Funzioni vettoriali. Limiti e continuità

Marcello Colozzo

È immediata la dimostrazione del seguente teorema

Teorema 1 *La funzione vettoriale* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *è convergente in* $\mathbf{x}_0$ *se e solo se sono ivi convergenti le sue componenti rispetto a una qualunque coppia di basi di* E *e* F*. Precisamente:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \Longleftrightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_k(\mathbf{x}) = L_k$$

dove $f_k(\mathbf{x})$ *è la* k*-esima componente rispetto alle predette basi:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\mathbf{x})\,\varepsilon_k$$

e L_k *è la* k*-esima componente del vettore* $\mathbf{L}$*:*

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{m} L_k \varepsilon_k$$

Definizione 2 *Dicesi* **modulo** *di* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$*, la funzione scalare*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} f_k(\mathbf{x})^2}$$

Definizione 3

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ \textit{è limitata}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists M > 0 \mid |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq M$$

Enunciamo senza dimostrare:

Teorema 4

$$\left.\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\right) \begin{array}{c}\Longrightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} \left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| = |\mathbf{L}|\right.$$

Anche la nozione di continuità di una funzione reale di una variabile reale si estende facilmente alle funzioni vettoriali:

Definizione 5

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ \textit{è continua}} \\ \textit{in } \mathbf{x}_0 \in V\end{array}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\right.$$

Sussiste il teorema

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ è continua} \\ \text{in } \mathbf{x}_0 \in V\end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(f_k(\mathbf{x}) \text{ è ivi continua, } k = 1, ..., m\right.$$

0.1