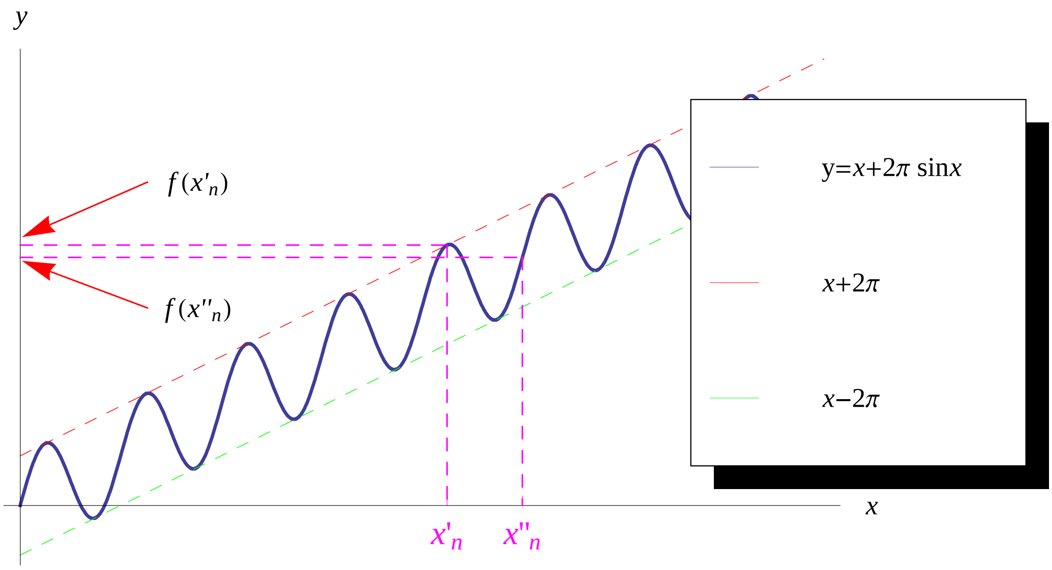
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_\Gamma (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Esperimenti computazionali con Mathematica: La trasformata di Fourier di $f(t) = t + 2\pi \sin \omega_0 t$

Marcello Colozzo



1 La funzione $f(x) = x + 2\pi \sin x$

1.1 Premessa

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq R$, e x_0 punto di accumulazione al finito per X. Se risulta $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, segue che $g(x) = |f(x) - l|$ è infinitesima in x_0. Più precisamente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longrightarrow (|f(x) - l| \text{ è infinitesima in } x_0)$$
$$\not\Longrightarrow (|f(x) - l| \text{ è definitivamente decrescente intorno a } x_0)$$

Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \ x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

Tuttavia, per un assegnato $\varepsilon > 0$:

$$x', x'' \in X \mid x'' > x' > \delta_\varepsilon \not\Longrightarrow f(x'') > f(x'), \tag{1}$$

nel senso che può aversi:

$$f(x') > f(x'') > \varepsilon, \quad x', x'' \in X \mid x'' > x' > \delta_\varepsilon$$

2 Comportamento all'infinito di $f(x) = x + 2\pi \sin x$

Consideriamo la funzione:

$$f(x) = x + 2\pi \sin x \tag{2}$$

La (2) è definita in $\mathbb{R}$. Il secondo termine a secondo membro della (2), cioè $2\pi \sin x$, è una funzione periodica di periodo 2π, ma $f(x)$ non è periodica (vedi def. ??). Determiniamo la parità della funzione:

$$f(-x) = -x + 2\pi \sin(-x) = -x - 2\pi \sin x = -f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Cioè la funzione è dispari. Quindi, per il suo studio basta limitarsi all'intervallo $[0, +\infty)$. Studiamo il comportamento per $x \to +\infty$. A tale scopo, osserviamo che:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Longrightarrow -2\pi \leq 2\pi \sin x \leq 2\pi$$

da cui:

$$x - 2\pi \leq f(x) \leq x + 2\pi, \ \forall x \in [0, +\infty),$$

onde il diagramma cartesiano della funzione è contenuto nella regione:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \ x - 2\pi \leq y \leq x + 2\pi\right\},$$

ovvero tra le due rette $r_- : y = x - 2\pi$, $r_+ : y = x + 2\pi$. In fig. 1 abbiamo tracciato tale diagramma con il programma di calcolo `Mathematica` per $x \in [0, 16\pi]$.

La $f(x) \geq x - 2\pi$ implica che comunque prendiamo un $\varepsilon > 0$, se poniamo $\delta_\varepsilon = \varepsilon + 2\pi$ si ha $(\delta_\varepsilon, \varepsilon) \in r_-$ e quindi $x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow x - 2\pi > \varepsilon$. Ne consegue:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon + 2\pi > 0 \mid x > \varepsilon + 2\pi \Longrightarrow f(x) \geq x - 2\pi > \varepsilon$$

Ovvero:

$$\lim_{x \to +\infty} (x + 2\pi \sin x) = +\infty \tag{3}$$

Ciò è illustrato in fig. 2.

Per quanto detto, la funzione è dispari, quindi:

$$\lim_{x \to -\infty} (x + 2\pi \sin x) = -\infty$$

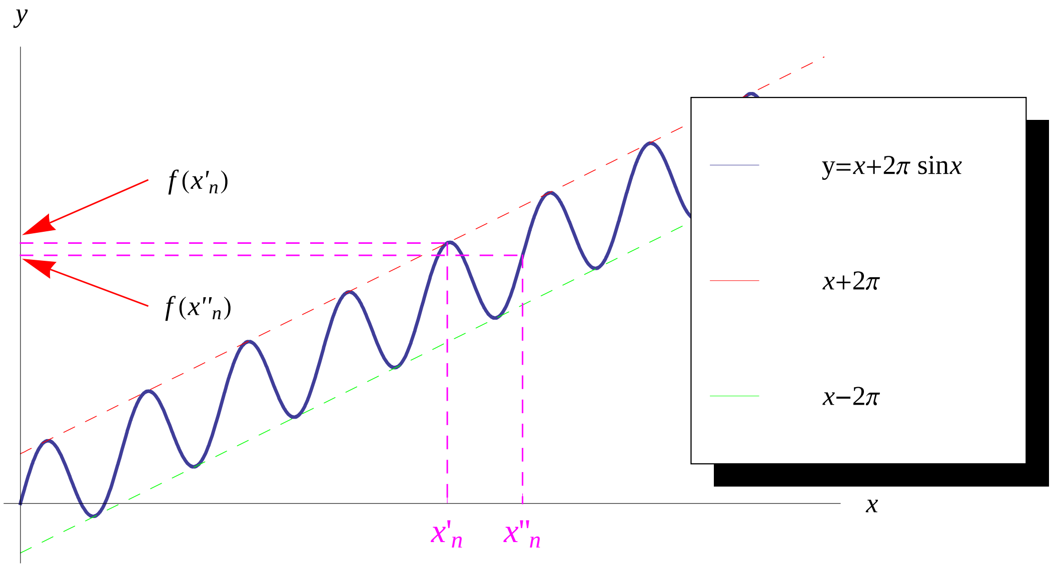


Figura 1: Grafico di $f(x) = x + 2\pi \sin x$ per $x \in [0, 16\pi]$.

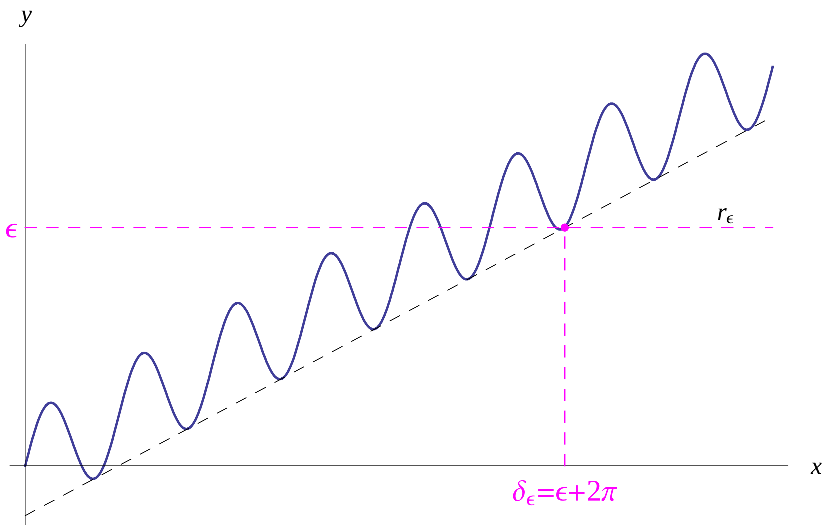


Figura 2: Risulta: $\forall r_\varepsilon : y = \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon = \varepsilon + 2\pi \mid x > \delta_\varepsilon \implies (x, f(x)) \in \Gamma$ giace al di sopra della retta r_ε, dove Γ è il grafico della funzione f.

Il diagramma cartesiano Γ della funzione $f(x)$ interseca la retta r_+ nei punti le cui ascisse sono tali che:

$$x + 2\pi \sin x = x + 2\pi \Longleftrightarrow \sin x = 1$$

Cioè:

$$x'_k = \frac{\pi}{2}(1 + 4k), \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

L'intersezione di Γ con r_- avviene, invece, nei punti di ascissa:

$$x''_k = \frac{\pi}{2}(3 + 4k), \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Siccome stiamo considerando l'intervallo $[0, +\infty)$, le precedenti si riscrivono:

$$x'_n = \frac{\pi}{2}(1 + 4n), \, x''_n = \frac{\pi}{2}(3 + 4n), \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

avendosi $x''_n > x'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Determiniamo i valori assunti da f nei punti x'_n e x''_n rispettivamente.

$$\begin{aligned} f(x'_n) &= \frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1) = \frac{5}{2}\pi + 2\pi n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ f(x''_n) &= \frac{3\pi}{2} + 2\pi(n-1) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

da cui:

$$f(x'_n) - f(x''_n) = 3\pi, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi, la differenza $f(x'_n) - f(x''_n)$ è indipendente da n ed è pari a 3π. Risulta:

$$x''_n > x'_n, \quad f(x''_n) < f(x'_n), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

cosicchè:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon + 2\pi \mid x''_n > x'_n > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x'_n) > \ f(x''_n) > \varepsilon, \tag{5}$$

come illustrato in fig. 1. Intuitivamente, il comportamento (5) è dovuto al fatto che la funzione, per $x \to +\infty$, tende a $+\infty$ "oscillando". In fig. 3 riportiamo il diagramma cartesiano della funzione per $x \in [-7\pi, 7\pi]$. Si tratta, dunque, di un'oscillazione sinusoidale tra le rette r_- e r_+.

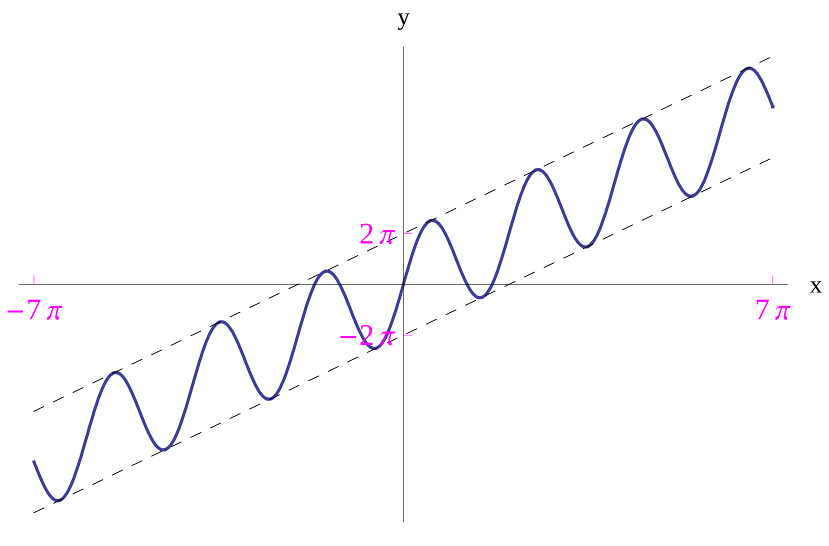


Figura 3: Andamento del grafico di $f(x) = x + 2\pi \sin x$ nell'intervallo $[-7\pi, 7\pi]$.

Quindi, mentre nel caso della funzione $2\pi \sin x$, che è non regolare per $|x| \to +\infty$, la $f(x) = x + 2\pi \sin x$ risulta essere regolare per $|x| \to +\infty$. Diamo una giustificazione intuitiva a tale comportamento. Il termine non periodico *ruota* la regione contenente il grafico attorno all'origine, per cui la funzione perdendo la sua periodicità diviene regolare all'infinito. Ciò può essere visto controllando la rotazione attraverso un parametro $m \in \mathbb{R}$. A tale scopo, consideriamo la funzione:

$$f_m(x) = mx + 2\pi \sin x \tag{6}$$

Il grafico Γ è un'oscillazione sinusoidale tra le rette:

$$r_+ : y = mx + 2\pi, \ r_- : y = mx - 2\pi$$

La regione contenente Γ è:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \ mx - 2\pi \leq y \leq mx + 2\pi\right\} \tag{7}$$

Il caso banale $m = 0$ riproduce la funzione periodica $f(x) = 2\pi \sin x$ e la regione (7) diviene:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \ -2\pi \leq y \leq +2\pi\right\},$$

cioè la striscia orizzontale compresa tra le rette orizzontali $r_+ : y = 2\pi, \ r_- : y = -2\pi$. Per $m \neq 0$ la regione $\mathcal{R}$ ruota attorno all'origine di un angolo $\arctan m$. Nelle figg. 4-5 riportiamo rispettivamente i casi $m = \frac{1}{10}$ e $m = -\frac{1}{10}$.

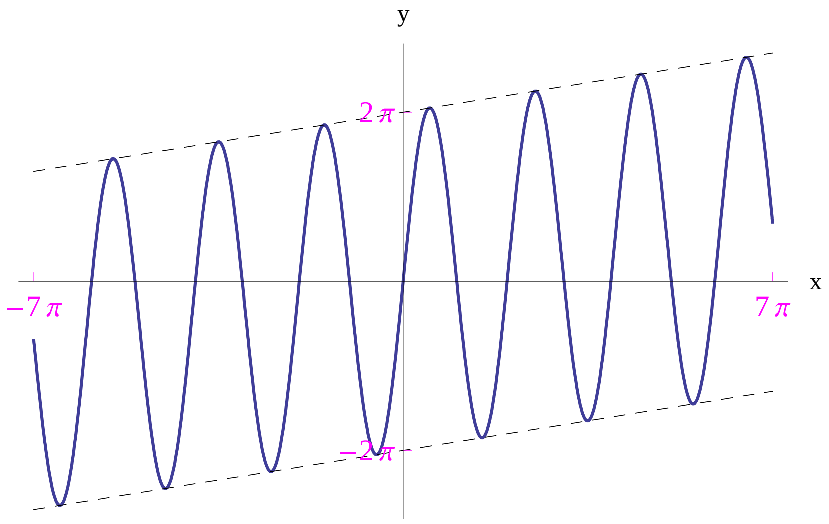


Figura 4: Andamento del grafico di $f(x) = mx + 2\pi \sin x$ nell'intervallo $[-7\pi, 7\pi]$. Qui è $m = \frac{1}{10}$, per cui la regione (7) è ruotata attorno all'origine in senso antiorario, di un angolo $\arctan \frac{1}{10}$.

Determiniamo il valore assunto da f_m nei punti (4). Abbiamo:

$$f_m(x'_n) = m\frac{\pi}{2}(1 + 4n) + 2\pi = \frac{\pi}{2}(m + 4) + 2\pi mn$$
$$f_m(x''_n) = m\frac{\pi}{2}(3 + 4n) - 2\pi = \frac{\pi}{2}(3m - 4) + 2\pi mn$$

Quindi, per un assegnato m:

$$f_m(x'_n) - f_m(x''_n) = (4 - m)\pi, \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

cosicchè se assumiamo (senza perdita di generalità) $m > 0$:

$$\left.\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon = \frac{1}{m}(\varepsilon + 2\pi) \mid x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f_m(x) \geq mx - 2\pi > \varepsilon + 2\pi - 2\pi = \varepsilon\right)$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$$

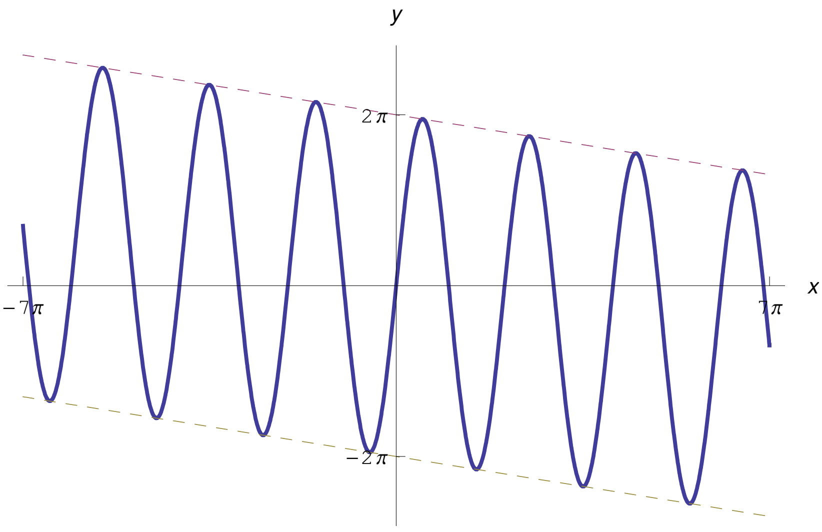


Figura 5: Andamento del grafico di $f(x) = mx + 2\pi \sin x$ nell'intervallo $[-7\pi, 7\pi]$. Qui è $m = -\frac{1}{10}$, per cui la regione (7) è ruotata attorno all'origine in senso orario, di un angolo $\arctan \frac{1}{10}$.

e

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon = \frac{1}{m}(\varepsilon + 2\pi) \mid x''_n > x'_n > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f_m(x'_n) > f_m(x''_n) > \varepsilon \tag{9}$$

Per $m = 4$ la differenza $f_m(x'_n) - f_m(x''_n)$ si annulla e per $m > 4$ inverte il proprio segno:

$$\begin{aligned} f_m(x''_n) &= f_m(x'_n), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ m = 4 \\ f_m(x''_n) &> f_m(x'_n), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ m > 4, \end{aligned}$$

In fig. 6 riportiamo il grafico di $f_m(x)$ per $m = 4$.

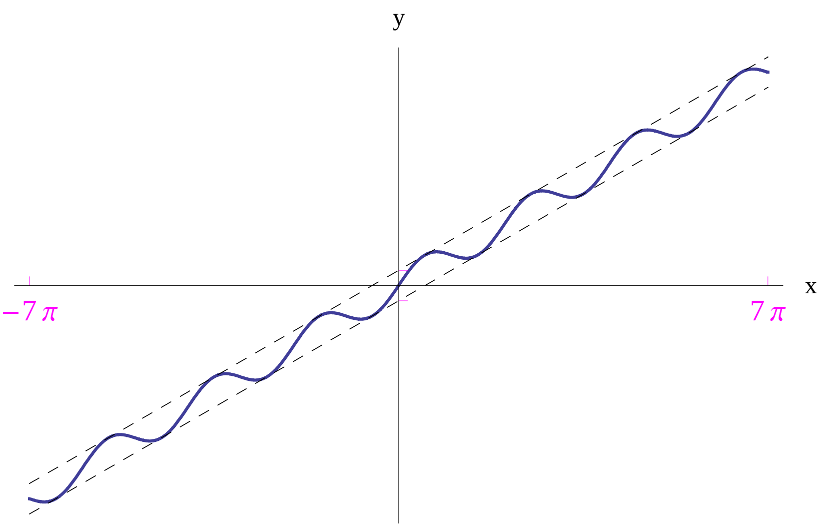


Figura 6: Andamento del grafico di $f(x) = mx + 2\pi \sin x$ nell'intervallo $[-7\pi, 7\pi]$. per $m = 4$.

3 La trasformata di Fourier di $f(t) = t + 2\pi \sin \omega_0 t$

Come è noto, la trasformata di Fourier di $f(t) = \sin \omega_0 t$, è una delta di Dirac $\delta(\omega - \omega_0)$, giacchè l'unica componente di Fourier è la funzione medesima. Nel caso in esame, la funzione $f(t) = t + 2\pi \sin \omega_0 t$ non è periodica e non è nemmeno di quadrato sommabile, per cui la trasformata di Fourier non esiste come funzione, ma come distrubuzione. Inoltre la non periodicità, implica che non coinvolge una delta di Dirac come singolo termine. Chiediamo allora a Mathematica di calcolare la TF:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \mathcal{F}_t [f(t)] \\ &= i\sqrt{2g\pi^3}\delta(\omega - \omega_0) - i\sqrt{2g\pi^3}\delta(\omega + \omega_0) - i\sqrt{2\pi}\frac{d}{d\omega}\delta(\omega) \end{aligned}$$

A questo punto, è preferibile definire questa funzione:

$$f(t) = \begin{cases} t + 2\pi \sin \omega_0 t, & \text{se} \quad t \in [-a, a] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \tag{10}$$

per poi studiare il comportamento della trasformata di Fourier per $a \to +\infty$. Per ogni a finito, si ha:

$$\begin{aligned} g_a(\omega) &= i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^4 - \omega^2\omega_0^2} \times \\ &\times [\omega_0^2 - \omega^2 - 2\pi\omega^2\omega_0 \cos(a\omega_0)\sin(a\omega) \\ &+ \omega\cos(a\omega)\left(a\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + 2\pi\omega^2 \sin(a\omega_0)\right)(-1 + U(a)), \end{aligned}$$

dove $U(a)$ è la funzione unit step. Ad esempio, per $a = 10$, otteniamo il grafico di fig. 7

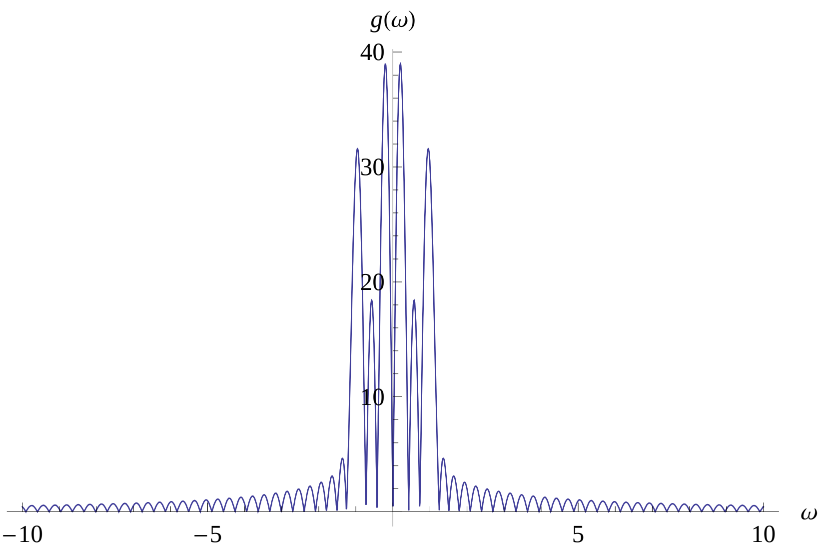


Figura 7: Grafico di $|g(\omega)|$, dove $g(\omega)$ è la TF della funzione (10).

Il file contenente il codice Mathematica può essere prelevato da questa risorsa online.