
Teorema fattung degli integrali Fourier

Marcello Colozzo

Teorema 1 Siano $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ funzioni reali della variabile reale t , sviluppabili in integrale di Fourier:

$$f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (k = 1, 2, 3)$$

essendo $g_k(\omega)$ la trasformata di Fourier di $f_k(t)$:

$$g_k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t) e^{i\omega t} dt$$

Se una delle $g_k(\omega)$ è il prodotto delle altre due:

$$g_k(\omega) = g_h(\omega) g_n(\omega), \quad \text{con } k, h, n \text{ diversi tra loro,}$$

allora:

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_h(t') f_n(t - t') dt' \quad (1)$$

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo $g_3(\omega) = g_1(\omega) g_2(\omega)$, per cui

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\omega) g_2(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t') e^{i\omega t'} dt' \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t'') e^{i\omega t''} dt'' \right] e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f_1(t') e^{i\omega t'} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' f_2(t'') e^{i\omega t''} \end{aligned}$$

Modificando l'ordine di integrazione (ammettendo che ciò sia lecito):

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f_1(t') \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' f_2(t'') \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-(t'+t''))}}_{=\sqrt{2\pi}\delta(t-(t'+t''))} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f_1(t') \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt'' f_2(t'') \delta(t-(t'+t''))}_{=f_2(t-t')} \end{aligned}$$

onde l'asserto. ■