Approssimazione di Stirling

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

1 Rappresentazione integrale della funzione gamma

Ricordiamo il teorema:

Teorema 1 *Sia $\psi(t)$ la funzione complessa della variabile reale t:*

$$\psi(t) = t^{z-1}e^{-t}, \quad (z \in \mathbb{C})$$

$\forall z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0$, *risulta:*

1. $\psi(t)$ *sommabile in* $(0, +\infty)$
2. *La funzione gamma ammette la seguente rappresentazione integrale:*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \tag{1}$$

Siamo interessati ai valori reali della variabile indipendente:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \quad \forall x \in (0, +\infty) \tag{2}$$

Proposizione 2

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{3}$$

Dimostrazione. Dalla (2):

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$$

Eseguendo un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt &= \int_0^{+\infty} t^x d\left(e^{-t}\right) \\ &= \underbrace{\left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^{t=+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty}\left(-e^{-t}\right)xt^{x-1}dt \\ &= x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\end{aligned}$$

onde l'asserto. ■

Corollario 3

$$\Gamma\left(n+1\right)=n!,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Dimostrazione. Dalla (3) per $x=n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+1\right)&=n\Gamma\left(n\right)\\&=n\left(n-1\right)\Gamma\left(n-2\right)\\&=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdot...\cdot 2\Gamma\left(1\right)\end{aligned}$$

Ma dalla (2)

$$\Gamma\left(1\right)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}dt=-\left.e^{-t}\right|_{t=0}^{t=+\infty}=+1,$$

da cui l'asserto. ■

Ne consegue che la funzione gamma è un prolungamento della successione ricorsiva "fattoriale di n":

$$!:n\in\mathbb{N}\rightarrow n\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\cdot 2\cdot 1$$

da $\mathbb{N}$ all'intervallo $(0,+\infty)$. Abbiamo:

$$!:x\in(0,+\infty)\rightarrow x!,$$

essendo $x!=x\Gamma\left(x\right),\ \forall x\in(0,+\infty)$, conservando la convenzione $0!=1$. In definitiva:

$$x!=\begin{cases}x\Gamma\left(x\right) & \text{se } x>0\\ 1, & \text{se } x=0\end{cases}\tag{4}$$

Riscriviamo la (2):

$$\Gamma\left(x\right)=\int\limits_0^{+\infty}t^xe^{-t}\frac{dt}{t}\tag{5}$$

La presenza di $\frac{dt}{t}=d\ln t$ suggerisce di eseguire il cambio di variabile $t\rightarrow\ln t$. Ma prima di eseguire una tale operazione cerchiamo di isolare il termine in x. A tale scopo, consideriamo una funzione "di prova" $\chi\left(x\right)>0,\ \forall x\in(0,+\infty)$ e convergente per $x\rightarrow 0^+$. Dividendo primo e secondo membro per $\vartheta\left(x\right)$:

$$\frac{\Gamma\left(x\right)}{\chi\left(x\right)}=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{t^x}{\chi\left(x\right)}\right)e^{-t}\frac{dt}{t}$$

Guardando l'integrando, segue che la scelta "più ovvia" è $\chi\left(x\right)=x^x$:

$$\frac{\Gamma\left(x\right)}{x^x}=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^xe^{-t}\frac{dt}{t}\tag{6}$$

E allora il giusto cambio di variabile è:

$$\tau=\ln\left(\frac{t}{x}\right),$$

L'integrando diventa:

$$\left(\frac{t}{x}\right)^x e^{-t}\frac{dt}{t} = e^{-x(e^\tau - \tau)}d\tau,$$

mentre gli estremi di integrazione:

$$0 < t = xe^\tau < +\infty \underset{x>0}{\Longrightarrow} 0 < e^\tau < +\infty \Longrightarrow -\infty < \tau < +\infty$$

In tal modo la (6) si scrive:

$$\frac{\Gamma(x)}{x^x} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x(e^\tau - \tau)}d\tau, \tag{7}$$

Per un assegnato $x_0 \in (0, +\infty)$:

$$\left.\frac{\Gamma(x)}{x^x}\right|_{x=x_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, d\tau, \tag{8}$$

dove $f(\tau)$ è la funzione reale della variabile reale τ:

$$f(\tau) = e^{-x_0(e^\tau - \tau)}, \tag{9}$$

che dipende parametricamente da x_0. In fig. 1 è riportato l'andamento del grafico della funzione $f(\tau)$, da cui vediamo che tale funzione è apprezzabilmente diversa da zero nelle immediate vicinanze dell'origine.

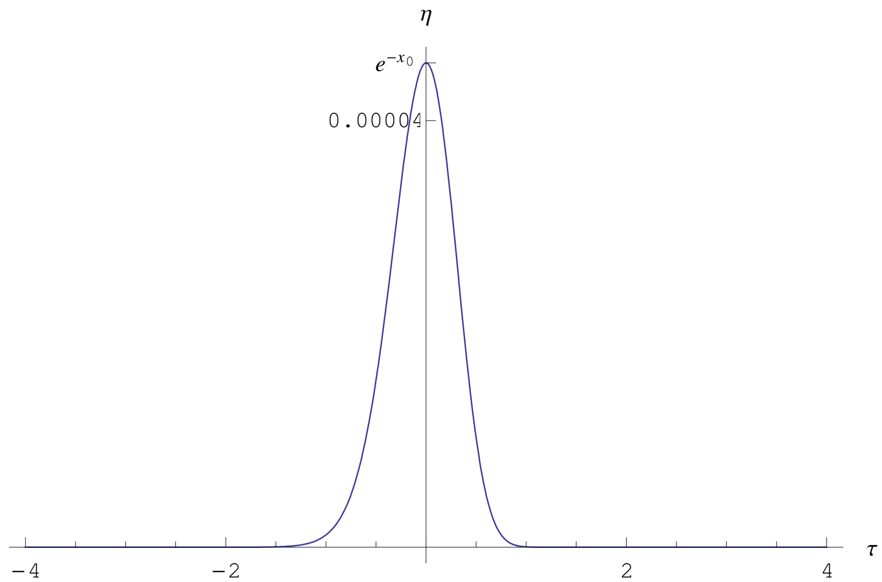

Figure 1: Grafico della funzione $f(\tau) = e^{x_0(\tau - e^\tau)}$ per $x_0 = 10$. Il grafico è estremamente piccato intorno all'origine, mentre la funzione si annulla rapidamente per $|x| \to +\infty$. Si badi che il grafico non è simmetrico rispetto all'asse η, poichè $f(\tau)$ non ha parità definita.

Il massimo assoluto della funzione è $\max f = f(0) = e^{-x_0}$. Notiamo poi che per $x_0 = 0$ la funzione si riduce alla funzione costante $f(\tau) = 1$, e l'integrale diverge, come appunto doveva essere.

$$\lim_{x_0 \to 0^+} \left.\frac{\Gamma(x)}{x^x}\right|_{x=x_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau = +\infty$$

Guardando la (8) si ha che $\left.\frac{\Gamma(x)}{x^x}\right|_{x=x_0}$ è la misura del rettangoloide generalizzato $\mathcal{R}(x_0)$ di base $\mathbb{R}$ relativo alla funzione $f(\tau)$.

$$\mathcal{R}(x_0) = \left\{(\tau, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < \tau < +\infty, \ \ 0 \leq \eta \leq f(\tau)\right\}$$

Quindi:

$$\left.\frac{\Gamma(x)}{x^x}\right|_{x=x_0} = mis\mathcal{R}(x_0) < +\infty, \quad \forall x_0 \in (0, +\infty)$$

Risulta:

$$\lim_{x_0 \to 0^+} mis\mathcal{R}(x_0) = +\infty,$$

poichè per $x_0 \to 0^+$, per quanto visto sopra, $\mathcal{R}(x_0)$ è il rettangoloide generalizzato relativo alla funzione costante $f(\tau) = 1$ e che, quindi, ha misura infinita. Studiamo il comportamento nel limite opposto, cioè per $x_0 \to +\infty$. Innanzitutto osserviamo che:

$$\lim_{x_0 \to +\infty} \min f = \lim_{x_0 \to +\infty} e^{-x_0} = 0^+,$$

per cui:

$$x_0 \to +\infty \Longrightarrow f(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

Cioè, per $x_0 \to +\infty$, la funzione $f(\tau)$ si riduce alla funzione identicamente nulla. In sintesi

$$\begin{aligned} x_0 \to 0^+ &\Longrightarrow f(\tau) \text{ è la funzione costante } (=1) \\ x_0 \to +\infty &\Longrightarrow f(\tau) \text{ è la funzione identicamente nulla} \end{aligned}$$

Ciò può essere visto anche graficamente plottando $f(\tau)$ per diversi valori di x_0, come riportato in fig. 2.

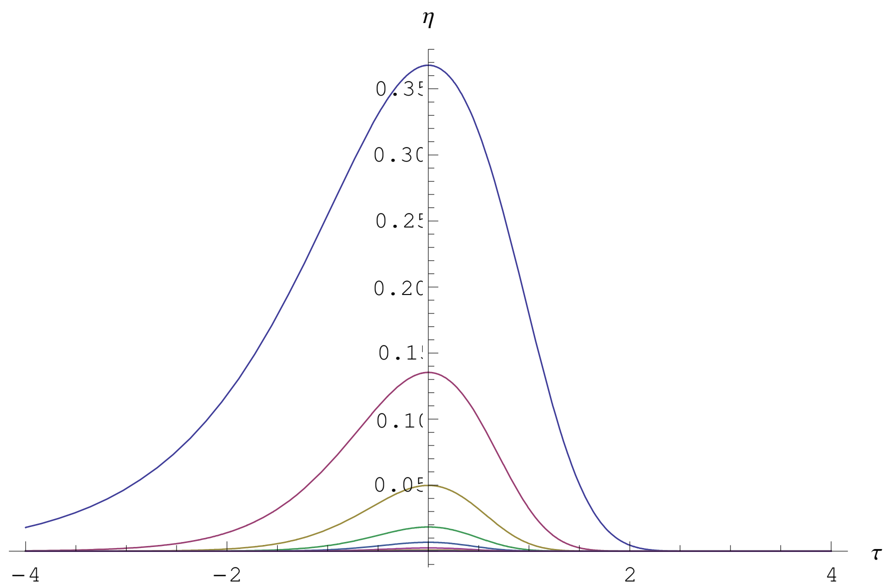

Figure 2: In questa figura plottiamo la funzione $f(\tau) = e^{x_0(e^{\tau}-\tau)}$ per x_0 variabile in $\{1, 2, ..., 10\}$. All'aumentare di x_0 il grafico della funzione tende a "schiacciarsi" sull'asse x, e nel limite per $x_0 \to +\infty$, tende alla funzione identicamente nulla.

È noto che:

$$\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty$$

Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty}x^x=+\infty$$

Per quanto visto sopra:

$$\lim_{x_0\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x_0\left(e^\tau-\tau\right)}d\tau=0^+\Longrightarrow\lim_{x_0\to+\infty}\left.\frac{\Gamma(x)}{x^x}\right|_{x=x_0}=+\infty$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x)}{x^x}=+\infty$$

Cioè, per $x\to+\infty$, la funzione Γ è un infinito di ordine inferiore a x^x.

Riscriviamo la (8):

$$\left.\frac{\Gamma(x)}{x^x}\right|_{x=x_0}=F(x_0)$$

dove:

$$F(x_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,d\tau \tag{10}$$

Come è noto, l'*approssimazione di Stirling* è data da:

$$\left.\frac{\Gamma(x)}{x^x}\right|_{x=x_0}\simeq e^{-x_0}\sqrt{\frac{2\pi}{x_0}},$$

cosicchè:

$$F(x_0)\simeq e^{-x_0}\sqrt{\frac{2\pi}{x_0}}\stackrel{def}{=}S(x) \tag{11}$$

Ciò premesso, tentiamo una approssimazione differente. Per quanto visto, $f(\tau)$ è apprezzabilmente diversa da zero in un opportuno intorno di $\tau=0$. Ciò suggerisce la seguente approssimazione per la funzione $f(\tau)$:

$$\begin{array}{l} f(\tau)\neq 0,\ \text{ se } \tau\in A(x_0)\\ f(\tau)=0,\ \text{ se } \tau\notin A(x_0), \end{array}$$

dove $A(x_0)$ è un intorno di $\tau=0$ la cui ampiezza dipende da x_0. Per essere più specifici:

$$A(x_0)=\{\tau\in\mathbb{R}\mid f(\tau)>\varepsilon\},$$

dove $0<\varepsilon<1$ dipende dall'approssimazione. Per determinare l'ampiezza di $A(x_0)$ si risolve dapprima (numericamente) l'equazione:

$$f(\tau)=\varepsilon,$$

che ammette due radici $\tau_1<0,\ \tau_2>0$ con $|\tau_1|\gtrsim\tau_2$ (questa disuguaglianza deriva dal fatto che il grafico di $f(\tau)$ non è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate). Per un assegnato ε

le radici τ_1 e τ_2 dipendono da x_0, per cui è $\tau_1(x_0)$, $\tau_2(x_0)$. Assumiamo come ampiezza di $A(x_0)$:

$$\delta_\varepsilon(x_0) = \max\{|\tau_1(x_0)|, \tau_2\} = |\tau_1(x_0)|$$

Quindi il valore approssimato di $F(x_0)$ è:

$$F_{app}(x_0) = \int_{-\delta_\varepsilon(x_0)}^{\delta_\varepsilon(x_0)} f(\tau)\, d\tau \tag{12}$$

Dall'analisi dell'andamento del grafico di $f(\tau)$ al variare di x_0 in $(0, +\infty)$, si deduce che:

$$\lim_{x_0 \to 0^+} \delta_\varepsilon(x_0) = +\infty, \quad \lim_{x_0 \to +\infty} \delta_\varepsilon(x_0) = 0^+$$

Cioè al crescere di x_0 l'ampiezza dell'intervallo di integrazione si riduce progressivamente. Quindi, per $x_0 \gg 1$ possiamo tentare un qualche sviluppo in serie dell'integrando $f(\tau)$, dato che in questo limite ci troviamo in un intorno di $\tau = 0$. Ricordiamo che:

$$f(\tau) = e^{-x_0 g(\tau)},$$

avendo posto per definizione:

$$g(\tau) = e^\tau - \tau$$

Possiamo allora sviluppare $g(\tau)$ in serie di Taylor troncata a un ordine assegnato N.

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{N} c_k \tau^k, \quad c_k = \frac{1}{k!} g^{(k)}(0)$$

Abbiamo:

$$F_{app}(x_0) = \int_{-\delta_\varepsilon(x_0)}^{\delta_\varepsilon(x_0)} e^{-x_0 \sum_{k=0}^{N} c_k \tau^k} d\tau,$$

per cui:

$$F_{app}(x_0) = \prod_{k=0}^{N} I_k(x_0),$$

dove:

$$I_k(x_0) = \int_{-\delta_\varepsilon(x_0)}^{\delta_\varepsilon(x_0)} e^{-x_0 c_k \tau^k} d\tau$$

In definitiva:

$$\left.\frac{\Gamma(x)}{x^x}\right|_{x=x_0} \simeq \prod_{k=0}^{N} I_k(x_0)$$

In forza dell'arbitrarietà di $x_0 > 0$, possiamo scrivere:

$$\Gamma(x) \simeq x^x \prod_{k=0}^{N} I_k(x) \tag{13}$$

Si osservi che possiamo dalla (13) possiamo ricavare una equazione esatta, nel limite per $N, \delta_\varepsilon \to +\infty$, cosicchè:

$$\Gamma\left(x\right) = x^x \prod_{k=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x}{k!}\left[\frac{d}{d\tau}\left(e^\tau - \tau\right)\right]_{\tau=0}\tau^k} d\tau$$