Funzioni monotone

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia $f : X \to \mathbb{R}$.

Definizione 1 *f è* **crescente** *in X se:*

$$\forall x', x'' \in X \mid x' < x'') \Longrightarrow f(x') \leq f(x'') \tag{1}$$

f è **decrescente** *in X se:*

$$\forall x', x'' \in X \mid x' < x'') \Longrightarrow f(x') \geq f(x'') \tag{2}$$

Definizione 2 *Assegnato $X \subseteq \mathbb{R}$, denotiamo con $\mathcal{F}_X$ l'insieme delle funzioni definite in X. Cioè:*

$$\mathcal{F}_X = \{f \mid f : X \to \mathbb{R}\} \tag{3}$$

Sia

$$\mathcal{F}_X^* = \{f \in \mathcal{F}_X \mid f \text{ è crescente o decrescente}\} \tag{4}$$

Chiamiamo $\mathcal{F}_X^*$ **classe delle funzioni monotone** *in X.*

In altri termini, una funzione è monotona in X se è ivi crescente o decrescente. Se le disuguaglianze (1)-(2) valgono in senso stretto, cioè se:

$$\begin{aligned} x' < x'' &\Longrightarrow f(x') < f(x''), \ \ \forall x', x'' \in X \\ x' < x'' &\Longrightarrow f(x') > f(x''), \ \ \forall x', x'' \in X, \end{aligned} \tag{5}$$

diremo che f è **strettamente crescente** in X se è verificata la prima delle (5), **strettamente decrescente** se è verificata la seconda. Le funzioni strettamente crescenti/decrescenti in X, compongono la classe delle funzioni **strettamente monotone**:

$$\mathcal{F}_X'^* = \{f \in \mathcal{F}_X \mid f \text{ è strettamente monotona}\} \tag{6}$$

La monotonia di una funzione così definita, risulta essere una proprietà globale che, però, può essere definita anche localmente. Più precisamente, nel caso di una funzione crescente:

$$\left(\begin{array}{c} f : X \to \mathbb{R} \text{ è localmente} \\ \text{crescente} \end{array} \right) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (\exists X' \subset X \mid f_{X'} \text{ è crescente},$$

essendo $f_{X'}$ la restrizione di f a X'. In fig. 1 riportiamo il grafico di una funzione decrescente, mentre in fig. 2 è illustrato il grafico di una funzione strettamente crescente.

Premettiamo ora la seguente definizione

Definizione 3 *Sia $A \neq \emptyset$. Gli insiemi non vuoti $A_1, A_2, ..., A_n$ costituiscono una* **partizione** *di A se:*

$$\begin{aligned} &\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A \\ &\overset{\circ}{A}_k \bigcap \overset{\circ}{A}_{k'} = \emptyset, \text{ per } k, k' \in \{1, 2, ..., n\} \ \text{ con } k \neq k', \end{aligned}$$

dove il simbolo $\circ$ denota la parte interna dell'insieme vuoto. Nel caso di un intervallo chiuso $[a, b]$, tale simbolo restituisce l'intervallo aperto (a, b).

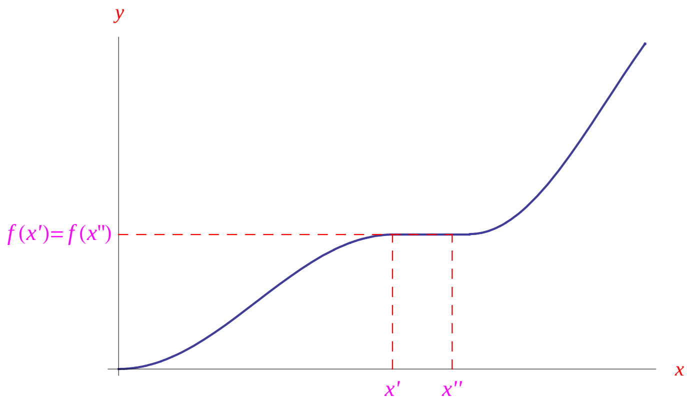

Figura 1: Grafico di una funzione decrescente, ma non in senso stretto. Infatti, nei punti x' e x'' è $f(x') = f(x'')$.

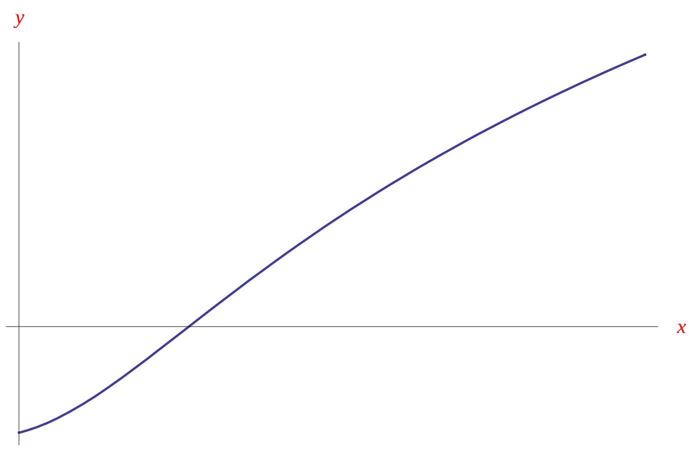

Figura 2: Grafico di una funzione strettamente crescente.

Eseguiamo una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ attraverso $n+1$ punti:

$$x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$$

Precisamente:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Si tratta di una partizione, poiché:

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, b] = [a, b]$$
$$\forall k, k' \in \{0, 1, ..., n-1\} \text{ con } k \neq k', \quad (x_k, x_{k+1}) \cap (x_{k'}, x_{k'+1}) = \emptyset$$

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione:

Definizione 4 *f è* **monotona a tratti** *nell'intervallo limitato $[a, b]$ se esiste una partizione di $[a, b]$:*

$$[a, b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}],$$

tale che f è localmente monotona in $[x_k, x_{k+1}]$, $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Osservazione 5 *La definizione precedente rimane valida anche per un intervallo aperto (a, b) limitato.*

Definizione 6 *f è monotona a tratti in un intervallo lillimitato X se è localmente monotona in ogni intervallo limitato $I \subset X$.*