Funzioni analitiche e funzioni debolmente analitiche

[Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info]

Partiamo dal caso più semplice:

$$f : X \to \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad X \subseteq \mathbb{R} \tag{1}$$

Definition 1 *Se $r \in \mathbb{N}$, diremo che f è di* **classe** *C^r su X e si scrive $f \in C^r(X)$, se f è continua in X ed è ivi dotata di derivata continua fino all'ordine r.*

Definition 2 *Se*

$$\forall r \in \mathbb{N}, \ f \in C^r(X),$$

diremo che $f \in C^\infty(X)$. Cioè, f è di classe C^∞ su X se è ivi continua assieme alle derivate di ordine comunque elevato.

Definition 3 *f è* **analitica** *in X, se in un intorno di ogni punto di X è sviluppabile in serie di Taylor. Una funzione analitica si dice anche di classe C^ω su X, e si scrive $f \in C^\omega(X)$.*

Riesce

$$f \in C^\omega(X) \underset{\nLeftarrow}{\Longrightarrow} f \in C^\infty(X)$$

Cioè l'analiticità è una condizione più forte della continuità e dell'esistenza delle derivate di ordine comunque elevato e continue in X.

Example 4 *Sia data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Risulta

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0^+,$$

per cui la funzione è continua in $x = 0$. La derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Segue

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

onde $f'(x)$ è continua in $x = 0$. La derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2e^{-1/x^2}\left(2-3x^2\right)}{x^6}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Segue

$$\lim_{x \to 0} f''(x) = 0$$

onde $f''(x)$ è continua in $x = 0$. È facile convincersi che

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

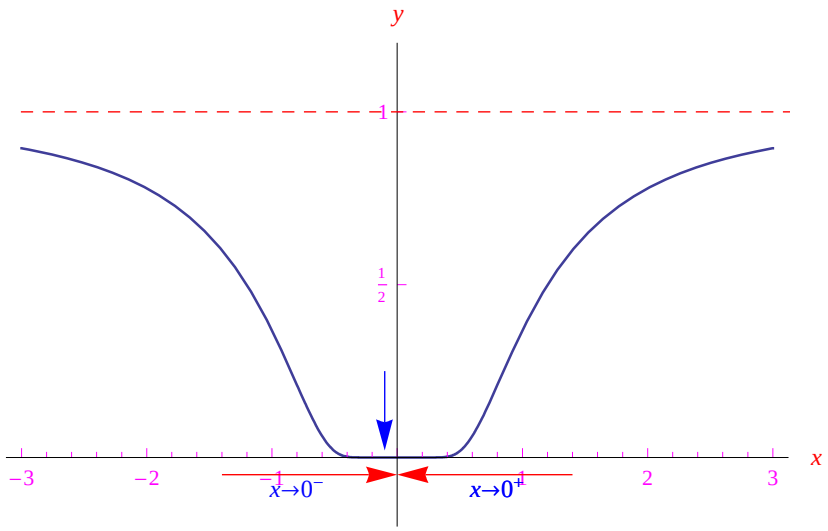

Figura 1: Grafico della funzione (2).

Ne consegue che lo sviluppo di Taylor di f di punto iniziale $x = 0$ è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0,$$

mentre in ogni intorno di $x = 0$, la funzione è non nulla:

$$\forall \delta > 0, \quad x \in (-\delta, \delta) - \{0\} \Longrightarrow f(x) \neq 0$$

Ne concludiamo che la funzione assegnata non è analitica. In fig. 1 riportiamo il grafico della funzione.

Definition 5 *Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è* **debolmente analitica** *in X, se è il limite in senso debole di una famiglia di funzioni analitiche.*

Qui per limite in senso debole, si intende il limite nel senso delle distribuzioni.

Example 6 *Sia data la famiglia (ad un parametro) di funzioni analitiche*

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{e^{-\frac{x}{\alpha}} + 1}, \qquad (\alpha > 0) \tag{6}$$

graficata in fig. 2.

Risulta:

$$\begin{aligned} x > 0 &\Longrightarrow \lim_{\alpha \to 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{e^{-\frac{|x|}{\alpha}} + 1} = \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1^- \\ x < 0 &\Longrightarrow \lim_{\alpha \to 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{|x|}{\alpha}} + 1} = \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = 0^+, \end{aligned} \tag{7}$$

come appunto appare dalla fig. 2: per $\alpha \to 0^+$, la $f_a(x)$ tende alla funzione unit step:

$$U(x) = \begin{cases} 1, & se\ x > 0 \\ 0, & se\ x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Cioè

$$U(x) = \text{“} \lim_{\alpha \to 0^+} \text{”} f_\alpha(x),$$

dove le virgolette denotano l'operazione di passaggio al limite (7). Dalla definizione precedente, risulta che $U(x)$ è debolemente analitica.

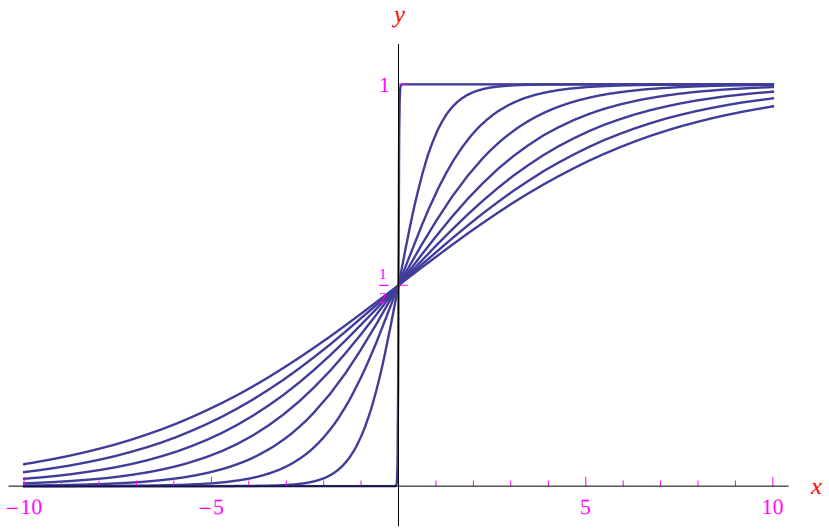

Figura 2: Grafico di alcune funzioni della famiglia (6).