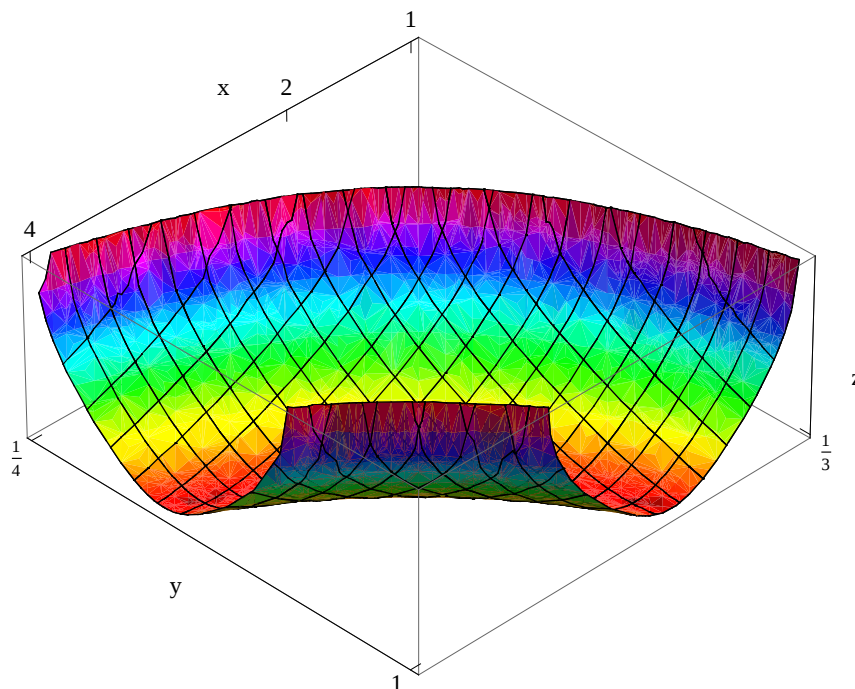


Figura 1.43: Grafico di $f(x, y) = \frac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)}$

Esercizio 76 Determinare l'insieme di definizione delle funzioni:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt[4]{1 - a^2(x^2 + y^2)} + \sqrt{9 - a^2(x^2 + y^2)} \\ g(x, y) &= e^{xy} + \ln[1 - a^2(x^2 + y^2)] \end{aligned} \quad (1.79)$$

Esercizio 77 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x, y) = \ln(a^2 - x^2) + \sqrt{\frac{\arctan|y - a|}{x^2 + y^2 - a^2}}, \quad (1.80)$$

dove $a > 0$.

Esercizio 78 Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f_\alpha(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - \alpha + 1) + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2 - y^2}}, \quad (1.81)$$

dove $\alpha \geq 0$.

Esercizio 79 Determinare l'insieme di definizione e le curve di livello della funzione:

$$f(x, y) = x + y \quad (1.82)$$

Esercizio 80 Determinare l'insieme di definizione e le curve di livello della funzione:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (1.83)$$

Esercizio 81 Determinare l'insieme di definizione e le curve di livello della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{xy} \quad (1.84)$$

Esercizio 82 Determinare l'insieme di definizione e le curve di livello della funzione:

$$f(x, y) = (1 + x + y)^2 \quad (1.85)$$

Esercizio 83 Assegnata la funzione:

$$f(x, y) = 1 - |x| - |y|,$$

determinare la curva di livello 0 e la curva di livello 1, i.e. i luoghi $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 1$.

1.6 Calcolo differenziale per funzioni di più variabili (parte I)

1.6.1 Derivazione parziale delle funzioni di due variabili

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che A è un campo, per cui

$$P_0(x_0, y_0) \in A \implies \exists I_\delta(x_0, y_0) \subset A, \quad (1.86)$$

essendo $I_\delta(P_0)$ un intorno circolare di P_0 :

$$I_\delta(P_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$$

La (1.86) implica:

$$\forall \Delta x \mid |\Delta x| \in (0, \delta), \quad P(x_0 + \Delta x, y_0) \in A \implies \exists \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Definizione 84 $\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ è il **rapporto incrementale parziale rispetto a x della funzione f** .

Definizione 85

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ è } \textit{parzialmente derivabile rispetto a } x \\ \text{nel punto } P_0 \end{array} \right) \iff \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = l \in \mathbb{R} \right)$$

Il limite l è la **derivata parziale rispetto a x della funzione f nel punto P_0** . Indichiamo tale derivata con il simbolo $f_x(x_0, y_0)$, quindi:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (1.87)$$

Nella *notazione di Leibnitz*, la derivata parziale rispetto a x di f nel punto (x_0, y_0) si scrive :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

Definizione 86

f è **parzialmente derivabile rispetto a x**
in A

$\stackrel{\text{def}}{\iff} (f \text{ è parzialmente derivabile rispetto a } x \text{ in ogni } P(x, y) \in A$

Quindi:

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

In maniera analoga possiamo procedere per la variabile y :

$$\begin{aligned} f_y(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \\ f_y(x, y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \end{aligned} \quad (1.88)$$

Il numero reale $f_y(x_0, y_0)$ è la **derivata parziale rispetto a y** della funzione f nel punto P_0 . Nella notazione di Leibnitz:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}$$

Esempio 87

$$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$$

$$\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x)y_0 + y_0^2 - (2x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x_0\Delta x - y_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= 4x_0 - y_0 \\ f_y(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2x_0^2 - x_0(y_0 + \Delta y) + (y_0 + \Delta y)^2 - (2x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2y_0\Delta y - x_0\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} \\ &= 2y_0 - x_0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4x - y \\ f_y(x, y) &= 2y - x \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che le derivate parziali si calcolano utilizzando le regole di derivazioni per le funzioni di una variabile, assunto costanti le rimanenti variabili.

Nel caso di una funzione di una variabile, la derivabilità in x_0 implica la continuità in tale punto. Nel caso di più variabili tale proprietà non è conservata:

Esempio 88

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(x, y) &= 0, \quad \text{se } x = y = 0 \end{aligned} \quad (1.89)$$

Risulta:

$$\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) \implies P_0(0, 0) \text{ è una singolarità}$$

Ciò può essere verificato passando dalle coordinate cartesiane nel piano xy alle coordinate polari $r\varphi$:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

Quindi resta definita la funzione composta:

$$g(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = \frac{1}{2} \sin(2\varphi)$$

Il limite è:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} g(r, \varphi) = \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \implies \nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$$

Il grafico è in fig. 1.44. Si osservi che $f[x(r, \varphi), y(r, \varphi)]$ non dipende dalla coordinata radiale; ciò implica che la funzione è costante su ogni retta per l'origine. Ciò può essere verificato anche in coordinate cartesiane, determinano il valore assunto da f su una retta $y = mx$:

$$f(x, mx) = \frac{m^2}{1 + m^2} \stackrel{\text{def}}{=} h(m) \quad (1.90)$$

Le coordinate polari (r, φ) possono essere interpretate come parametri della rappresentazione:

$$S: z = f[x(r, \varphi), y(r, \varphi)],$$

che è l'equazione parametrica della superficie $S: z = f(x, y)$. Il cui grafico è in fig. 1.45. Per maggiori dettagli sull'implementazione del codice *Mathematica*, consultare [?]. Per il calcolo delle derivate poniamo:

$$\varphi(x) = f(x, 0), \quad \psi(y) = f(0, y)$$

Dalla (1.90):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0 \\ \psi(y) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} h(m) = +1, \end{aligned}$$

giacchè $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ altro non sono che i valori assunti dalla funzione rispettivamente sugli assi x ($m = 0$) e y ($m \rightarrow +\infty$). Le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f_x(x, 0) &= \varphi'(x) = 0, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty) \\ f_y(0, y) &= \psi'(y) = 0, \quad \forall y \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

Segue:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = 0 \\ f_y(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \psi'(y) = 0, \end{aligned}$$

Si conclude che f_x, f_y esistono in P_0 in cui la f non è continua.

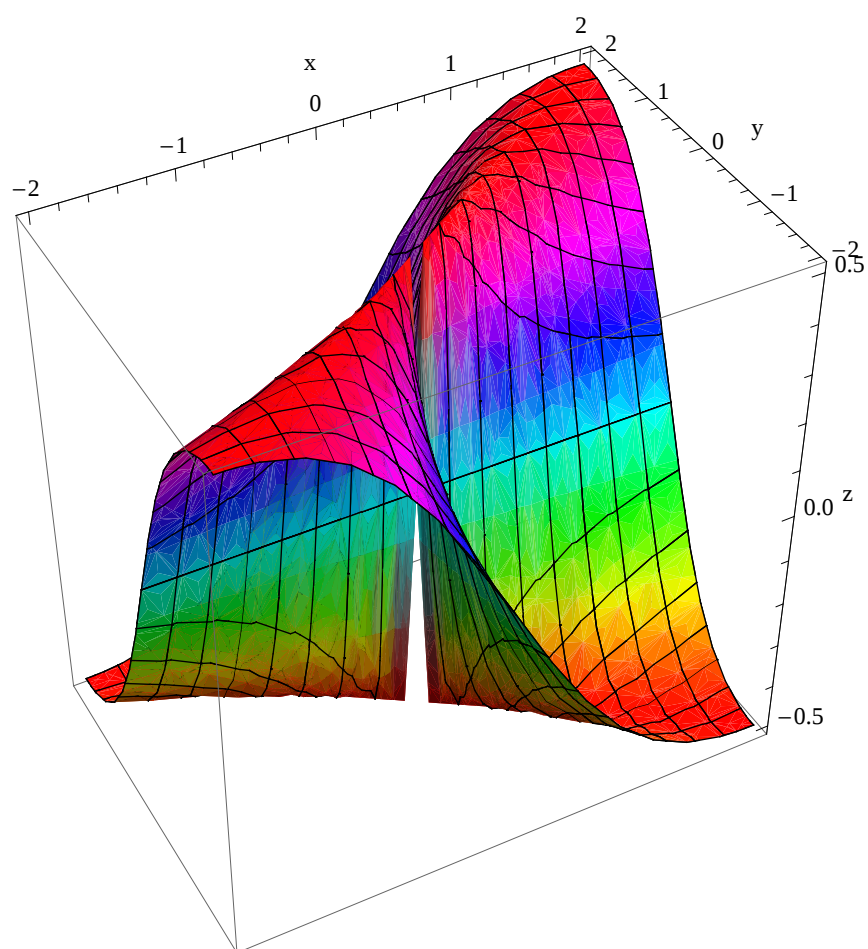


Figura 1.44: Grafico di $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

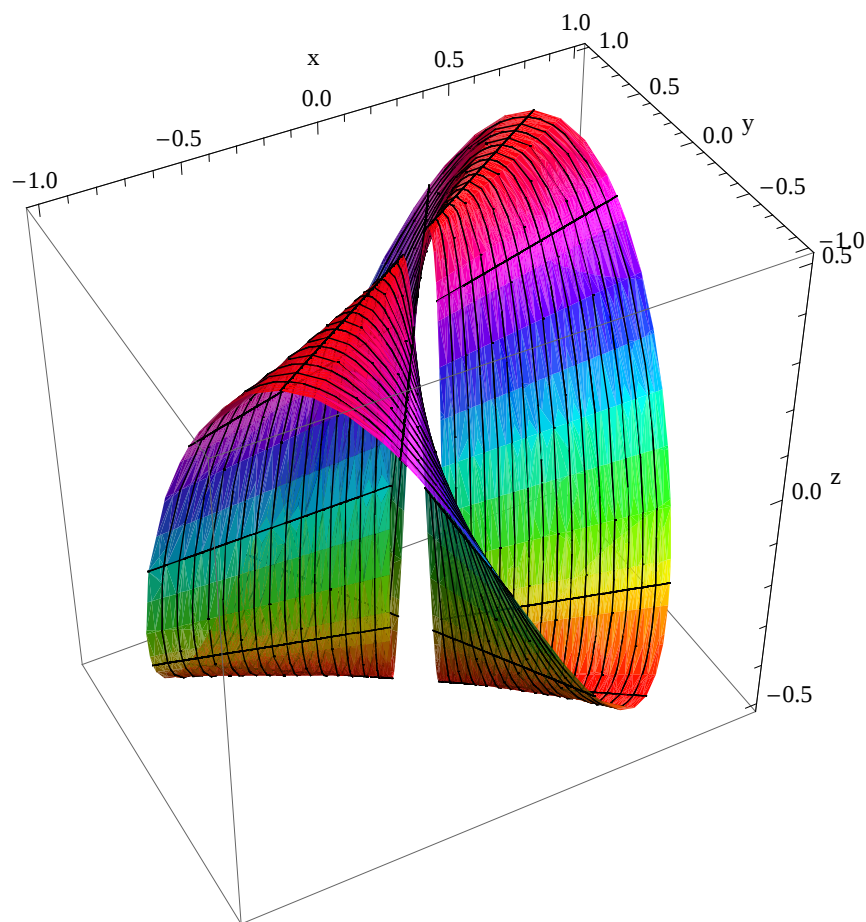


Figura 1.45: $S : z = f[x(r, \varphi), y(r, \varphi)]$. È stato “ritagliato” un intorno di $r = 0$, in modo da evidenziare l’andamento “nastriforme” della superficie nei pressi della singolarità $r = 0$. Per maggiori dettagli sull’implementazione del codice `Mathematica`, consultare [?].

Supponiamo che la funzione $f(x, y)$ sia dotata di entrambe le derivate parziali $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$. Supponendo ulteriormente che tali funzioni siano parzialmente derivabili, si ha:

$$f_{xx}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_{xy}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y + \Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y}$$

La notazione simbolica è:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per la funzione $f_y(x, y)$:

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Riepilogando, abbiamo le **derivate parziali prime** o **derivate parziali del primo ordine**:

$$f_x, f_y,$$

e le **derivate parziali seconde** o **derivate parziali del second'ordine**:

$$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$$

Le f_{xy}, f_{yx} sono le **derivate miste del second'ordine**. Ci si può chiedere se sotto determinate ipotesi è $f_{yx} = f_{xy}$. La risposta è affermativa ed è contenuta nel seguente:

Teorema 89 Teorema di Schwarz

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è continua nel campo } A \\ \text{assieme alle derivate parziali } f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} \end{array} \right) \implies (\forall (x, y) \in A, f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y))$$

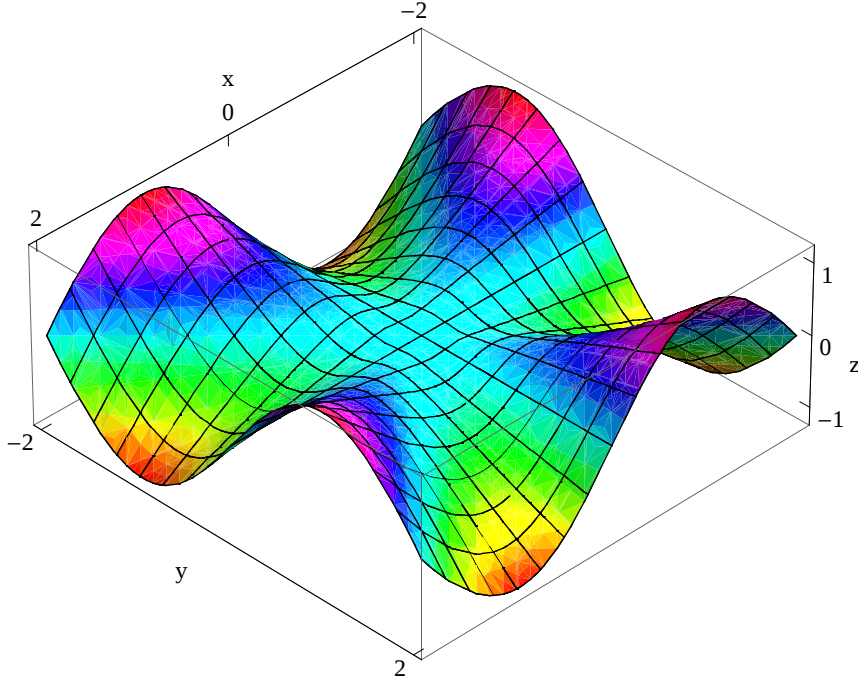
Dimostrazione. Omessa. ■

Esempio 90 Consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (1.91)$$

Tale funzione è definita in $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Per determinare il limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ è preferibile passare a coordinate polari:

$$g(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\varphi$$


 Figura 1.46: Grafico di $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Quindi:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} g(r, \varphi) = 0,$$

cosicchè l'origine è un punto di discontinuità eliminabile. Il grafico della funzione è riportato in fig. 1.46.

Le derivate parziali prime:

$$f_x(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Le derivate miste:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

Da ciò segue:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y), \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Studiamo il comportamento delle derivate miste per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Al solito, passiamo a coordinate polari, ottenendo:

$$f_{xy}[x(r, \varphi), y(r, \varphi)] = f_{yx}[x(r, \varphi), y(r, \varphi)] = \cos^6 \varphi - \sin^6 \varphi,$$

per cui

$$\nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_{xy}(x, y), \quad \nexists \lim_{r \rightarrow 0} f_{yx}(x, y)$$

Cioè non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Schwarz, giacchè le derivate miste non sono continue in $(0, 0)$. Verifichiamo che nell'origine è $f_{xy} \neq f_{yx}$. A tale scopo poniamo:

$$\varphi(y) \equiv f_x(0, y)$$

Quindi:

$$\varphi(y) = -y, \forall y \in \mathbb{R}$$

La derivata parziale mista $f_{xy}(0, y)$ è:

$$f_{xy}(0, y) = \varphi'(y) = -1, \forall y \in \mathbb{R}$$

Evidentemente:

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \varphi'(y) = -1$$

Per il calcolo di $f_{yx}(0, 0)$ procediamo in maniera simile. Precisamente, poniamo:

$$\psi(x) \equiv f_y(x, 0)$$

Quindi:

$$\psi(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

La derivata parziale mista $f_{yx}(0, y)$ è:

$$f_{yx}(x, 0) = \psi'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Evidentemente:

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \psi'(x) = 1$$

Si conclude che per la funzione (1.91) risulta $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

In fig. 1.47 riportiamo il grafico di $f_{xy}(x, y)$; da qui vediamo che la funzione si annulla sulla bisettrice $y = x$. Infatti

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f_{xy}(x, x) = 0$$

Inoltre, su una qualunque retta del piano xy e passante per l'origine, quindi di equazione $y = mx$, si ha:

$$f_{xy}(x, mx) = \frac{1 + 9m^2 - 9m^4 - m^6}{(1 + m^2)^3}, \quad (1.92)$$

cioè lungo $y = mx$ la derivata mista f_{xy} è costante. Grafichiamo la (1.92) in funzione del coefficiente angolare m (fig. 1.48). Ricercando gli estremi assoluti di $f_{xy}(x, mx)$, si trova che tale funzione assume un minimo assoluto per $m = 1 + \sqrt{2}$. Tali risultati sono riassunti in fig. 1.49 dove è riportato un **density plot** della $f_{xy}(x, y)$.

In linea di principio, possiamo determinare a partire dalle derivate seconde, le **derivate parziali terze** o del **terz'ordine**:

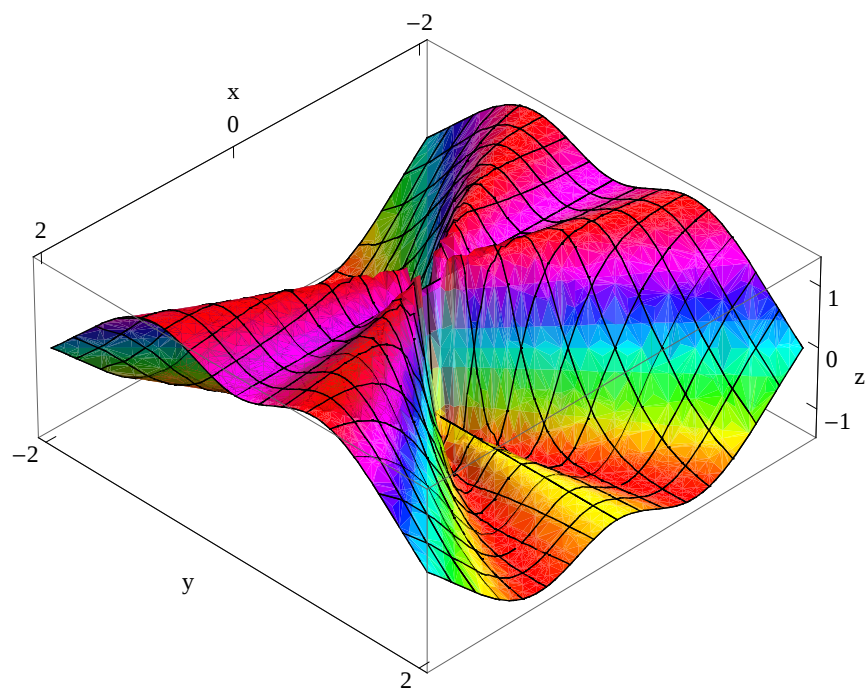


Figura 1.47: Grafico di $f_{xy}(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$.

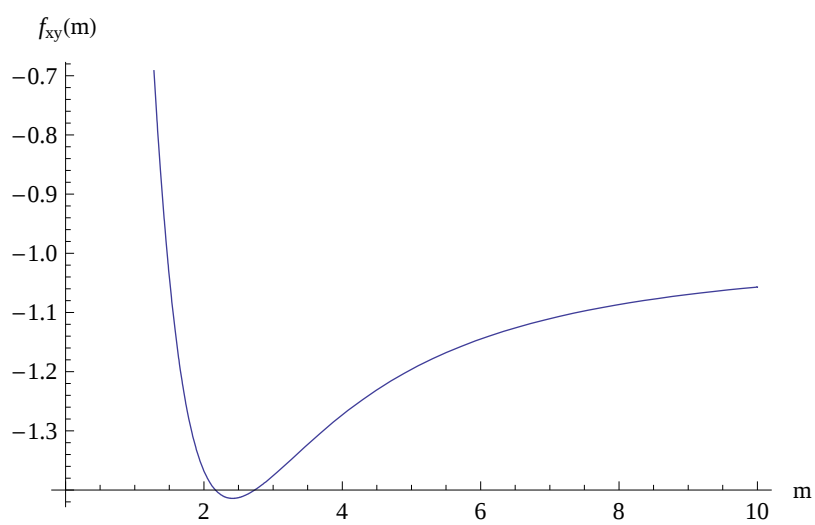


Figura 1.48: Grafico di $f_{xy}(x, mx)$ in funzione di m .

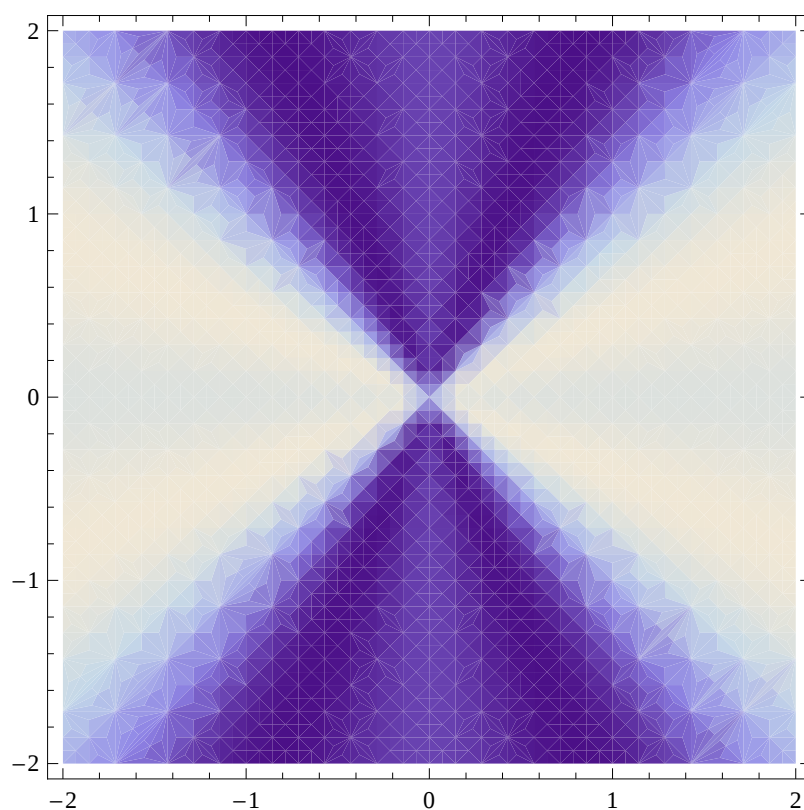


Figura 1.49: Un density plot della derivata mista f_{xy} per $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$. Le zone più scure corrispondono a rette $y = mx$ con $m = \pm(1 + \sqrt{2})$. Per maggiori dettagli sull'implementazione del codice **Mathematica**, consultare [?].

$$\begin{aligned}
 f_{xx}(x, y) &\rightarrow \begin{cases} f_{xxx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \\ f_{xxy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \end{cases} \\
 f_{xy}(x, y) &\rightarrow \begin{cases} f_{xyx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \\ f_{xyy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \end{cases} \\
 f_{yx}(x, y) &\rightarrow \begin{cases} f_{yyx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \\ f_{yxy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \end{cases} \\
 f_{yy}(x, y) &\rightarrow \begin{cases} f_{yyx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \\ f_{yyy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Esempio 91 Calcolare le derivate parziali seconde della funzione seguente:

$$f(x, y) = \arctan \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)$$

Soluzione. Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)^2} \cdot \frac{1-xy + y(x+y)}{(1-xy)^2} \\
 &= \frac{1+y^2}{x^2 + y^2 + x^2 y^2 + 1} \\
 &= \frac{1+y^2}{x^2(1+y^2) + (1+y^2)} \\
 &= \frac{1}{x^2 + 1} \\
 \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)^2} \cdot \frac{1-xy + x(x+y)}{(1-xy)^2} \\
 &= \frac{1+x^2}{x^2 + y^2 + x^2 y^2 + 1} \\
 &= \frac{1+x^2}{y^2(1+x^2) + (1+x^2)} \\
 &= \frac{1}{y^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate parziali del second'ordine:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) = -\frac{2x}{x^2 + 1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^2 + 1} \right) = -\frac{2y}{y^2 + 1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y^2 + 1} \right) = 0\end{aligned}$$

Esempio 92 Calcolare $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ se

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

Soluzione.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right]$$

Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy),$$

dopodichè:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} [y \cos(xy)] \\ &= \cos(xy) - xy \sin(xy)\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} [\cos(xy) - xy \sin(xy)] \\ &= -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy)\end{aligned}$$

1.7 Derivazione parziale delle funzioni di $n > 2$ variabili

Generalizziamo le nozioni precedenti al caso $n > 2$. Sia f definita nel campo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, per cui

$$P_0 \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right) \in A \implies \exists I_\delta(P_0) \subset A, \quad (1.93)$$

essendo $I_\delta(P_0)$ un intorno circolare di P_0 :

$$I_\delta(P_0) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{h=1}^n \left(x_h - x_h^{(0)} \right)^2 < \delta^2 \right\}$$

La (1.93) implica:

$$\begin{aligned}k \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall |\Delta x_k| \in (0, \delta), \quad P \left(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)} + \Delta x_k, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right) \in A \\ \implies \exists \frac{f \left(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)} + \Delta x_k, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right) - f \left(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right)}{\Delta x_k}\end{aligned}$$

Definizione 93 $\frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)} + \Delta x_k, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_k}$ è il **rapporto incrementale parziale rispetto a x_k della funzione f** .

Definizione 94 f è **parzialmente derivabile rispetto a x_k nel punto P_0** $\iff \left(\exists \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)} + \Delta x_k, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_k} \in \mathbb{R} \right)$

Tale limite è la **derivata parziale rispetto a x_k della funzione f nel punto P_0** . Indichiamo tale derivata con:

$$f_{x_k} \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right)$$

Nella notazione di Leibnitz:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{P_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{P_0}$$

Quindi:

$$f_{x_k} \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)} + \Delta x_k, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_k}$$

Definizione 95

f è **parzialmente derivabile rispetto a x_k in A**

$\stackrel{def}{\iff} (f \text{ è parzialmente derivabile rispetto a } x_k \text{ in ogni } P \in A)$

1.8 Differenziale totale

Sia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definita nel campo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia ivi parzialmente derivabile in A rispetto a x_k con $k = 1, 2, \dots, n$. Quindi restano definite in A le n funzioni f_{x_k} . Presi ad arbitrio due punti di A

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Q(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \in A$$

L'incremento della funzione è:

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.94)$$

Indichiamo con df la somma dei prodotti delle derivate parziali f_{x_k} per i corrispondenti incrementi Δx_k :

$$df \stackrel{def}{=} f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_1 + f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_2 + \dots + f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_n \quad (1.95)$$

L'espressione (1.95) è il **differenziale totale della funzione f** . Applichiamo tale definizione alle n funzioni $f_h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_h$ con $h = 1, 2, \dots, n$. Abbiamo:

$$\frac{\partial f_h}{\partial x_k} = \delta_{hk},$$

essendo δ_{hk} il simbolo di Kronecker:

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1, & \text{se } h = k \\ 0, & \text{se } h \neq k \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} df_h &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_h}{\partial x_k} \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{hk} \Delta x_k \\ &= \Delta x_h \end{aligned}$$

Ma $f_h = x_h$, per cui:

$$dx_h = \Delta x_h, \quad h = 1, 2, \dots, n$$

Pertanto la (1.95) si riscrive:

$$df = f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 + f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 + \dots + f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \quad (1.96)$$

Nella notazione di Leibnitz:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (1.97)$$

La relazione esistente tra l'incremento Δf espresso dalla (1.94) e il differenziale df è espressa dal seguente

Teorema 96 Teorema del differenziale totale

Se $f \in C^1(A)$ con A campo di $\mathbb{R}^n$, allora:

$$\Delta f = df + o(\rho), \quad (1.98)$$

$$\text{essendo } \rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, consideriamo il caso $n = 2$. Presi arbitrariamente i punti $P(x, y), Q(x + \Delta x, y + \Delta y) \in A$, congiungiamoli con la spezzata $\gamma = \overline{PM} \cup \overline{MQ}$, essendo $M(x, y + \Delta y) \in A$. In altri termini, $\overline{PM}$ e $\overline{MQ}$ sono paralleli rispettivamente agli assi y e x . Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(Q) - f(P) \\ &= [f(Q) - f(M)] + [f(M) - f(P)] \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \\ &= [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)] + [\psi(y + \Delta y) - \psi(y)], \end{aligned} \quad (1.99)$$

essendo

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x, y + \Delta y) \\ \psi(y) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x, y) \end{aligned} \quad (1.100)$$

Risulta:

$$f \in C^1(A) \implies \varphi \in C^1([x, x + \Delta x]), \quad \psi \in C^1([y, y + \Delta y]), \quad (1.101)$$

Per il teorema di Lagrange:

$$\begin{aligned}\exists x_* \in (x, x + \Delta x) \mid \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) &= \varphi'(x_*) \Delta x \\ \exists y_* \in (y, y + \Delta y) \mid \psi(y + \Delta y) - \psi(y) &= \psi'(y_*) \Delta y\end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned}\exists \theta \in (0, 1) \mid \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) &= \varphi'(x + \theta \Delta x) \Delta x \\ \exists \eta \in (0, 1) \mid \psi(y + \Delta y) - \psi(y) &= \psi'(y + \eta \Delta y) \Delta y,\end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned}f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) &= f_x(x + \theta \Delta x, y) \Delta x \\ f(x, y + \Delta y) - f(x, y) &= f_y(x, y + \eta \Delta y) \Delta y\end{aligned}$$

In forza della continuità di f_x, f_y :

$$\begin{aligned}f_x(x + \theta \Delta x, y) &= f_x(x, y) + \alpha(\Delta x) \\ f_y(x, y + \eta \Delta y) &= f_y(x, y) + \beta(\Delta y),\end{aligned}$$

essendo $\alpha(\Delta x)$ e $\beta(\Delta y)$ infinitesimi per $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \beta(\Delta y) = 0$$

Sostituendo nella (1.99):

$$\Delta f = df + \alpha(\Delta x) \Delta x + \beta(\Delta y) \Delta y \quad (1.102)$$

Osserviamo che posto $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, si ha:

$$\begin{aligned}\left| \frac{\alpha(\Delta x) \Delta x + \beta(\Delta y) \Delta y}{\rho} \right| &= \left| \alpha(\Delta x) \frac{\Delta x}{\rho} + \beta(\Delta y) \frac{\Delta y}{\rho} \right| \\ &\leq |\alpha(\Delta x)| \left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| + |\beta(\Delta y)| \left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| \\ &\leq |\alpha(\Delta x)| + |\beta(\Delta y)|,\end{aligned} \quad (1.103)$$

Quindi:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [|\alpha(\Delta x)| + |\beta(\Delta y)|] = 0 \stackrel{\text{eq. (1.103)}}{\implies} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \frac{\alpha(\Delta x) \Delta x + \beta(\Delta y) \Delta y}{\rho} \right| = 0$$

■

Definizione 97 *Dicesi differenziabile ogni funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di classe C^1 .*

Il teorema (96) permette di approssimare l'incremento della funzione con il suo differenziale totale. Infatti per $|\Delta x|, |\Delta y|$ “sufficientemente piccoli” e a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$\Delta f \simeq df$$

Osservazione 98 Per un ulteriore approfondimento sulla questione della differenziabilità è preferibile consultare il file al seguente link:

http://www.extrabyte.info/differenziabilita_stolz.pdf

Esempio 99 Consideriamo un cono di altezza H e raggio di base R . Come è noto, il suo volume è:

$$V(R, H) = \frac{\pi}{3} R^2 H$$

Il differenziale totale della funzione $V(R, H)$ è:

$$dV = \frac{\pi}{3} R (2H \Delta R + R \Delta H)$$

L'incremento del volume è:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(R + \Delta R, H + \Delta H) - V(R, H) \\ &= dV + \frac{\pi}{3} [H (\Delta R)^2 + 2R \Delta R \Delta H + \Delta H (\Delta R)^2], \end{aligned}$$

da cui vediamo che - posto $\rho = \sqrt{(\Delta H)^2 + (\Delta R)^2}$ - il termine

$$\Delta V - dV = \frac{\pi}{3} [H (\Delta R)^2 + 2R \Delta R \Delta H + \Delta H (\Delta R)^2]$$

è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a ρ .

Per $\rho \ll 1$:

$$\Delta V_{app} = \frac{\pi}{3} R (2H \Delta R + R \Delta H)$$

Prendiamo i valori numerici: $R = 10 \text{ cm}$, $\Delta R = -10^{-1} \text{ cm}$, $H = 30 \text{ cm}$, $\Delta H = 3 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$. Quindi:

$$\begin{aligned} \Delta V_{app} &= -10\pi \text{ cm}^3 \simeq -31.4 \text{ cm}^3 \\ \Delta V_{esatto} &= -\frac{10099}{10^3} \pi \text{ cm}^3 \simeq -31.7 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Esempio 100 Assegnata la funzione

$$f(x, y) = x^2 y,$$

determinare l'incremento Δf e il differenziale totale in $P_0(2, 4)$, determinando poi $\Delta f - df$ per le seguenti coppie di valori degli incrementi delle variabili indipendenti:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 2, \Delta y = 4 \\ \Delta x &= 2 \times 10^{-1}, \Delta y = 4 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

Soluzione. Il differenziale totale è:

$$df = 2xy \Delta x + x^2 \Delta y$$

L'incremento

$$\begin{aligned} \Delta f &= (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y) - x^2 y \\ &= df + y (\Delta x)^2 + 2x \Delta x \Delta y + (\Delta x)^2 \Delta y \end{aligned}$$

Quindi:

$$\Delta f - df = y(\Delta x)^2 + 2x\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2 \Delta y$$

In P_0 :

$$\Delta f - df = 4(\Delta x)^2 + 4\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2 \Delta y$$

Per $\Delta x = 2, \Delta y = 4$

$$\Delta f - df = 64$$

Per $\Delta x = 2 \times 10^{-1}, \Delta y = 4 \times 10^{-1}$

$$\Delta f - df = 16 \times 10^{-2} (3 + 10^{-1})$$

Come c'era da aspettarsi, per la seconda coppia di valori degli incrementi $\Delta x, \Delta y$, il differenziale rappresenta una migliore approssimazione dell'incremento Δf .

1.9 Derivazione di funzioni composte

Consideriamo $n \geq 2$ funzioni reali $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ definite nell'intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Adottiamo le seguenti ipotesi:

1. Le funzioni $x_k(t)$ sono derivabili in $[a, b]$.
2. $\forall t \in [a, b], P[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \in A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A$ è un campo.
3. $\exists f : A \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^1(A)$

Le ipotesi 2 e 3 implicano l'esistenza della *funzione composta*:

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \quad \forall t \in [a, b] \end{aligned} \quad (1.104)$$

Scriviamo:

$$F(t) = f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \quad (1.105)$$

Teorema 101 Nelle ipotesi 1,2,3, la funzione composta $F(t)$ è derivabile, e la sua derivata prima è

$$\begin{aligned} F'(t) = & f_{x_1}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] x'_1(t) + f_{x_2}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] x'_2(t) + \\ & + \dots + f_{x_n}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] x'_n(t) \end{aligned} \quad (1.106)$$

Nella notazione di Leibnitz:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \quad (1.107)$$

Dimostrazione. Per $t \in [a, b]$, consideriamo l'incremento Δt tale che $(t + \Delta t) \in [a, b]$ e i corrispondenti incrementi delle n funzioni $x_k(t)$:

$$\Delta x_k = x_k(t + \Delta t) - x_k(t), \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, n$$

Da ciò segue l'incremento di $F(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(t + \Delta t) - F(t) \\ &= f[x_1(t + \Delta t), x_2(t + \Delta t), \dots, x_n(t + \Delta t)] - f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \\ &= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1.108)$$

Cioè:

$$\Delta F = \Delta f \quad (1.109)$$

Per il teorema del differenziale totale:

$$\Delta f = df + o(\rho), \quad (1.110)$$

essendo $o(\rho)$ un qualunque infinitesimo di ordine superiore a ρ per $\rho \rightarrow 0$ (ricordiamo che $\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\Delta x_k)^2}$). Vediamo ora come scrivere in maniera concisa l'infinitesimo di ordine superiore $o(\rho)$. Se $\omega(\rho)$ un infinitesimo per $\rho \rightarrow 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega(\rho) = 0 \implies \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega(\rho) \rho}{\rho} = 0$$

Cioè $\omega(\rho) \rho$ è un infinitesimo di ordine superiore a ρ . La (1.110) può essere scritta come:

$$\Delta f = df + \omega(\rho) \rho$$

Dividendo per Δt e tenendo conto della (1.109):

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \sum_{k=1}^n \left\{ f_{x_k}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \frac{\Delta x_k}{\Delta t} \right\} + \omega(\rho) \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t} \right)^2} \quad (1.111)$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} x_k(t) \text{ è continua} &\implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x_k = 0 \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho = 0 \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega(\rho) = 0 \\ x_k(t) \text{ è derivabile} &\implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k}{\Delta t} = x'_k(t), \end{aligned}$$

per cui eseguendo nella (1.111) l'operazione di passaggio al limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta t}}_{=F'(t)} \\ &= \sum_{k=1}^n f_{x_k}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k}{\Delta t}}_{=x'_k(t)} + \underbrace{\left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega(\rho) \right]}_{=0} \underbrace{\left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t} \right)^2} \right]}_{=\sqrt{\sum_{k=1}^n x'_k(t)^2}}, \end{aligned}$$

cioè la (1.106). ■

Nelle applicazioni ci si imbatte spesso nel teorema di derivazione delle funzioni composte, poichè molte grandezze fisiche esibiscono una dipendenza dal tempo t del tipo $F(t) \equiv f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$. In tal caso, la derivata $\frac{dF}{dt}$ si chiama **derivata totale** di F .

Ancora più frequente il caso di grandezze fisiche che esibiscono una dipendenza funzionale dal tempo t del tipo:

$$f[x_1(t), \dots, x_n(t), t]$$

Qui $x_1(t), \dots, x_n(t)$ sono n grandezze che a loro volta dipendono da t . In tal caso la (1.107) definisce la **derivata totale**² di f :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Il teorema precedente si generalizza al caso di più variabili.

Consideriamo $n \geq 2$ funzioni reali $x_1(t_1, t_2, \dots, t_p), x_2(t_1, t_2, \dots, t_p), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_p)$ definite nel campo $B \subseteq \mathbb{R}^p$. Adottiamo le seguenti ipotesi:

1. $x_k(t_1, t_2, \dots, t_p)$ sono funzioni continue e parzialmente derivabili in B .
2. $\forall (t_1, t_2, \dots, t_p) \in B, P[x_1(t_1, t_2, \dots, t_p), x_2(t_1, t_2, \dots, t_p), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_p)] \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ | A è un campo.
3. $\exists f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^1(A)$

Le ipotesi 2 e 3 implicano l'esistenza della funzione composta:

$$\begin{aligned} F : B &\rightarrow \mathbb{R} \\ F : (t_1, t_2, \dots, t_p) &\rightarrow f[x_1((t_1, t_2, \dots, t_p)), x_2((t_1, t_2, \dots, t_p)), \dots, x_n((t_1, t_2, \dots, t_p))] \end{aligned} \quad (1.112)$$

Scriviamo:

$$F(t_1, t_2, \dots, t_p) = f[x_1(t_1, t_2, \dots, t_p), x_2(t_1, t_2, \dots, t_p), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_p)] \quad (1.113)$$

Teorema 102 Nelle ipotesi 1,2,3, la funzione composta $F(t_1, t_2, \dots, t_p)$ è parzialmente derivabile, e la sua derivata del primo ordine rispetto a t_k è

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_k}, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Dimostrazione. Omessa. ■

Osservazione 103 Nelle applicazioni spesso si omette il cambio di simbolo $f \rightarrow F$, considerando quindi come funzione composta $f[x_1(t_1, t_2, \dots, t_p), x_2(t_1, t_2, \dots, t_p), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_p)]$.

²Per non appesantire la notazione indichiamo con f la funzione:

$$F(t) \equiv f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

Esempio 104 Assegnata $f(x, y)$ con $x(u, v) = uv$, $y(u, v) = \frac{u}{v}$, si ha $f[x(u, v), y(u, v)]$ e quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{u}{v^2} \frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il comportamento del differenziale totale, sussiste il seguente

Teorema 105 Sia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ differenziabile. L'espressione:

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k, \quad (1.114)$$

esprime il differenziale totale di f sia se le x_k sono variabili indipendenti, sia se sono funzioni di altre variabili.

Dimostrazione. Omessa. ■

Il teorema precedente esprime la **proprietà di invarianza del differenziale totale**.

Esempio 106 Sia $f(u, v)$ differenziabile in $A \subseteq \mathbb{R}^2$, con

$$u(x) = ax, \quad v(y) = by$$

Per la proprietà di invarianza, il differenziale totale primo è:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

Esplicitando du e dv :

$$df = a \frac{\partial f}{\partial u} dx + b \frac{\partial f}{\partial v} dy$$

Esempio 107 Data la funzione:

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, \quad y = x^2, \quad \text{per cui è } f[x, y(x)]$$

determiniamo $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{df}{dx}$.

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \arctan \frac{y}{x} \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{y}{x} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{df}{dx} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Alternativamente:

$$f[x, y(x)] = \arctan x,$$

per cui:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

1.9.1 Esercizi svolti

Di seguito la risoluzione di alcuni esercizi proposti³ in [?].

Esercizio 108 Sia:

$$f(x, y) = x^y, \quad \text{con } y = \phi(x),$$

con $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $\mathbb{R}$.

Determinare la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ e la derivata totale $\frac{df}{dx}$.

Osserviamo che è $f[x, \phi(x)]$, per cui la derivata totale è:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \phi'(x) \end{aligned} \tag{1.115}$$

Le derivate parziali si calcolano direttamente dall'espressione analitica di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x^y$$

È conveniente determinare la derivata logaritmica:

$$\ln f(x, y) = y \ln x$$

Derivando ambo i membri:

$$\frac{1}{f(x, y)} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}$$

Cioè:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1}$$

Passiamo alla derivata rispetto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} x^y = x^y \ln x$$

che sostituita nella (1.115):

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= x^{y-1} [y + x \phi'(x) \ln x] \\ &= x^{\phi(x)-1} [\phi(x) + x \phi'(x) \ln x] \end{aligned}$$

Ad esempio, per $\phi(x) = x^2$:

$$\frac{df}{dx} = x^{x^2+1} (1 + 2 \ln x)$$

³Sono contrassegnati con il numero identificativo che appare in [?].

Esercizio 109 Sia:

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow f(u, v) \in \mathbb{R}, \quad \forall (u, v) \in U, \end{aligned}$$

con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ | U è un campo. Per ipotesi:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \quad v = v(x, y), \\ u(x, y), v(x, y) &\text{ parzialmente derivabili in } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

onde la funzione composta:

$$F(x, y) \equiv f[u(x, y), v(x, y)]$$

Determinare 1) le derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$; 2) esplicitare tali espressioni se: $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = e^{xy}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Se: $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = e^{xy}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x \frac{\partial f}{\partial u} + ye^{xy} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -2y \frac{\partial f}{\partial u} + xe^{xy} \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

Esercizio 110 Sia data la funzione:

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right),$$

con

$$x(u, v) = u \sin v, \quad y(u, v) = u \cos v,$$

che individuano la funzione composta $F(u, v) \equiv f[x(u, v), y(u, v)]$.

Determinare $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$.

Soluzione.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate parziali di f rispetto alle variabili x, y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate parziali di $x(u, v)$, $y(u, v)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= \sin v, & \frac{\partial x}{\partial v} &= u \cos v \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \cos v, & \frac{\partial y}{\partial v} &= -u \sin v\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{y}{x^2 + y^2} \sin v - \frac{x}{x^2 + y^2} \cos v \\ &= \frac{u \cos v}{u^2} \sin v - \frac{u \sin v}{u^2} \cos v = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{y}{x^2 + y^2} u \cos v + \frac{x}{x^2 + y^2} u \sin v \\ &= \frac{u \cos v}{u^2} u \cos v + \frac{u \sin v}{u^2} u \sin v = 1\end{aligned}$$

Alternativamente:

$$F[x(u, v), y(u, v)] = \arctan(\tan v) = v \implies \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v} = 1 \end{cases}$$

Esercizio 111 Consideriamo la funzione derivabile in $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f &: A \longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\rightarrow f(u) \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in A\end{aligned}$$

Sia $u(x, y) = xy + \frac{y}{x}$. Determinare $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, dove F è la funzione:

$$F(x, y) = f[u(x, y)]$$

Eslicitare le espressioni di tali derivate se:

$$f(u) = \sin u + e^{\cos u} \tag{1.116}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \left(y - \frac{y}{x^2}\right) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \left(x + \frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Se l'espressione analitica di f è data dalla (1.116):

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \left(y - \frac{y}{x^2}\right) \left[-e^{\cos(xy + \frac{y}{x})} \sin\left(xy + \frac{y}{x}\right) + \cos\left(xy + \frac{y}{x}\right)\right] \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left[-e^{\cos(xy + \frac{y}{x})} \sin\left(xy + \frac{y}{x}\right) + \cos\left(xy + \frac{y}{x}\right)\right]\end{aligned}$$

Esercizio 112 Consideriamo una grandezza fisica u il cui valore dipende dalla somma dei quadrati delle coordinate cartesiane nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$:

$$u = f(x^2 + y^2 + z^2) \quad (1.117)$$

Passando alle **coordinate sferiche** (r, θ, φ) :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (1.118)$$

verificare che

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,$$

dandone un'interpretazione fisica.

Soluzione. Le (1.118) sono le equazioni di trasformazione che permettono di passare dalle coordinate cartesiane (x, y, z) alle coordinate sferiche⁴ (r, θ, φ) :

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Dalle (1.118):

$$u = f(r^2),$$

quindi la funzione composta:

$$u = f[\xi(r)],$$

essendo:

$$\xi(r) = r^2$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{du}{dr} = f'(\xi) \xi'(r) = 2r f'(r^2) \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (1.119)$$

L'interpretazione fisica del risultato (1.119) è la seguente: il valore assunto da u dipende dalla **coordinata radiale** r , e non dalle **coordinate angolari** θ e φ , per cui u non dipende dalla direzione nello spazio fisico $\mathbb{R}^3$. Ciò si esprime dicendo che la grandezza u è **isotropa**.

Alternativamente, assegnata la sfera Σ di centro l'origine delle coordinate e raggio arbitrario R , risulta: $\forall P \in \Sigma, u(P) = \text{costante}$.

Esercizio 113 Assegnata la funzione derivabile:

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{con } U \subseteq \mathbb{R} \\ u &\longmapsto f(u) \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in U, \end{aligned}$$

si supponga che u sia funzione delle variabili x, y :

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{con } A \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto u(x, y) \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

⁴o polari.

Precisamente:

$$u(x, y) = x + ay, \text{ con } a \text{ parametro reale assegnato}$$

Determinare la relazione che lega le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Soluzione

$$f[u(x, y)] \implies \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = af'(u) \end{cases}$$

Da cui:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a \frac{\partial f}{\partial x}$$

Ciò implica che l'integrale generale dell'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - a \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

è

$$f(x, y) = f(x + ay)$$

Cioè dipende da x, y attraverso una particolare combinazione lineare di tali variabili.

Esercizio 114 Sia assegnata la funzione parzialmente derivabile $f(u, v)$, supponiamo che

$$\begin{aligned} u(x, t) &= x + at \\ v(y, t) &= y + bt, \end{aligned}$$

dove a e b sono costanti reali. Resta così definita la funzione composta:

$$F(x, y, t) = f[u(x, t), v(y, t)]$$

Verificare che:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= a \frac{\partial f}{\partial u} + b \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}, \end{aligned}$$

per cui:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y}$$

Esercizio 115 (n. 1826). Determinare l'espressione analitica della funzione reale $f(x, y)$ sapendo che soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (1.120)$$

Soluzione. Deve essere:

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{x} \int \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Poniamo $t = \frac{y}{x}$, per cui:

$$\int \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = x \int \frac{dt}{1 + t^2} = x \arctan t + C$$

Cioè:

$$\int \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = x \arctan \frac{y}{x} + C$$

Si osservi che C è una costante di integrazione rispetto alla variabile y , per cui è una funzione arbitraria (derivabile) di x :

$$\int \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = x \arctan \frac{y}{x} + g(x)$$

Quindi:

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + g(x), \quad \forall g(x)$$

Esercizio 116 (n. 1827). Determinare l'espressione analitica della funzione reale $f(x, y)$ sapendo che soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{x}, \quad (1.121)$$

con la condizione:

$$f(1, y) = \sin y \quad (1.122)$$

Soluzione. Deve essere:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int \frac{x^2 + y^2}{x} dx \\ &= \int x dx + y^2 \int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + y^2 \ln |x| + C \end{aligned}$$

In questo caso, C non dipende da x , per cui risulta essere un'arbitraria funzione di y :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + y^2 \ln |x| + g(y)$$

La condizione (1.122) si scrive:

$$\frac{1}{2} + g(y) = \sin y \iff g(y) = \sin y - \frac{1}{2},$$

per cui:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 - 1) + y^2 \ln |x| + \sin y$$

Esercizio 117 Assegnato $P_0(1, 2, 6) \in S : z = 2x^2 + y^2$, siano α e β i piani passanti per P_0 e paralleli ai piani coordinati xz e yz . Scrivere l'equazione delle rette tangenti alle sezioni date dall'intersezione di S con α e β .

Soluzione. Risulta:

$$\alpha : y = 2, \quad \beta : x = 1$$

Poniamo $\gamma_\alpha = \alpha \cap S$ e $\gamma_\beta = \beta \cap S$. Risulta:

$$\gamma_\alpha : z = 2x^2 + 4, \quad \gamma_\beta : z = y^2 + 2$$

Detta τ'_0 la retta tangente a γ_α in $P'_0(x_0 = 1, z_0 = 6)$, si ha:

$$\tau'_0 : z - z_0 = m'_0(x - x_0)$$

Il coefficiente angolare m_0 è:

$$m'_0 = \left(\frac{dz}{dx} \right)_{x=x_0} = 4x_0 = 4$$

Quindi:

$$\tau'_0 : z = 4x + 2$$

Detta τ''_0 la retta tangente a γ_β in $P''_0(y_0 = 2, z_0 = 6)$, si ha:

$$\tau''_0 : z - z_0 = m''_0(y - y_0)$$

Il coefficiente angolare m''_0 è:

$$m''_0 = \left(\frac{dz}{dy} \right)_{y=y_0} = 2y|_{y_0} = 4$$

Quindi:

$$\tau''_0 : z = 4y - 2$$

Esercizio 118 (n. 1854). Il periodo di oscillazione di un pendolo semplice è:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1.123)$$

dove l è la lunghezza del pendolo e g l'accelerazione di gravità. Determinare l'errore nel calcolo di T commesso a causa di "piccoli" errori di misura di l e g .

Soluzione. Siano Δl e Δg gli errori su l e g . Osserviamo poi che $T(l, g)$; precisamente:

$$T : A \rightarrow [0, +\infty),$$

dove $A = \{(l, g) \mid 0 \leq l < +\infty, 0 < g < +\infty\}$. Scriviamo dunque:

$$T(l, g) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.124)$$

Il differenziale totale della funzione $T(l, g)$ è:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial T}{\partial g} \Delta g$$

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g}}, \quad \frac{\partial T}{\partial g} = -\pi \sqrt{\frac{l}{g^3}},$$

onde:

$$dT = \pi \frac{g\Delta l - l\Delta g}{g\sqrt{l \cdot g}}$$

Per il teorema del differenziale totale:

$$\Delta T = dT + o(\rho),$$

dove $\rho = \sqrt{(\Delta l)^2 + (\Delta g)^2}$, mentre $o(\rho)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a ρ . Per $\Delta l, \Delta g \ll 1$ è $\rho \ll 1$, per cui:

$$\Delta T \simeq \pi \frac{g\Delta l - l\Delta g}{g\sqrt{l \cdot g}}$$

Esercizio 119 Sia r la retta passante per $P_0(x_0, y_0)$ e $P(x, y)$ essendo P un punto variabile nel piano. Detto α l'angolo che r forma con l'asse x , determinare $d\alpha$ se le coordinate di P subiscono gli incrementi infinitesimi dx, dy .

Soluzione. Risulta:

$$\tan \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

da cui:

$$\alpha(x, y) = \arctan\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right)$$

Il differenziale totale della funzione $\alpha(x, y)$ è:

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy$$

Calcolando le derivate parziali:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{y - y_0}{\rho}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{x - x_0}{\rho},$$

essendo $\rho = \text{dist}(P_0, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Quindi:

$$d\alpha = \frac{(x - x_0) dy - (y - y_0) dx}{\rho}$$

Ma:

$$x - x_0 = \rho \cos \alpha, \quad y - y_0 = \rho \sin \alpha,$$

per cui:

$$d\alpha = \cos \alpha dy - \sin \alpha dx$$

Esercizio 120 Se $\xi = x^2 - y^2$ e $\phi(\xi)$ è una qualunque funzione reale derivabile, si verifichi che una soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}, \quad (1.125)$$

è

$$z = y\phi(x^2 - y^2)$$

Soluzione

Risulta $\xi(x, y) = x^2 - y^2$, per cui resta definita la funzione composta $\psi(x, y) = \phi[\xi(x, y)]$.
Quindi:

$$z(x, y) = y\psi(x, y)$$

Le derivate parziali di z rispetto alle variabili x e y sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \psi(x, y) + y \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned}$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \phi'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} = 2x\phi'(\xi) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \phi'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial y} = -2y\phi'(\xi) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xy\phi'(x^2 - y^2) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \psi(x, y) - 2y^2\phi'(x^2 - y^2) = \phi(x^2 - y^2) - y^2\phi'(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Sostituendo nella (1.125):

$$2y\phi'(x^2 - y^2) + \frac{1}{y}\phi(x^2 - y^2) - 2y\phi'(x^2 - y^2) = \frac{1}{y}\phi(x^2 - y^2) \iff 0 = 0$$

Esercizio 121 Se $\xi = \frac{y}{x}$ e $\phi(\xi)$ è una qualunque funzione reale derivabile, si verifichi che una soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z,$$

è

$$z = xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Soluzione

Risulta $\xi(x, y) = \frac{y}{x}$, per cui resta definita la funzione composta $\psi(x, y) = \phi[\xi]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y + \phi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\phi'\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x + \phi'\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} &= xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + xy \\ &= xy + z\end{aligned}$$

Esercizio 122 Se $\xi = ye^{\frac{x^2}{2y^2}}$ e $\phi(\xi)$ è una qualunque funzione reale derivabile, si verifichi che una soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz,$$

è

$$z = e^y x \phi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= e^y \phi'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= e^y \phi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) + e^{yy} \phi'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) \frac{\partial \xi}{\partial y},\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{x}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= e^{\frac{x^2}{2y^2}} - \frac{x^2}{y^2} e^{\frac{x^2}{2y^2}}\end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= e^y \phi'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) \frac{x}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= e^y \phi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) + e^y \phi'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) e^{\frac{x^2}{2y^2}}\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} &= \\ e^y (x^2 - y^2) \phi'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) \frac{x}{y} e^{\frac{x^2}{2y^2}} + \frac{x}{y} e^y \phi'\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right) (y^2 - x^2) e^{\frac{x^2}{2y^2}} &= \\ &= xyz\end{aligned}$$

Per altri esercizi, consultare l'appendice ??

1.10 Funzioni costanti

Teorema 123 Sia $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ continua e parzialmente derivabile nel campo connesso A . Se $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A, f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots = f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, allora $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \text{cost}$, cioè f è costante in A .

Dimostrazione. Presi i punti $P(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A, Q(b_1, b_2, \dots, b_n) \in A$, consideriamo il segmento $\overline{PQ}$, le cui equazioni parametriche sono:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a_1 + (b_1 - a_1)t \\x_2(t) &= a_2 + (b_2 - a_2)t \\&\dots \\x_n(t) &= a_n + (b_n - a_n)t,\end{aligned}$$

con $t \in [0, 1]$. Resta così definita la funzione composta:

$$F(t) = f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \quad (1.126)$$

$F(t)$ è il generico valore assunto da f sul segmento $\overline{PQ}$. Per il teorema sulla derivazione delle funzioni composte:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(b_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(b_n - a_n) = 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

giacchè le $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ sono identicamente nulle per ipotesi. Quindi:

$$F(t) = \text{costante in } [0, 1] \implies f \text{ è costante su } \overline{PQ}$$

Ora se prendiamo arbitrariamente i punti P, Q in A , in forza della connessione di quest'ultimo possiamo comunque congiungerli con una poligonale $\gamma = \overline{PP_1} \cup \overline{P_1P_2} \cup \dots \cup \overline{P_rQ}$, e poichè f è costante su $\overline{PP_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_rQ}$:

$$\begin{aligned}f(P) &= f(P_1), f(P_1) = f(P_2), \dots, f(P_r) = f(Q) \implies \forall P, Q \in A, f(P) = f(Q) \\&\implies f(P) = \text{costante in } A\end{aligned}$$

■

Osservazione 124 *Il teorema sussiste anche se f è definita in un dominio D internamente connesso, anzichè su un campo. In tal caso, f è costante in $\dot{D}$.*

Osservazione 125 *Il teorema non è vero se f è definita in un campo non connesso o in un dominio non internamente connesso. Ad esempio, sia*

$$f(P) = \begin{cases} C_1, & \text{se } P \in A_1 \\ C_2, & \text{se } P \in A_2 \end{cases},$$

essendo A_1, A_2 campi disgiunti di $\mathbb{R}^n$, per cui f è definita nel campo non connesso $A = A_1 \cup A_2$. Risulta $f_{x_k}(P) \equiv 0, \forall k$, ma f non è costante in A se $C_1 \neq C_2$.

1.11 Derivata secondo una direzione

Sia A un campo di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 126 *Un campo vettoriale su A è la funzione vettoriale:*

$$\begin{aligned}\mathbf{F} : A &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in A\end{aligned} \quad (1.127)$$

Il campo vettoriale (1.127) associa ad ogni punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$, il vettore $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, che si chiama **vettore applicato** nel punto $\mathbf{x}$.

Definizione 127 Assegnata la funzione parzialmente derivabile:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longrightarrow f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in A \end{aligned} \quad (1.128)$$

il **gradiente** di f è il campo vettoriale:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \quad (1.129)$$

che associa ad ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ il vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n$. La funzione f è denominata **campo scalare**.

Osservazione 128 Il gradiente di un campo scalare f è spesso indicato con il simbolo $\text{grad } f$. Nella notazione (1.129) abbiamo utilizzato l'operatore differenziale (vettoriale) “nabla”:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (1.130)$$

Ciò premesso, consideriamo - senza perdita di generalità - una funzione reale $f(x, y, z)$ definita in un campo $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia n una retta orientata passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in A$. Dalla geometria analitica sappiamo che le equazioni parametriche di n sono:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda\rho \\ y &= y_0 + \mu\rho \\ z &= z_0 + \nu\rho, \end{aligned} \quad (1.131)$$

essendo $\rho \in \mathbb{R}$ il parametro della rappresentazione (1.131), e (λ, μ, ν) i coseni direttori di n . Ricordiamo che

$$\lambda = \cos \alpha, \quad \mu = \cos \beta, \quad \nu = \cos \gamma,$$

dove α, β, γ sono gli angoli che la retta orientata forma con gli assi coordinati e si identificano con le componenti del versore di n ; se $\mathbf{v}$ è un qualunque vettore parallelo e concorde a n

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

(qui $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono i versori degli assi coordinati), la terna (l, m, n) definisce i numeri direttori di n . Quindi:

$$\mathbf{n} = \text{vers } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) \quad (1.132)$$

Cioè:

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \mu = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \nu = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Dalle (1.131)

$$\forall P \in n, \quad P(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho), \quad \text{con } |\rho| = |P_0P|,$$

essendo $|P_0P|$ la *misura assoluta* del segmento orientato $\overline{P_0P}$. Inoltre $\rho > 0$ se il segmento orientato $\overline{P_0P}$ è concorde a n ; $\rho < 0$ se è discorde a n ; $\rho = 0$ se e solo se $P_0 \equiv P$.

Assegnato $I_\delta(P_0) \subset A$, $\forall |\rho| < \delta$, $P \in I_\delta(P_0)$

$$\begin{aligned} & \forall |\rho| \in (0, \delta), P \in I_\delta(P_0) \setminus \{P_0\} \\ \implies & \exists \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} = \frac{f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho} \end{aligned}$$

L'ultimo termine è un rapporto incrementale.

Definizione 129 $\exists \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho} \in \mathbb{R} \implies$
 $\implies \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{P_0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho}$, e tale limite si chiama **derivata della funzione f nel punto P_0 , secondo la direzione n** .

Se tale limite esiste in ogni punto $(x, y, z) \in A$:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda\rho, y + \mu\rho, z + \nu\rho) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho},$$

ed è la **derivata della funzione f secondo la direzione n** .

Teorema 130 Se $f \in C^1(A)$ con A campo di $\mathbb{R}^3$, per ogni retta orientata n , esiste $\frac{\partial f}{\partial n}$ ed è data da:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x} \lambda + \frac{\partial f}{\partial y} \mu + \frac{\partial f}{\partial z} \nu, \quad (1.133)$$

dove (λ, μ, ν) sono i coseni direttori di n .

Dimostrazione. Preso ad arbitrio $P_0(x_0, y_0, z_0) \in n$, le equazioni parametriche di n si scrivono:

$$x = x_0 + \lambda\rho, y = y_0 + \mu\rho, z = z_0 + \nu\rho$$

Abbiamo, dunque, la funzione composta:

$$F(\rho) = f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho),$$

Risulta:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{P_0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{F(\rho) - F(0)}{\rho} = F'(0)$$

Per il teorema 101:

$$\begin{aligned} F'(\rho) &= f_x(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho) \lambda \\ &+ f_y(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho) \mu \\ &+ f_z(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho) \nu, \end{aligned}$$

da cui:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \mu + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} \nu$$

In forza dell'arbitrarietà di $P_0 \in n$, l'equazione precedente si scrive:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x} \lambda + \frac{\partial f}{\partial y} \mu + \frac{\partial f}{\partial z} \nu$$

■

Si osservi che la (1.133) è un prodotto scalare. Infatti, assegnata la base ortonormale $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Tenendo conto della (1.132):

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (\nabla f) \cdot \mathbf{n} \quad (1.134)$$

Cioè la derivata secondo una direzione è la componente del gradiente di f nella direzione di derivazione.

Definizione 131 Sia $P_0(x_0, y_0, z_0) \in A$

$$\forall n, \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_{P_0} = 0 \implies (P_0 \text{ è un } \textbf{punto stazionario} \text{ di } f).$$

Osservazione 132 Dalla (1.134) segue che $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è stazionario se e solo se $\nabla f|_{P_0} = \mathbf{0}$.

Esempio 133 Determiniamo gli eventuali punti stazionari di $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$. Il gradiente di f è:

$$\nabla f = (2x + y - 4) \mathbf{i} + (x + 2y - 2) \mathbf{j}$$

Il versore di una qualunque retta orientata è

$$\mathbf{n} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j},$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e tali che $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (2x + y - 4) \lambda + (x + 2y - 2) \mu$$

Per definizione di punto stazionario:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{n}, \frac{\partial f}{\partial n} = 0 &\iff (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (2x + y - 4) \lambda + (x + 2y - 2) \mu = 0) \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}, \end{aligned}$$

che è un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$(x_0, y_0) = (2, 0) \quad (1.135)$$

Quindi la funzione assegnata ha l'unico punto stazionario $P_0(2, 0)$.

Alternativamente, l'insieme dei punti stazionari di $f(x, y)$ è l'insieme delle coppie ordinate (x, y) tali che $\nabla f = \mathbf{0}$, cioè $2x + y - 4 = x + 2y - 2 = 0$, da cui la soluzione (1.135).

1.11.1 Esecizi svolti

Esercizio 134 Determinare la derivata di $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$ secondo la direzione n che forma un angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ con l'asse x .

Soluzione. Il versore di $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j}$$

con

$$\lambda = \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\mu = \cos \beta = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donde:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

Il gradiente di f

$$\nabla f = 4x\mathbf{i} - 6y\mathbf{j}$$

Quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -2x - 3\sqrt{3}y$$

Ad esempio nel punto $P_0(1, 0)$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_{P_0} = -2$$

Esercizio 135 Determinare la derivata di $f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$ secondo la direzione n che forma un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ con l'asse x e nel punto $P_0(1, 2)$.

Soluzione. Il versore di $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j}$$

con

$$\lambda = \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\mu = \cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donde:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

Il gradiente di f

$$\nabla f = (2x - y)\mathbf{i} - (x + 4y)\mathbf{j}$$

La derivata secondo la direzione n :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) x - \left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{3} \right) y$$

Nel punto P_0 :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_{P_0} = -\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

Esercizio 136 Calcolare la derivata della funzione $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ nel punto $P_1(2, 1, 3)$ nella direzione che congiunge P_1 con il punto $P_2(5, 5, 15)$.

Soluzione. Se $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$, i numeri direttori della retta orientata per P_1 e P_2 nel verso in cui P_2 precede P_1 , sono:

$$\begin{aligned} l &= x_2 - x_1 = 3 \\ m &= y_2 - y_1 = 4 \\ n &= z_2 - z_1 = 12 \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k},$$

essendo $\mathbf{v}$ parallelo e concorde alla retta orientata n . I coseni direttori sono le componenti del versore di n :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{13} (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \quad (1.136)$$

Il gradiente di f

$$\nabla f = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (y + x)\mathbf{k}$$

La derivata nella direzione (1.136):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n} &= (\nabla f) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{13} [3(y + z) + 4(x + z) + 12(y + x)] \\ &= \frac{1}{13} (16x + 15y + 7z) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_{P_1} &= \frac{68}{13} \end{aligned}$$

Esercizio 137 Determinare gli eventuali punti stazionari di $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Soluzione. Il gradiente di f è:

$$\nabla f = 3(x^2 - y)\mathbf{i} + 3(y^2 - x)\mathbf{j}$$

Il versore di una qualunque retta orientata è

$$\mathbf{n} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}$$

donde:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 3(x^2 - y)\lambda + 3(y^2 - x)\mu$$

Per definizione di punto stazionario:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{n}, \left(\frac{\partial f}{\partial n} = 0 \right) &\iff (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, 3(x^2 - y)\lambda + 3(y^2 - x)\mu = 0) \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

Tale sistema ammette due soluzioni distinte:

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= (0, 0) \\ (x'_0, y'_0) &= (1, 1) \end{aligned}$$

Quindi la funzione assegnata ha due punti stazionari $P_0(0, 0)$, $P'_0(1, 1)$.

1.12 Differenziali totali successivi. L'operatore differenziale d

Sia $f \in C^2(A)$ essendo A un qualunque campo di $\mathbb{R}^n$. Il differenziale totale di f è:

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \quad (1.137)$$

df è noto anche come **differenziale totale primo** o **del primo ordine**.

Definizione 138 *Dicesi **differenziale totale del secondo ordine della funzione f** :*

$$d^2 f = d(df)$$

tale che

$$df \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{dx_1, dx_2, \dots, dx_n}_{\text{costanti}} \right)$$

In altri termini, il differenziale primo (1.137) risulta essere una funzione delle $2n$ variabili:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$$

Il differenziale totale secondo viene determinato applicando l'operatore d e ritenendo costanti i differenziali dx_k .

Dalla (1.137):

$$\begin{aligned} d^2 f &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial (df)}{\partial x_k} dx_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{h=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h \right) dx_k \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} dx_h dx_k \end{aligned}$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie:

$$d^2 f = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} dx_h dx_k \quad (1.138)$$

Il procedimento può essere iterato; se $f \in C^m(A)$ è possibile determinare il **differenziale totale di ordine m** :

$$d^m f = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_m}} dx_{k_1} dx_{k_2} \dots dx_{k_m} \quad (1.139)$$

Le equazioni (1.138)-(1.139) sono facilmente riprodotte utilizzando l'algebra operatoriale. Più precisamente definiamo un **operatore differenziale**:

$$d \doteq \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k \quad (1.140)$$

dove $\doteq$ sta per “rappresentato da”. L’operatore d operando su una funzione f :

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k,$$

che è il differenziale totale primo di f . Diremo che df è il risultato dell’applicazione dell’operatore d sulla funzione f . Si osservi che d è **lineare**

$$\forall f, g \in C^1(A), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$$

L’operatore di differenziazione totale del secondo ordine si ottiene prendendo il quadrato della (1.140):

$$d^2 \doteq \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k \right)^2$$

Quindi:

$$d^2 f = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k \right)^2 f$$

Ad esempio, nel caso di una funzione di due variabili $f(x, y)$:

$$d \doteq \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy,$$

onde:

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \end{aligned}$$

Passando al differenziale del second’ordine:

$$\begin{aligned} d^2 &\doteq \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

Nel caso generale, assegnata $f \in C^m(A)$:

$$\begin{aligned} d^m &\doteq \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k \right)^m \\ d^m f &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k \right)^m f \end{aligned}$$

Ad esempio:

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2 \quad (1.141)$$

Applicando l'operatore d definito dalla (1.140):

$$df = 2(x - 2y)dx - 2(2x - 5y)dy$$

Calcolando le derivate parziali seconde:

$$d^2f = 2dx^2 - 8dxdy + 10dy^2$$

Agli stessi risultati si perviene senza calcolare le derivate parziali, sfruttando la linearità dell'operatore d . Infatti applicando tale operatore ad ambo i membri della (1.141):

$$df = d(x^2) - 4d(xy) + 5d(y^2)$$

Tenendo conto del fatto che le regole di differenziazione non sono altro che le regole di derivazione:

$$\begin{aligned} df &= 2xdx - 4ydx - 4xdy + 10ydy \\ &= 2(x - 4y)dx - 2(2x - 5y)dy \end{aligned}$$

Applichiamo ora l'operatore d a primo e secondo membro di quest'ultima equazione, osservando che d non agisce su dx , dy :

$$\begin{aligned} d^2f &= d[(2x - 4y)dx + (-4x + 10y)dy] \\ &= d(2x - 4y)dx + d(-4x + 10y)dy \\ &= (2dx - 4dy)dx + (-4dx + 10dy)dy \\ &= 2dx^2 - 8dxdy + 10dy^2 \end{aligned}$$

Consideriamo la seguente applicazione utile per introdurre l'**operatore nabla** (eq. (1.130)), simbolicamente definito da:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \quad (1.142)$$

Tale operatore lineare applicato ad una qualunque funzione parzialmente derivabile $f(x, y, z)$ restituisce il campo vettoriale *gradiente di f* :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \quad (1.143)$$

Il **laplaciano** è un operatore differenziale simbolicamente definito da:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.144)$$

Tale operatore applicato ad una qualunque funzione parzialmente derivabile due volte $f(x, y, z)$ restituisce il campo scalare *laplaciano di f* :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.145)$$

Le suddette definizioni sono valide in un qualunque spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

Ciò premesso consideriamo l'equazione della trasmissione del calore:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{a^2} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.146)$$

essendo a una costante positiva. Verifichiamo che la seguente funzione

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}} \quad (1.147)$$

è una soluzione. Qui x_0, y_0, z_0 definiscono le coordinate cartesiane di un punto assegnato dello spazio fisico $\mathbb{R}^3$. Si osservi che la (1.147) è una funzione di $n = 4$ variabili:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

essendo:

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty, t \neq 0\}$$

Tuttavia per interpretare fisicamente la (1.147) si considera t alla stregua di un parametro, tracciando poi il grafico di f per assegnati valori di t .

Calcoliamo le derivate.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x - x_0}{2a^2 (2a\sqrt{\pi t})^3 t} g(x, y, z, t),$$

dove:

$$g(x, y, z, t) = e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}$$

La derivata parziale seconda rispetto a x :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(x - x_0)^2 - 2a^2 t}{4a^4 (2a\sqrt{\pi t})^3 t} g(x, y, z, t) \quad (1.148)$$

Le derivate $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ si ottengono permutando ciclicamente le x, y, z nella (1.148). Sommando:

$$\nabla^2 f = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - 6a^2 t}{4a^4 (2a\sqrt{\pi t})^3 t} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}}$$

La derivata parziale rispetto al tempo è:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - 6a^2 t}{4a^2 (2a\sqrt{\pi t})^3 t} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}},$$

da cui la (1.146). Osserviamo che assegnata la sfera Σ di centro (x_0, y_0, z_0) e raggio R :

$$\Sigma) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

risulta:

$$\forall P \in \Sigma, f(P, t) = g(t),$$

essendo

$$g(t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{R^2}{4a^2 t}}$$

In altri termini, i valori assunti su una qualunque sfera centrata in $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dalla soluzione (1.147), dipendono solo dal tempo t . Quindi la (1.147) rappresenta la propagazione di un'onda sferica. Consideriamo il caso speciale:

$$f(x, y, 0, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2 t}},$$

avendo posto l'origine del sistema di coordinate nel punto P_0 . Per un istante assegnato t_1 :

$$f(x, y, 0, t_1) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t_1})^3} e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2 t_1}} \quad (1.149)$$

Il grafico della funzione (1.149) delle variabili x, y è riportato in fig. 1.50. Le curve di livello sono circonferenze concentriche nell'origine:

$$e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2 t}} = \text{const},$$

da cui:

$$x^2 + y^2 = C$$

Le curve di livello sono rappresentate in fig. 1.51

1.12.1 Esercizi

Esercizio 139 Sia $f(u, v)$ una funzione continua nel campo $B \subseteq \mathbb{R}^2$ assieme alle derivate parziali del second'ordine. Si consideri la funzione composta:

$$F(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)],$$

definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$ con

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = xy$$

Determinare le derivate $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

Soluzione.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y \frac{\partial f}{\partial u} + x \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial}{\partial x} f_u[u(x, y), v(x, y)] + y \frac{\partial}{\partial x} f_v[u(x, y), v(x, y)] \\ &= 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \left(2x \frac{\partial f_u}{\partial u} + y \frac{\partial f_u}{\partial v} \right) + y \left(2x \frac{\partial f_v}{\partial u} + y \frac{\partial f_v}{\partial v} \right) \\ &= 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{aligned}$$

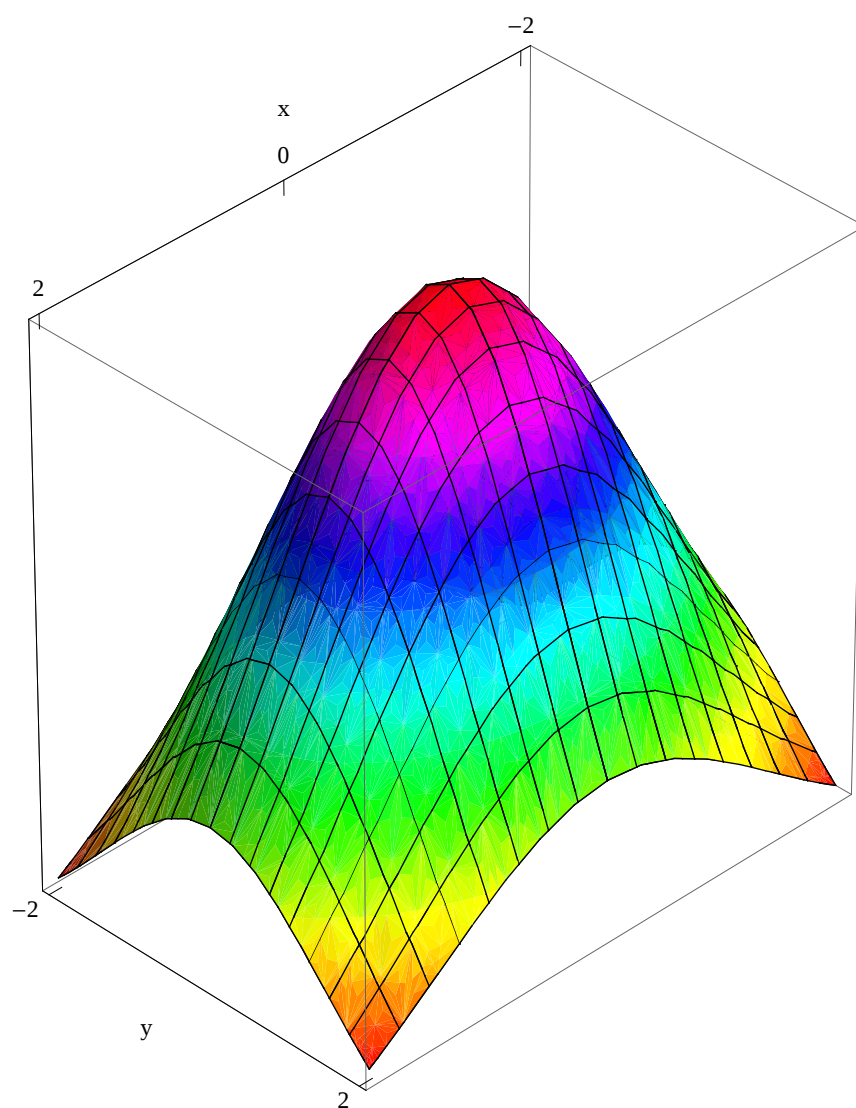


Figura 1.50: Grafico di $f(x, y, 0, t_1) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t_1})^3} e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2 t_1}}$

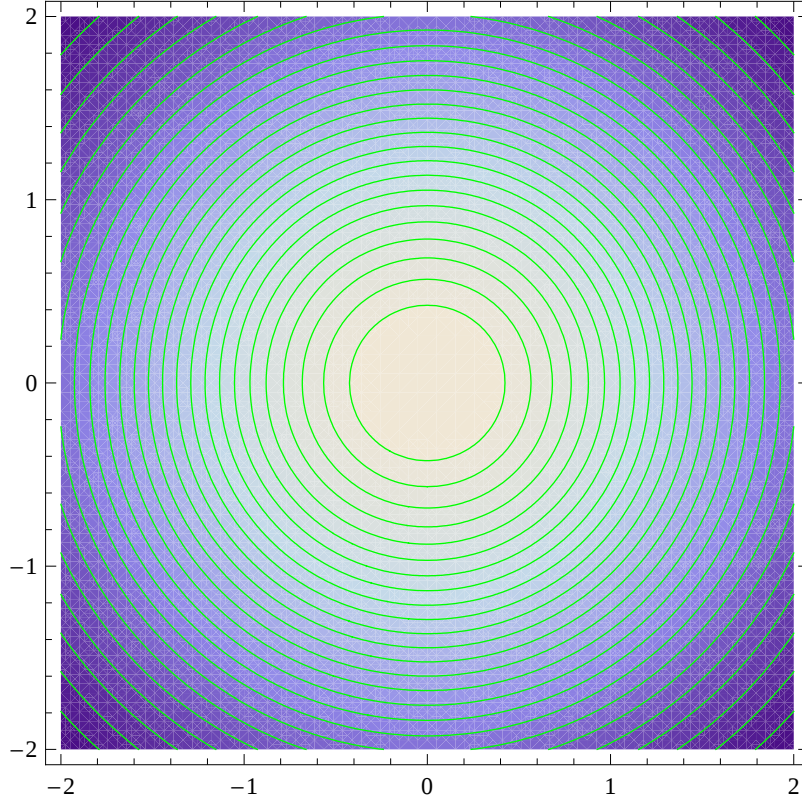


Figura 1.51: Curve di livello di $f(x, y, 0, t_1) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t_1})^3} e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}}$

Per il teorema di Schwarz è $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$, quindi:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

La derivata mista F_{xy} :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(2x \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} \right),$$

da cui:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2(x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

La derivata mista F_{yx} :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2y \frac{\partial f}{\partial u} + x \frac{\partial f}{\partial v} \right),$$

da cui:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2(x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Quindi:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

La derivata seconda F_{yy} :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial}{\partial y} f_u[u(x, y), v(x, y)] + x \frac{\partial}{\partial y} f_v[u(x, y), v(x, y)],$$

da cui:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} + 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Esercizio 140 Sia $f(x, y, z)$ una funzione continua nel campo $A \subseteq \mathbb{R}^3$ assieme alle derivate parziali del second'ordine. Si consideri la funzione composta:

$$F(x, y) = f[x, y, \varphi(x, y)],$$

definita in $B \subseteq \mathbb{R}^2$ con $\varphi(x, y)$ ivi continua assieme alle derivate parziali del second'ordine.

Determinare le derivate $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

Soluzione.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

La derivata seconda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \{f_x[x, y, \varphi(x, y)] + f_z[x, y, \varphi(x, y)] \varphi_x(x, y)\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f_x[x, y, \varphi(x, y)] + \frac{\partial}{\partial x} \{f_z[x, y, \varphi(x, y)] \varphi_x(x, y)\} \end{aligned} \quad (1.150)$$

Determiniamo separatamente i due termini a secondo membro.

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x[x, y, \varphi(x, y)] = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.151)$$

Cioè:

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x[x, y, \varphi(x, y)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.152)$$

Il secondo termine è:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{f_z[x, y, \varphi(x, y)] \varphi_x(x, y)\} &= \varphi_x(x, y) \frac{\partial}{\partial x} f_z[x, y, \varphi(x, y)] + f_z[x, y, \varphi(x, y)] \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ &= \varphi_x(x, y) \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + f_z[x, y, \varphi(x, y)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{f_z[x, y, \varphi(x, y)] \varphi_x(x, y)\} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (1.153)$$

Sostituendo le (1.152)-(1.153) nella (1.150) e tenendo conto del teorema di Schwarz secondo cui $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (1.154)$$

Passiamo alla derivata parziale seconda rispetto a y . La derivata prima è:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \{f_y[x, y, \varphi(x, y)] + f_z[x, y, \varphi(x, y)] \varphi_y(x, y)\} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} f_y[x, y, \varphi(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} \{f_y[x, y, \varphi(x, y)] \varphi_y(x, y)\}\end{aligned}\quad (1.155)$$

Determiniamo separatamente i due termini a secondo membro.

$$\frac{\partial}{\partial y} f_y[x, y, \varphi(x, y)] = \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.156)$$

Cioè:

$$\frac{\partial}{\partial y} f_y[x, y, \varphi(x, y)] = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.157)$$

Il secondo termine è:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \{f_z[x, y, \varphi(x, y)] \varphi_y(x, y)\} &= \varphi_y(x, y) \frac{\partial}{\partial y} f_z[x, y, \varphi(x, y)] + f_z[x, y, \varphi(x, y)] \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ &= \varphi_y(x, y) \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + f_z[x, y, \varphi(x, y)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{\partial}{\partial y} \{f_z[x, y, \varphi(x, y)] \varphi_y(x, y)\} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (1.158)$$

Sostituendo le (1.157)-(1.158) nella (1.155) e tenendo conto del teorema di Schwarz secondo cui $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (1.159)$$

Esercizio 141 Verificare che la funzione:

$$f(x, t) = A \sin(c\lambda t + \phi) \sin(\lambda x),$$

è una soluzione dell'equazione differenziale di d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\lambda^2 f(x, t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -c^2 \lambda^2 f(x, t),\end{aligned}$$

onde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\lambda^2 f(x, t) + \lambda^2 f(x, t) = 0$$

Esercizio 142 (n. 1912). Mostrare che per ogni $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili due volte, la funzione

$$f(x, y) = \phi(xy) + \sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.160)$$

soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (1.161)$$

Soluzione.

Poniamo:

$$u(x, y) = xy, \quad v(x, y) = \frac{y}{x}, \quad (1.162)$$

per cui la (1.160) è la funzione composta:

$$f(x, y) = \phi[u(x, y)] + \sqrt{xy}\psi[v(x, y)] \quad (1.163)$$

Quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \psi(v) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{xy} + \sqrt{xy} \psi'(v) \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.164)$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{xy} &= \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \end{aligned}$$

Sostituendo nella (1.164), otteniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\phi'(u) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \psi(v) - \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} \psi'(v) \quad (1.165)$$

Verifichiamo la (1.165) per

$$\phi(xy) = \ln(xy), \quad \psi\left(\frac{y}{x}\right) = \sin\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1.166)$$

cosicchè:

$$\begin{aligned} \phi(u) = \ln u &\implies \begin{cases} \phi'(u) = \frac{1}{u} \\ \phi''(u) = -\frac{1}{u^2} \end{cases} \\ \psi(v) = \sin v &\implies \begin{cases} \psi'(v) = \cos v \\ \psi''(v) = -\sin v \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre:

$$f(x, y) = \ln(xy) + \sqrt{xy} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.167)$$

Dalla (1.165):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y}{u} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \sin v - \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} \cos v \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (1.168)$$

Derivando la (1.168):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{xy} + \frac{y}{2\sqrt{xy}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{xy} \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

Cioè la (1.168). Determiniamo la derivata seconda rispetto a x . Applicando a primo e secondo membro della (1.165) l'operatore $\frac{\partial}{\partial x}$ e tenendo conto del teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y\phi''(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\psi(v) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \psi'(v) \frac{\partial v}{\partial x} \\ &\quad - \psi'(v) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} \psi'(v) \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.169)$$

Calcoliamo i termini a secondo membro:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{y}{x}} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x^3}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \psi'(v) \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \psi'(v) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{y^3}{x^5}} \psi'(v) \\ \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{y^3}{x^5}} \\ \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} \psi''(v) \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} \psi''(v) = -\sqrt{\frac{y^5}{x^7}} \psi''(v), \end{aligned}$$

che sostituiti nella (1.169):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\phi''(u) - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{y}{x^3}} \psi(v) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y^3}{x^5}} \psi'(v) + \sqrt{\frac{y^5}{x^7}} \psi''(v) \quad (1.170)$$

Verifichiamo tale risultato nel caso (1.166). Utilizzando la (1.170):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{y^2}{u^2} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{y}{x^3}} \sin v + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x^5}} \cos v - \sqrt{\frac{y^5}{x^7}} \sin v \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{y}{x^3}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x^5}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \sqrt{\frac{y^5}{x^7}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (1.171)$$

Derivando rispetto a x la (1.168):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{\frac{y}{x}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right] \\
 &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right] \\
 &\quad - \left[\frac{3}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cos\left(\frac{y}{x}\right) + (-1) \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \right] \\
 &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x^3}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \sqrt{\frac{y^3}{x^5}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right] \\
 &\quad - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{y^3}{x^5}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{\frac{y^5}{x^7}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \\
 &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{y}{x^3}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y^3}{x^5}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{y^3}{x^5}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \sqrt{\frac{y^5}{x^7}} \sin\left(\frac{y}{x}\right)
 \end{aligned}$$

Cioè la (1.171). Passiamo alla derivata rispetto a y .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} + \psi(v) \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{xy} + \sqrt{xy} \psi'(v) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.172)$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{xy} &= \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} \\
 \sqrt{xy} \frac{\partial v}{\partial y} &= \sqrt{\frac{y}{x}}
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\phi'(u) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} \psi(v) + \sqrt{\frac{y}{x}} \psi'(v) \quad (1.173)$$

Verifichiamo tale risultato nel caso (1.166). Utilizzando la (1.173):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial y} &= x \cdot \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} \sin v + \sqrt{\frac{y}{x}} \cos v \\
 &= \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{\frac{y}{x}} \cos\left(\frac{y}{x}\right)
 \end{aligned}$$

Derivando rispetto a y la (1.167):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \sqrt{\frac{y}{x}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.174)$$

Cioè l'espressione precedente. Determiniamo la derivata seconda applicando l'operatore $\frac{\partial}{\partial y}$ a primo e secondo membro della (1.173):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x\phi''(u) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\psi(v) \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\psi'(v) \frac{\partial v}{\partial y} \\ &\quad + \psi'(v) \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\psi''(v) \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.175)$$

Calcoliamo i singoli termini:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{x}{y}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y^3}} \Rightarrow \frac{1}{2}\psi(v) \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{x}{y}} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\psi(v) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\psi'(v) \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\psi'(v) \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\psi'(v) \\ \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{1}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow \psi'(v) \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\psi'(v) \\ \sqrt{\frac{y}{x}}\psi''(v) \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{x}\sqrt{\frac{y}{x}}\psi''(v) = \sqrt{\frac{y}{x^3}}\psi''(v) \end{aligned}$$

Sostituendo nella (1.175):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2\phi''(u) - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\psi(v) + \frac{1}{\sqrt{xy}}\psi'(v) + \sqrt{\frac{y}{x^3}}\psi''(v) \quad (1.176)$$

Al solito, verifichiamo tale risultato nel caso (1.166). Utilizzando la (1.176):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{xy}}\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \sqrt{\frac{y}{x^3}}\sin\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.177)$$

Derivando rispetto a y la (1.174):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} \left[\sqrt{\frac{x}{y}}\sin\left(\frac{y}{x}\right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sqrt{\frac{y}{x}}\cos\left(\frac{y}{x}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{y^2} + \left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{xy}}\cos\left(\frac{y}{x}\right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{xy}}\cos\left(\frac{y}{x}\right) - \sqrt{\frac{y}{x^3}}\sin\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

cioè la (1.177). A questo punto, determiniamo $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, utilizzando le (1.170)-(1.176):

$$\begin{aligned} x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2y^2\phi''(u) - \frac{1}{4}x^2\sqrt{\frac{y}{x^3}}\psi(v) + \frac{1}{2}x^2\sqrt{\frac{y^3}{x^5}}\psi'(v) + \\ &\quad + x^2\sqrt{\frac{y^5}{x^7}}\psi''(v) - x^2y^2\phi''(u) + \frac{1}{4}y^2\sqrt{\frac{x}{y^3}}\psi(v) - \\ &\quad - y^2\frac{1}{\sqrt{xy}}\psi'(v) - y^2\sqrt{\frac{y}{x}}\psi''(v) = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 143 (n. 1911). Mostrare che per ogni $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili due volte, la funzione

$$f(x, y) = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.178)$$

è una soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (1.179)$$

Soluzione. Poniamo:

$$u(x, y) = \frac{y}{x},$$

per cui:

$$f(x, y) = x\phi[u(x, y)] + \psi[u(x, y)] \quad (1.180)$$

Pertanto, la derivata parziale rispetto a x è:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \phi(u) + x\phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \psi'(u) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Tenendo conto che $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, l'espressione precedente diventa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \phi(u) - \frac{y}{x}\phi'(u) - \frac{y}{x^2}\psi'(u) \quad (1.181)$$

Applicando a primo e secondo membro l'operatore $\frac{\partial}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y}{x}\phi'(u) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y}{x^2}\psi'(u) \right] \quad (1.182)$$

Le derivate a secondo membro si calcolano facilmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y}{x^2}\psi'(u) \right] &= \frac{y}{x} \frac{\partial}{\partial x} \psi'(u) - \psi'(u) \frac{y}{x^2} = -\frac{y^2}{x^3}\psi''(u) - \frac{y}{x^2}\psi'(u) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y}{x^2}\psi'(u) \right] &= \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \psi'(u) + \psi'(u) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2} \right) \\ &= -\frac{y^2}{x^4}\psi''(u) - 2\frac{y}{x^3}\psi'(u), \end{aligned}$$

che sostituite nella (1.182):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y}{x^3}\phi''(u) + \frac{y^2}{x^4}\psi''(u) + 2\frac{y}{x^3}\psi'(u) \quad (1.183)$$

Determiniamo la derivata parziale rispetto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = x\phi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} + \psi'(u) \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ma $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}$, per cui:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \phi'(u) + \frac{1}{x}\psi'(u) \quad (1.184)$$

La derivata parziale seconda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \phi'(u) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{x} \psi'(u) \right] \\ &= \phi''(u) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{x} \psi'(u) \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x} \phi''(u) + \frac{1}{x^2} \psi''(u) \quad (1.185)$$

La derivata mista:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\phi'(u) + \frac{1}{x} \psi'(u) \right] \\ &= \phi''(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x} \psi'(u) \right] \\ &= -\frac{y}{x^2} \phi''(u) - \frac{1}{x^2} \psi'(u) + \frac{1}{x} \psi''(u) \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2} \phi''(u) - \frac{1}{x^2} \psi'(u) - \frac{y}{x^3} \psi''(u) \quad (1.186)$$

Risulta:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Esercizio 144 (n. 1913). Mostrare che per ogni $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, la funzione

$$f(x, y) = g[x + \phi(y)] \quad (1.187)$$

soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (1.188)$$

Soluzione. Per il calcolo delle derivate parziali poniamo:

$$u(x, y) = x + \phi(y), \quad (1.189)$$

per cui la (1.187) è la funzione composta:

$$f(x, y) = g[u(x, y)]$$

Le derivate parziali del primo ordine sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g'(u) \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dalla (1.189):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \phi'(y)$$

Quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(u), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \phi'(y) g'(u)$$

La derivata parziale seconda rispetto a x :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} g'[u(x, y)] = g''(u) \frac{\partial u}{\partial x} = g''(u)$$

La derivata mista:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} g'[u(x, y)] = g''(u) \frac{\partial u}{\partial y}$$

Cioè:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = g''(u) \phi'(y)$$

Sostituendo le espressioni trovate in $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ si ottiene la (1.188).

Esercizio 145 (n. 1914). Trovare la più generale funzione $f(x, y)$ soluzione dell'equazione differenziale del second'ordine alle derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Soluzione.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} = \phi'(y) \implies f(x, y) = \int \phi'(y) dx = \phi(y) + C,$$

essendo C una costante di integrazione che in generale dipenderà da y , donde $C \equiv \psi(y)$.

Quindi:

$$f(x, y) = \phi(y) + \psi(y)$$

Esercizio 146 (n. 1915). Trovare la più generale funzione $f(x, y)$ soluzione dell'equazione differenziale del second'ordine alle derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Soluzione.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} = \phi(y) \implies f(x, y) = \phi(y) \int dx = x\phi(y) + C,$$

essendo C una costante di integrazione che in generale dipenderà da y , donde $C \equiv \psi(y)$.

Quindi:

$$f(x, y) = x\phi(y) + \psi(y)$$

Esercizio 147 (n. 1906). Mostrare che la funzione

$$f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

soddisfa l'equazione di Laplace (in 2 dim.) $\nabla^2 f = 0$.

Soluzione. L'equazione di Laplace in 2 dim si scrive:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (1.190)$$

Calcoliamo, quindi, le derivate parziali di f .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

da cui la (1.190).

Esercizio 148 Determinare il differenziale totale del terzo ordine della funzione:

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

Soluzione. Il differenziale totale del primo ordine è:

$$df = e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$$

Quindi:

$$d^2 f = d(e^x \cos y) dx - d(e^x \sin y) dy$$

Risulta:

$$\begin{aligned} d(e^x \cos y) &= e^x \cos y dx - e^x \sin y dy \\ d(e^x \sin y) &= e^x \sin y dx - e^x \cos y dy \end{aligned}$$

Sostituendo nella precedente:

$$d^2 f = e^x \cos y dx^2 - 2e^x \sin y dx dy - e^x \cos y dy^2$$

Il differenziale totale del terzo ordine:

$$\begin{aligned} d^3 f &= d(e^x \cos y) dx^2 - 2d(e^x \sin y) dx dy - d(e^x \cos y) dy^2 \\ &= e^x (\cos y dx^3 - 3 \sin y dx^2 dy - \cos y dx dy^2 + \sin y dy^3) \end{aligned}$$

1.13 Formula di Taylor

Senza perdita di generalità riferiamoci ad una funzione di due variabili $f(x, y)$ tale che $f \in C^{m+1}(A)$ essendo A un campo di $\mathbb{R}^2$. Preso $P_0(x_0, y_0) \in A$, sia $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in A$ tale che $\overline{P_0 P} \subset A$. Un qualunque punto $Q \in \overline{P_0 P}$ ha coordinate $(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$ con $t \in [0, 1]$. Resta poi definita la funzione composta:

$$F(t) = f[u(t), v(t)], \quad \text{per } t \in [0, 1], \quad (1.191)$$

essendo $u(t) = x_0 + t\Delta x$, $v(t) = y_0 + t\Delta y$.

Per la formula di Mac Laurin:

$$F(1) = \sum_{k=0}^m \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + R_m \quad (1.192)$$

Nella (1.192) R_m è il resto, la cui espressione è:

$$R_m = \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}, \quad \text{con } \theta \in (0, 1) \quad (1.193)$$

Ora esplicitiamo attraverso la (1.191) i vari termini che compaiono nella (1.192):

$$F(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \quad (1.194)$$

$$F(0) = f(x_0, y_0) \quad (1.195)$$

Per i termini di ordine superiore applichiamo il teorema sulla derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta y \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= f_x(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \end{aligned}$$

Quindi:

$$F'(t) = f_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \Delta x + f_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \Delta y$$

e nel punto $t = 0$:

$$F'(0) = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y = df(x_0, y_0)$$

La derivata seconda:

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{\partial}{\partial u} [f_u(u, v)] \Delta x^2 + \frac{\partial}{\partial v} [f_u(u, v)] \Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial u} [f_v(u, v)] \Delta y \Delta x + \frac{\partial}{\partial v} [f_v(u, v)] \Delta y^2 \\ &= f_{xx}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \Delta x^2 + \\ &\quad + 2f_{xy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \Delta x \Delta y + f_{yy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \Delta y^2 \end{aligned}$$

Nel punto $t = 0$:

$$F''(0) = f_{xx}(x_0, y_0) \Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) \Delta x \Delta y + f_{yy}(x_0, y_0) \Delta y^2 = d^2 f(x_0, y_0)$$

Iterando il procedimento:

$$F^{(m)}(0) = d^m f(x_0, y_0)$$

Per il resto:

$$R_m = \left[\frac{d^{m+1} f}{(m+1)!} \right]_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x \\ y=y_0+\theta\Delta y}} \quad \text{con } \theta \in (0, 1)$$

Quindi:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sum_{k=0}^m \frac{d^k f(x_0, y_0)}{k!} + \left[\frac{d^{m+1} f}{(m+1)!} \right]_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x \\ y=y_0+\theta\Delta y}} \quad (1.196)$$

La (1.196) è la **formula di Taylor** per le funzioni di due variabili, immediatamente generalizzabile alle funzioni di n variabili. Ricordando l'espressione simbolica del differenziale di ordine k e ponendo $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$, la formula di Taylor si scrive:

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_0, y_0) + \\ + \frac{1}{(m+1)!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \end{aligned} \quad (1.197)$$

Si noti che il primo e secondo termine del secondo membro della (1.197) compongono un polinomio di grado m . Pertanto tale polinomio approssima la funzione $f(x, y)$ a meno dell'errore misurato dal resto R_m .

Ponendo nella (1.196) o nella (1.197) $(x_0, y_0) = (0, 0)$ si ottiene la **formula di Mac Laurin** per le funzioni di due variabili.

Esempio 149 Assegnata la funzione:

$$f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy,$$

determiniamo attraverso la formula di Taylor l'incremento Δf quando si passa dal punto $P_0(1, 2)$ al punto $P(1 + \Delta x, 2 + \Delta y)$.

Scriviamo:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(1 + \Delta x, 2 + \Delta y) - f(1, 2) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{array}{ll}
 f_x(x, y) = 3x^2 + 3y & f_x(1, 2) = 9 \\
 f_y(x, y) = -6y^2 + 3x & f_y(1, 2) = -21 \\
 f_{xx}(x, y) = 6x & f_{xx}(1, 2) = 6 \\
 f_{xy}(x, y) = 3 & f_{xy}(1, 2) = 3 \\
 f_{yy}(x, y) = -12y & f_{yy}(1, 2) = -24 \\
 f_{xxx}(x, y) = 6 & f_{xxx}(1, 2) = 6 \\
 f_{xxy}(x, y) = 0 & f_{xxy}(1, 2) = 0 \\
 f_{xyy}(x, y) = 0 & f_{xyy}(1, 2) = 0 \\
 f_{yyy}(x, y) = -12 & f_{yyy}(1, 2) = -12
 \end{array}$$

Si osservi che $\forall m > 3$ le derivate parziali di ordine m sono nulle, per cui:

$$\Delta f = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(x_0, y_0),$$

essendo $R_4 = 0$. Esplicitando si ottiene:

$$\Delta f = 9\Delta x - 21\Delta y + 3\Delta x^2 + 3\Delta x\Delta y - 12\Delta y^2 + \Delta x^3 - 2\Delta y^3$$

Osserviamo che essendo R_4 , tale espressione di Δf è esatta. Ciò perchè $f(x, y)$ è un polinomio, per cui la formula di Taylor riproduce l'espressione esatta.

Esercizio 150 Sviluppare la funzione

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

secondo la formula di MacLaurin fino ai termini del terzo ordine.

Solution 151

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(0, 0) + R_3$$

Calcolo delle derivate:

$$\begin{array}{ll}
 f_x(x, y) = e^x \sin y & f_x(0, 0) = 0 \\
 f_y(x, y) = e^x \cos y & f_y(0, 0) = 1 \\
 f_{xx}(x, y) = e^x \sin y & f_{xx}(0, 0) = 0 \\
 f_{xy}(x, y) = e^x \cos y & f_{xy}(0, 0) = 1 \\
 f_{yy}(x, y) = -e^x \sin y & f_{yy}(0, 0) = 0 \\
 f_{xxx}(x, y) = e^x \sin y & f_{xxx}(0, 0) = 0 \\
 f_{xxy}(x, y) = e^x \cos y & f_{xxy}(0, 0) = 1 \\
 f_{xyy}(x, y) = -e^x \sin y & f_{xyy}(0, 0) = 0 \\
 f_{yyy}(x, y) = -e^x \cos y & f_{yyy}(0, 0) = -1
 \end{array}$$

Quindi:

$$f(x, y) = y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + R_3$$

Esercizio 152 Sviluppare la funzione

$$f(x, y) = \cos x \cos y$$

secondo la formula di MacLaurin fino ai termini del quarto ordine.

Solution 153

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(0, 0) + R_4$$

Calcolando le derivate:

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{24}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + R_4$$

Esercizio 154 Scrivere l'espressione approssimata fino ai termini del secondo ordine in α e β per l'espressione:

$$\arctan \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \beta} \right),$$

per valori di α, β tali che $|\alpha|, |\beta| < 1$.

Solution 155 Poniamo:

$$f(\alpha, \beta) = \arctan \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \beta} \right)$$

Lo sviluppo di MacLaurin fino al termine del secondo ordine è:

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= f(0, 0) + [\alpha f_\alpha(0, 0) + \beta f_\beta(0, 0)] + \\ &+ \frac{1}{2} [\alpha^2 f_{\alpha\alpha}(0, 0) + 2\alpha\beta f_{\alpha\beta}(0, 0) + \beta^2 f_{\beta\beta}(0, 0)] + R_4 \end{aligned}$$

Quindi se trascuriamo i termini di ordine superiore al secondo:

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &\simeq f(0, 0) + [\alpha f_\alpha(0, 0) + \beta f_\beta(0, 0)] + \\ &+ \frac{1}{2} [\alpha^2 f_{\alpha\alpha}(0, 0) + 2\alpha\beta f_{\alpha\beta}(0, 0) + \beta^2 f_{\beta\beta}(0, 0)] \end{aligned}$$

Calcolo delle derivate:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\alpha, \beta) &= \frac{1-\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha-\beta) + 2} & f_\alpha(0, 0) &= \frac{1}{2} \\ f_\beta(\alpha, \beta) &= \frac{1+\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha-\beta) + 2} & f_\beta(0, 0) &= \frac{1}{2} \\ f_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) &= \frac{2(\beta-1)(\alpha+1)}{\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha-\beta) + 2} & f_{\alpha\alpha}(0, 0) &= -\frac{1}{2} \\ f_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) &= \frac{-\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta}{[\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha-\beta) + 2]^2} & f_{\alpha\beta}(0, 0) &= 0 \\ f_{\beta\beta}(\alpha, \beta) &= \frac{2(\beta-1)(\alpha+1)}{[\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha-\beta) + 2]^2} & f_{\beta\beta}(0, 0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\forall |\alpha|, |\beta| \in (0, 1), \quad \arctan \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \beta} \right) \simeq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$$

In altri termini, in un intorno “sufficientemente piccolo” del punto $(0, 0)$ la funzione $f(\alpha, \beta)$ è approssimata dal polinomio di secondo grado $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$.

Esercizio 156 Stessa questione dell'esercizio precedente per l'espressione:

$$\sqrt{\frac{(1 + \alpha)^m + (1 + \beta)^n}{2}}$$

Solution 157 Poniamo:

$$f(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}}$$

Per $|\alpha|, |\beta| < 1$

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &\simeq f(0, 0) + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_{(0,0)} + \beta \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)_{(0,0)} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right)_{(0,0)} + 2\alpha\beta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \right)_{(0,0)} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right)_{(0,0)} \right] \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= \frac{m(1+\alpha)^{m-1}}{4f(\alpha, \beta)} \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_{(0,0)} = \frac{m}{4} \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} &= \frac{n(1+\beta)^{n-1}}{4f(\alpha, \beta)} \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \right)_{(0,0)} = \frac{n}{4} \end{aligned}$$

La derivata seconda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} &= \frac{m}{4} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{(1+\alpha)^{m-1}}{f(\alpha, \beta)} \right] \\ &= \frac{m}{4} \frac{4(m-1)(1+\alpha)^{m-2} f^2(\alpha, \beta) - m(1+\alpha)^{2(m-1)}}{4f^3(\alpha, \beta)} \\ &= \frac{m}{16} (1+\alpha)^{m-2} \frac{4(m-1)f^2(\alpha, \beta) - m(1+\alpha)^m}{f^3(\alpha, \beta)} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right)_{(0,0)} &= \frac{m}{16} (3m-4) \end{aligned}$$

La derivata seconda rispetto a β :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} &= \frac{n}{4} \frac{4(n-1)(1+\beta)^{n-2} f^2(\alpha, \beta) - n(1+\beta)^{2(n-1)}}{4f^3(\alpha, \beta)} \\ &= \frac{n}{16} (1+\beta)^{n-2} \frac{4(n-1)f^2(\alpha, \beta) - n(1+\beta)^n}{f^3(\alpha, \beta)} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right)_{(0,0)} &= \frac{n}{16} (3n-4) \end{aligned}$$

La derivata mista:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{m(1+\alpha)^{m-1}}{4f(\alpha, \beta)} \right] \\ &= -\frac{mn(1+\alpha)^{m-1}(1+\beta)^{n-1}}{16f^3(\alpha, \beta)} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \right)_{(0,0)} &= -\frac{mn}{16} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \forall |\alpha|, |\beta| \in (0, 1), \sqrt{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}} &\simeq \\ &\simeq 1 + \frac{1}{4}(m\alpha + n\beta) + \frac{1}{32}[\alpha^2 m(3m-4) - 2\alpha\beta mn + \beta^2 n(3n-4)] \end{aligned}$$

Esercizio 158 Sviluppare la funzione

$$f(x, y) = y^x$$

in un intorno del punto $(1, 1)$ secondo la formula di Taylor fino ai termini del secondo ordine.

Solution 159

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(1, 1) + (x-1) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(1,1)} + (y-1) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(1,1)} + \\ + \frac{1}{2} \left[(x-1)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{(1,1)} + 2(x-1)(y-1) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{(1,1)} + (y-1)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{(1,1)} \right] \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = y^x \ln y &\implies \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(1,1)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xy^{x-1} &\implies \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(1,1)} = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \ln y &\implies \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{(1,1)} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \ln y + \frac{f(x, y)}{y} &\implies \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{(1,1)} = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2} &\implies \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{(1,1)} = 0 \end{aligned}$$

Quindi per (x, y) appartenente ad un intorno di $(1, 1)$ e a meno di termini superiori al secondo:

$$y^x \simeq xy - x + 1$$

Esercizio 160 Sviluppare secondo la formula di Taylor la funzione:

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

in un intorno di $P_0(1, \frac{\pi}{2})$ fino ai termini del secondo ordine.

Solution 161 Le derivate sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y \cos(xy) \implies \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x \cos(xy) \implies \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -y^2 \sin(xy) \implies \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_0} = -\frac{\pi^2}{4} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -x^2 \sin(xy) \implies \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{P_0} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \cos(xy) - xy \sin(xy) \implies \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{P_0} = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\sin(xy) \simeq 1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi}{2}(x-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

1.14 Funzioni omogenee: teorema di Eulero

Senza perdita di generalità riferiamoci ad una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita nel campo A di $\mathbb{R}^2$. Sia $P_0(x_0, y_0) \in A$ con $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$; l'equazione della retta r passante per l'origine delle coordinate e per il punto P_0 è:

$$y = \frac{y_0}{x_0}x, \quad (1.198)$$

che può essere messa in forma parametrica:

$$r) \quad \{x(\lambda) = \lambda x_0, y(\lambda) = \lambda y_0\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Al valore del parametro $\lambda_0 = 1$ corrisponde il punto P_0 . Inoltre:

$$\begin{aligned}\exists \delta > 0 \mid \forall \lambda \in I_\delta(\lambda_0) = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta), \quad (\lambda x_0, \lambda y_0) \in A \implies \\ \implies \{(\lambda x_0, \lambda y_0) \mid \lambda \in I_\delta(\lambda_0)\} \subset A\end{aligned}$$

In altri termini, comunque prendiamo un punto $P_0 \in A$ distinto dall'origine, esiste un intorno di $\lambda_0 = 1$ tale che la funzione risulta definita per tutti i valori $(\lambda x_0, \lambda y_0)$ con λ nel suddetto intorno.

In virtù dell'arbitrarietà del punto P_0 , da qui in avanti ci riferiamo ad un punto $P(x, y) \in A$, con $(x, y) \neq (0, 0)$.

Definizione 162 f è **omogenea di grado** α $\iff$

$$\iff (\forall P(x, y) \in A, \forall \lambda \in (0, +\infty), f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y))$$

Esempio 163

$$f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{2x^3 + y^3}{3x^4 + 5y^4}}$$

Abbiamo:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1/3} f(x, y),$$

donde $f(x, y)$ è omogenea di grado $\alpha = -\frac{1}{3}$.

Esempio 164

$$g(x, y) = \sinh\left(\frac{2y}{x}\right)$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} g(\lambda x, \lambda y) &= g(x, y) \\ &= \lambda^0 g(x, y), \end{aligned}$$

donde $g(x, y)$ è omogenea di grado $\alpha = 0$.

Teorema 165

$f \in C^1(A)$ è omogenea di grado $\alpha \implies (f_x, f_y)$ omogenee di grado $\alpha - 1$

Dimostrazione. Per ipotesi:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$$

Derivando ambo i membri (servendosi della regola di derivazione delle funzioni composte):

$$f_x(\lambda x, \lambda y) \lambda = \lambda^\alpha f(x, y),$$

donde l'asserto. ■

Teorema 166

$f \in C^1(A)$ è omogenea di grado $\alpha \iff (\forall (x, y) \in A, \quad x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = \alpha f(x, y))$

Dimostrazione. Omessa. ■

1.15 Forme quadratiche

Definizione 167 Dicesi *polinomio omogeneo di secondo grado in $\mathbb{R}^n$* , ogni funzione

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{hk} x_h x_k, \quad \text{con } a_{hk} \in \mathbb{R} \quad (1.199)$$

Si verifica immediatamente che i polinomi omogenei di secondo grado sono funzioni omogenee di grado $\alpha = 2$.

Definizione 168 Una *forma quadratica* è un polinomio omogeneo di secondo grado.

Proposizione 169

$$\forall h, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad a_{hk} = a_{kh}$$

Dimostrazione. Nel secondo membro della (1.199) gli indici h, k sono muti, quindi possiamo permutarli ottenendo l'identità:

$$\sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{hk} x_h x_k = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_{kh} x_k x_h \quad (1.200)$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie a secondo membro (operazione lecita, in quanto la somma è estesa ad un numero finito di termini):

$$\sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{hk} x_h x_k = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kh} x_k x_h, \quad (1.201)$$

da cui:

$$\forall x_h, x_k \in \mathbb{R}, \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{hk} - a_{kh}) x_h x_k = 0 \implies \forall h, k \in \{1, 2, \dots, n\}, a_{hk} - a_{kh} = 0$$

donde l'asserto. ■

Definizione 170 $\left(\begin{array}{l} \text{La forma quadratica (1.199)} \\ \text{è **definita positiva**} \end{array} \right) \iff (\forall P \in \mathbb{R}^n - \{O\}, f(P) > 0$
 essendo $O(0, 0, \dots, 0)$ l'origine delle coordinate.

Definizione 171 $\left(\begin{array}{l} \text{La forma quadratica (1.199)} \\ \text{è **definita negativa**} \end{array} \right) \iff (\forall P \in \mathbb{R}^n - \{O\}, f(P) < 0$

Definizione 172 $\left(\begin{array}{l} \text{La forma quadratica (1.199)} \\ \text{è **semidefinita positiva**} \end{array} \right) \iff (\forall P \in \mathbb{R}^n - \{O\}, f(P) \geq 0$

Definizione 173 $\left(\begin{array}{l} \text{La forma quadratica (1.199)} \\ \text{è **semidefinita negativa**} \end{array} \right) \iff (\forall P \in \mathbb{R}^n - \{O\}, f(P) \leq 0$

Definizione 174 $\left(\begin{array}{l} \text{La forma quadratica (1.199)} \\ \text{è **indefinita**} \end{array} \right) \iff (\forall P \in \mathbb{R}^n, f(P) \not\leq 0$

Esempio 175 Consideriamo le seguenti forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 && \text{definita positiva} \\ g(x_1, x_2) &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 && \text{semidefinita positiva} \\ h(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2^2 && \text{indefinita} \end{aligned}$$

Ciò premesso, riferiamoci alle forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{hk} x_h x_k \\ &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \end{aligned}$$

giacchè $a_{12} = a_{21}$. Ridifenendo le variabili in x, y e i coefficienti in a, b, c :

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (1.202)$$

Poniamo:

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

Il numero reale Δ si chiama **discriminante** della forma quadratica (1.202).

Teorema 176

$$\begin{aligned} f(x, y) \text{ è definita positiva} &\iff \Delta > 0 \implies a \neq 0, \begin{cases} a > 0 \implies f \text{ è def. pos.} \\ a < 0 \implies f \text{ è def. neg.} \end{cases} \\ f(x, y) \text{ è semidefinita} &\iff \Delta = 0 \implies (a, c) \neq 0, \begin{cases} \begin{matrix} a > 0 \\ [c > 0] \end{matrix} \implies f \text{ è semidef. pos.} \\ \begin{matrix} a < 0 \\ [c < 0] \end{matrix} \implies f \text{ è semidef. neg.} \end{cases} \\ f(x, y) \text{ è indefinita} &\iff \Delta < 0 \end{aligned}$$

Dimostrazione. Omessa. ■