

Una proprietà dei funzionali lineari di uno spazio di Hilbert

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Assegnato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, consideriamo il suo spazio duale:

$${}^*\mathcal{H} = \text{hom}(\mathcal{H}, \mathbb{C}), \quad (1)$$

Cioè gli elementi di ${}^*\mathcal{H}$ sono gli omomorfismi da $\mathcal{H}$ a $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \phi &: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \\ \phi &: \xi \rightarrow \phi(\xi) \in \mathbb{C}, \quad \forall \xi \in \mathcal{H} \end{aligned} \quad (2)$$

detti anche *funzionali lineari*. Come è noto:

$$\dim \mathcal{H} = \dim ({}^*\mathcal{H}), \quad (3)$$

cioè $\mathcal{H}$ e ${}^*\mathcal{H}$ sono isodimensionali. Per un noto teorema, segue che essi sono isomorfi.

Teorema 1

$$\phi \in ({}^*\mathcal{H}) \implies \exists! \hat{\phi} \in \mathcal{H} \mid \phi(\xi) = \langle \hat{\phi}, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H} \quad (4)$$

dove $\langle, \rangle$ denota il prodotto scalare in $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. Facciamo riferimento alla fig. 1, dove è visibile l'azione di un elemento $\phi \in ({}^*\mathcal{H})$ su un qualunque vettore ξ di $\mathcal{H}$. Consideriamo il kernel dell'operatore lineare ϕ :

$$\ker \phi = \{\xi \in \mathcal{H} \mid \phi(\xi) = 0\} \quad (5)$$

Come è noto, si tratta di un sottospazio di $\mathcal{H}$ la cui dimensione si dice *nullità* di ϕ :

$$N(\phi) = \dim \ker \phi \quad (6)$$

Se $N(\phi) = \dim \mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=}} n \leq +\infty$ si ha

$$\ker \phi = \mathcal{H} \implies \phi \text{ è il funzionale nullo}$$

In tal caso la (4) è immediatamente verificata dal vettore nullo

$$\hat{\phi} = 0$$

e l'asserto è banale. Consideriamo quindi

$$N(\phi) < n$$

Riesce

$$\mathcal{H} = \ker \phi \oplus (\ker \phi)^\perp, \quad (7)$$

dove $(\ker \phi)^\perp$ è il supplementare ortogonale di $\ker \phi$:

$$\eta \in (\ker \phi)^\perp \iff \langle \eta, \xi \rangle = 0, \quad \forall \xi \in \ker \phi \quad (8)$$

Per definizione di somma diretta, si ha:

$$\forall \xi \in \mathcal{H}, \quad \exists! \left(\xi_{\ker \phi}, \xi_{(\ker \phi)^\perp} \right) \in \ker \phi \times (\ker \phi)^\perp \mid \xi = \xi_{\ker \phi} + \xi_{(\ker \phi)^\perp} \quad (9)$$

Cioè, ogni vettore di $\mathcal{H}$ si decompone in modo univoco nella somma di un vettore di $\ker \phi$ e $(\ker \phi)^\perp$. È univocamente definita la coppia ordinata di proiettori $(\hat{\pi}_{\ker \phi}, \hat{\pi}_{(\ker \phi)^\perp})$:

$$\hat{\pi}_{\ker \phi} \xi = \xi_{\ker \phi}, \quad \hat{\pi}_{(\ker \phi)^\perp} \xi = \xi_{(\ker \phi)^\perp}, \quad \forall \xi \in \mathcal{H} \quad (10)$$

Poniamo

$$\xi_{\ker \phi} = \xi_1, \quad \xi_{(\ker \phi)^\perp} = \lambda \eta, \quad (\lambda \in \mathbb{C}), \quad (11)$$

avendosi

$$\langle \xi_1, \eta \rangle = 0 \quad (12)$$

Dalla (9) segue

$$\xi = \xi_1 + \lambda \eta, \quad \xi \in \mathcal{H} \quad (13)$$

Applicando ϕ a primo e secondo membro della (13):

$$\phi(\xi) = \phi(\xi_1 + \lambda \eta) \underset{\phi \text{ è lineare}}{=} \underbrace{\phi(\xi_1)}_{=0 \iff \xi_1 \in \ker \phi} + \lambda \phi(\eta) = \lambda \phi(\eta) \quad (14)$$

Moltiplicando scalarmente primo e secondo membro della (13) per η :

$$\langle \eta, \xi \rangle = \underbrace{\langle \eta, \xi_1 \rangle}_{=0 \iff \xi_1 \in (\ker \phi)^\perp} + \lambda \langle \eta, \eta \rangle = \lambda \langle \eta, \eta \rangle \quad (15)$$

Per $\eta \neq 0$ dividiamo membro a membro le (14)-(15):

$$\frac{\phi(\xi)}{\langle \eta, \xi \rangle} = \frac{\phi(\eta)}{\langle \eta, \eta \rangle},$$

da cui

$$\phi(\xi) = \frac{\phi(\eta)}{\langle \eta, \eta \rangle} \langle \eta, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}, \quad (16)$$

che può essere scritta come

$$\phi(\xi) = \left\langle \frac{\phi(\eta)^*}{\langle \eta, \eta \rangle} \eta, \xi \right\rangle \quad (17)$$

Eseguiamo la posizione

$$\hat{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\phi(\eta)^*}{\langle \eta, \eta \rangle} \eta, \quad (18)$$

onde

$$\phi(\xi) = \langle \hat{\phi}, \xi \rangle,$$

con $\hat{\phi} \in (\ker \phi)^\perp - \{0\} \implies \hat{\phi} \in H$ univocamente definito dalla (18). ■

Conclusione 2 In corrispondenza di un qualunque funzionale lineare ϕ dello spazio duale ${}^*\mathcal{H}$, è univocamente definito un vettore $\hat{\phi}$ di $\mathcal{H}$ tale che il valore assunto da ϕ su un arbitrario vettore ξ di $\mathcal{H}$, è dato dal prodotto scalare di $\hat{\phi}$ per ξ .

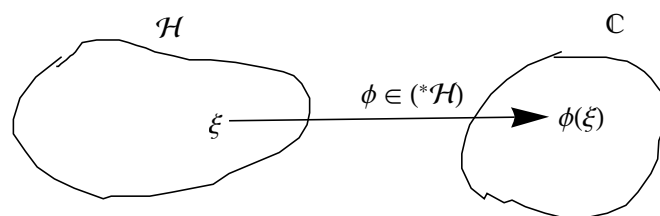


Figura 1: Un elemento ϕ dello spazio duale ${}^*\mathcal{H}$, associa al vettore ξ lo scalare $\phi(\xi)$.