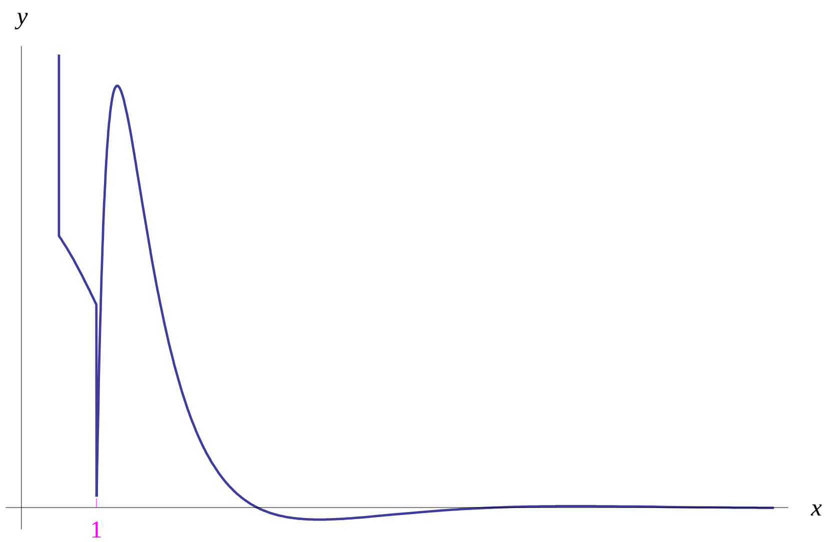
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

La funzione di Hardy–Ramanujan

Marcello Colozzo



Definizione 1 *Assegnata la funzione $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, la funzione reale di una variabile reale:*

$$H_n^f(x) = \frac{xf^n(x) - f(x)^n}{x^{n+4}}, \tag{1}$$

si dice ***funzione di Hardy-Ramanujan di ordine*** *n. Nella (1) il simbolo f^n denota la composizione n-esima di f :*

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n}$$

Nel caso speciale $f(x) = \sin x$, la (1) restituisce ***funzione trigonometrica di Hardy-Ramanujan di ordine*** *n.*

La funzione $H_n^f(x)$ è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, e siamo particolaramente interessati alla funzione trigonometrica che denotiamo semplicemente con $H_n(x)$:

$$H_n(x) = \frac{x\overbrace{\sin(\sin(... \sin(x)))}^{n} - \sin^n x}{x^{n+4}} \tag{2}$$

Il comportamento di $H_n(x)$ in un intorno del punto di accumulazione $x = 0$ è dato da:

$$\lambda_n = \lim_{x \to 0} H_n(x) \tag{3}$$

Per quanto visto in questa dispensa, si ha $\lambda_2 = \frac{1}{18}$. Per $n = 1$ il limite è immediato:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{x \to 0} H_1(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - \sin x}{x^5} \\ &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x-1}{x^5} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = -\infty \end{aligned}$$

Per $n > 2$ il calcolo del limite è più laborioso, per cui utilizziamo il software *Mathematica* il quale definisce le funzioni ricorsive con il comando `Nest[f,x,n]`, ottenendo:

$$\lambda_{2n+1>2} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x \to 0^+ \\ -\infty, & \text{se } x \to 0^- \end{cases} \; ; \quad \lambda_{2n} = +\infty, \quad \forall n \in \{2, 3, ...\} \tag{4}$$

In fig. 1 è plottata la funzione per $n = 2$, mentre in fig. 2 è riportato il grafico della funzione per diversi valori di $n > 2$.

Possiamo generalizzare ulteriormente la funzione trigonometrica di Hardy, contemplando una ricorsività locale. Precisamente, omettendo l'apice f:

$$H_{n(x)}(x) = \frac{xf^{n(x)}(x) - f(x)^{n(x)}}{x^{n(x)+4}}, \tag{5}$$

dove

$$\begin{aligned} n &: X \to \mathbb{N} \\ n &: x \to n(x) \end{aligned}$$

In particolare:

$$\lim_{x \to 0} n(x) = +\infty$$

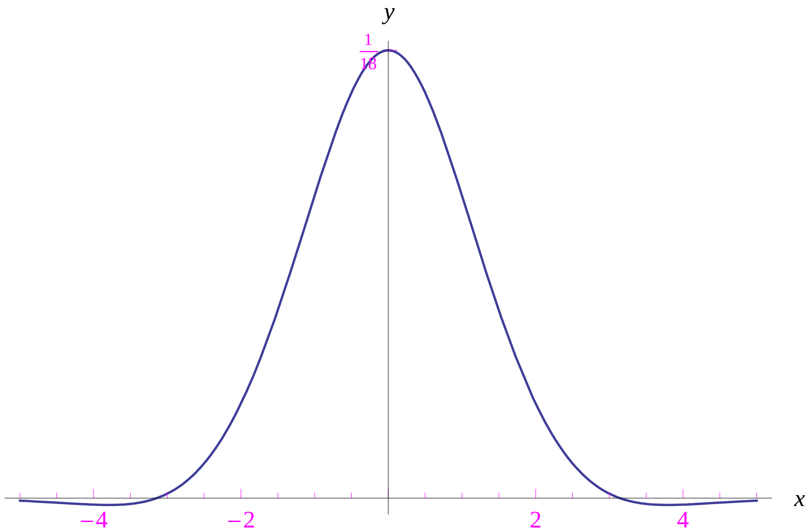


Figura 1: Grafico della funzione trigonometrica di Hardy-Ramanujan di ordine 2.

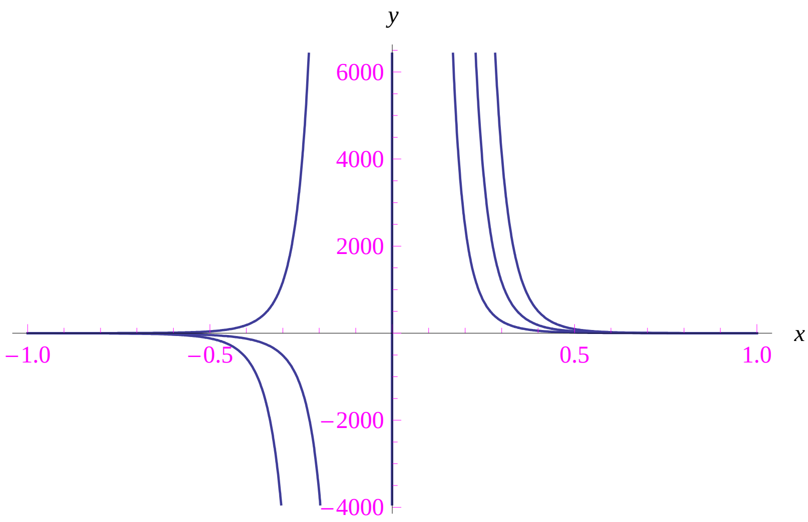


Figura 2: Grafico della funzione trigonometrica di Hardy di ordine $n = 3, 4, 5$.

Dal momento che $n(x) \in \mathbb{N}$, siamo tentati a porre $n(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$, dove il simbolo $[.]$ denota la parte intera di x. Per essere più precisi, assumiamo dapprima $H_n(x)$ come funzione reale delle due variabili reali x, n. In altri termini, consideriamo n non un parametro, ma una variabile indipendente, cosicchè:

$$H(x,n) = \frac{xf^n(x) - f(x)^n}{x^{n+4}},$$

definita in $(\mathbb{R} - \{0\}) \times (\mathbb{N} - \{0\})$, dopodiché assumiamo $n = n(x)$, per cui $H_{n(x)}(x) = H[x, n(x)]$. L'ultimo passo consiste nell'assumere $n(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$:

$$H\left(x, \left[\frac{1}{x}\right]\right) = \frac{xf^{\left[\frac{1}{x}\right]}(x) - f(x)^{\left[\frac{1}{x}\right]}}{x^{\left[\frac{1}{x}\right]+4}}, \quad f(x) = \sin x \tag{6}$$

Tuttavia, questa funzione non produce un andamento interessante. Un grafico più drammatico si ottiene quando il numero di ricorsioni aumenta esponenzialmente per $x \to 0$:

$$n(x) = \left[e^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right],$$

onde:

$$H\left(x, \left[e^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right]\right) = \frac{xf^{\left[e^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right]}(x) - f(x)^{\left[e^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right]}}{x^{\left[e^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right]+4}}, \quad f(x) = \sin x \tag{7}$$

In fig. riportiamo il grafico della funzione (7), da cui sembra

$$\lim_{x \to 0^+} \left\{ \frac{xf^{\left[e^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right]}(x) - f(x)^{\left[e^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right]}}{x^{\left[e^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right]+4}} \right\} = +\infty, \quad f(x) = \sin x$$

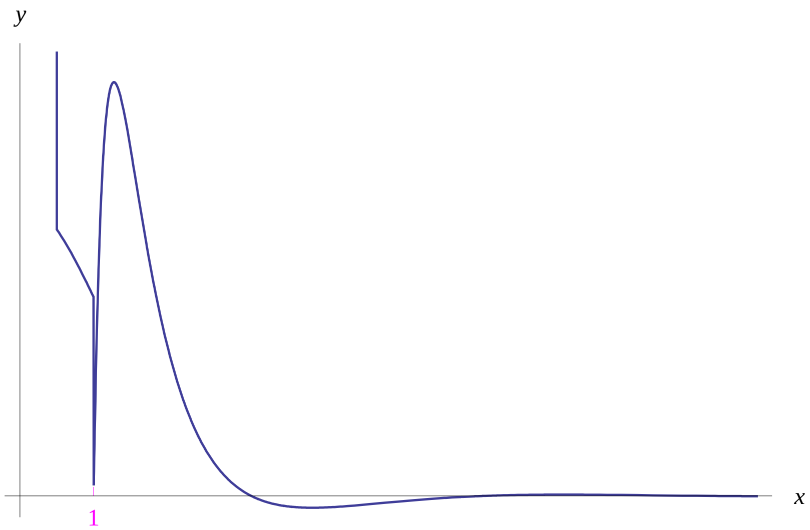


Figura 3: Grafico di $H\left(x, \left[e^{\left[\frac{1}{x}\right]}\right]\right)$.