

# Un esempio di trasformata di Fourier

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Proponiamo un semplice esempio in modo da capire i concetti fondamentali, che ci darà tra l'altro, la possibilità di calcolare la trasformata a mano, cioè senza eseguire calcoli mostruosi.

Supponiamo di avere una grandezza  $y$  variabile in funzione del tempo  $t$ , secondo la legge:

$$f(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t, & \text{se } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & \text{se } t \notin \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \end{cases}, \quad (1)$$

essendo  $\omega_0$  la frequenza angolare, come riportato in fig. 1.

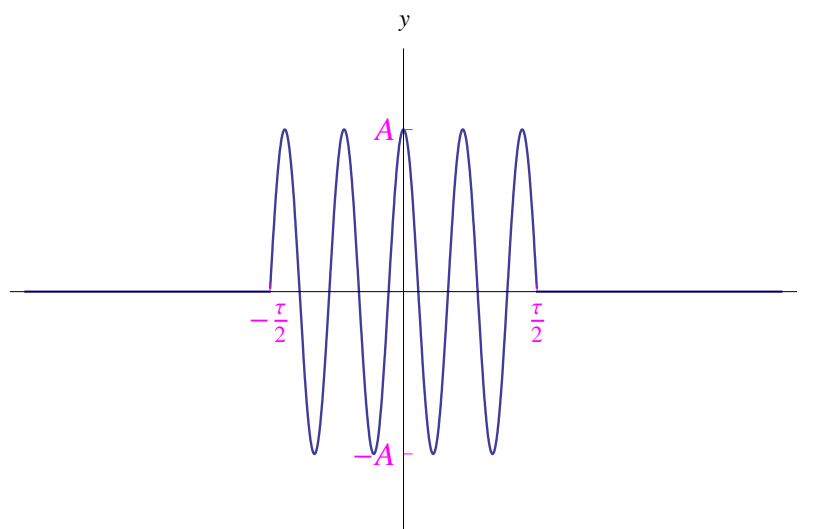


Figura 1: Andamento in funzione del tempo della grandezza  $y$  data dalla (1).

La grandezza  $f(t)$  non è periodica, ma è tuttavia esprimibile attraverso uno sviluppo in integrale di Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

da cui vediamo che  $f(t)$  si esprime come una sovrapposizione lineare di infiniti termini monocromatici (o armonici o *componenti di Fourier*) di frequenza  $\omega$  variabile da  $-\infty$  a  $+\infty$ . La funzione  $g(\omega)$  è continua in  $(-\infty, +\infty)$  ed è tale che  $g(\omega) d\omega$  è l'ampiezza delle componenti di Fourier la cui frequenza è compresa tra  $\omega$  e  $\omega + d\omega$ . Ne consegue che la funzione  $g(\omega)$  è la *densità spettrale* nota anche come *trasformata di Fourier* della  $f(t)$ . Invertendo la (2):

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

Per determinare la densità spettrale della (1) utilizziamo la notazione complessa:

$$f(t) = \begin{cases} A e^{i\omega_0 t}, & \text{se } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & \text{se } t \notin \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \end{cases} \quad (4)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 g(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} e^{i(\omega_0 - \omega)t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} [e^{i(\omega_0 - \omega)\frac{\tau}{2}} - e^{-i(\omega_0 - \omega)\frac{\tau}{2}}] \\
 &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{2i \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau\right)}{i(\omega_0 - \omega)}
 \end{aligned}$$

Cioè

$$g(\omega) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right)}{\omega - \omega_0} \quad (5)$$

Tale funzione è definita in  $\mathbb{R} - \{\omega_0\}$ . Studiamo il comportamento in un intorno di  $\omega_0$ :

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} g(\omega) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right)}{\omega - \omega_0}$$

Eseguendo il cambio di variabile  $x = \frac{\omega - \omega_0}{2}\tau$ , si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right)}{\omega - \omega_0} = \frac{\tau}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\tau}{2}$$

Quindi:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} g(\omega) = \frac{A\tau}{\sqrt{2\pi}}$$

Prolungando per continuità:

$$g(\omega) = \begin{cases} A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right)}{\omega - \omega_0}, & \text{se } \omega \neq \omega_0 \\ \frac{A\tau}{\sqrt{2\pi}}, & \text{se } \omega = \omega_0 \end{cases} \quad (6)$$

Notiamo che  $\omega_0$  è un punto di massimo assoluto per  $g(\omega)$ , mentre i punti di massimo relativo si ottengono risolvendo:

$$\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right) = 1,$$

cioè:

$$\omega_k = \omega_0 + \frac{\pi}{\tau} (1 + 4k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre dall'espressione analitica di  $g(\omega)$  vediamo che tale funzione è un'oscillazione sinusoidale modulata da  $(\omega - \omega_0)^{-1}$ , come illustrato in fig. 2.

Inoltre, dalla fig. 2 vediamo che il contributo dominante a  $f(t)$  proviene dalle componenti di Fourier con frequenza prossima a  $\omega_0$ . D'altra parte, al crescere della durata  $\tau$  del segnale, la densità spettrale diviene progressivamente più piccata intorno a  $\omega_0$ , come mostrato dal grafico di fig. 3.

Al limite:

$$\frac{A\tau}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} +\infty \implies g(\omega) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} A \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \omega_0),$$

dove  $\delta(\omega - \omega_0)$  è la funzione delta di Dirac centrata in  $\omega_0$ . In tal caso, dalla (2) abbiamo:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= A e^{i\omega_0 t},
 \end{aligned}$$

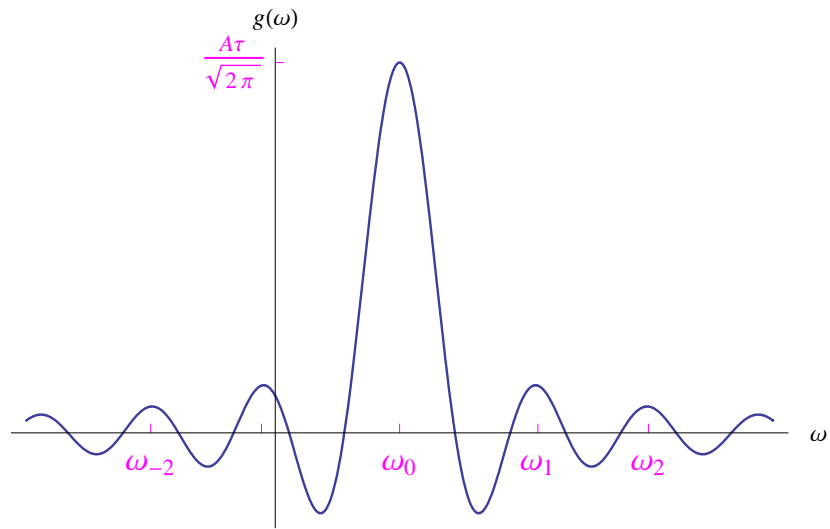


Figura 2: Andamento della densità spettrale della grandezza  $y = f(t)$  data dalla (1).

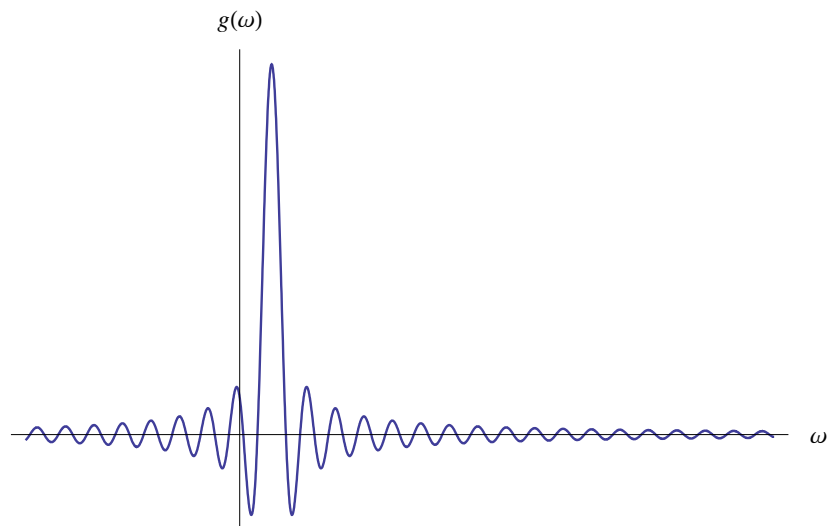


Figura 3: All'aumentare della durata  $\tau$ , la densità spettrale diviene estremamente piccata intorno a  $\omega_0$ . Ciò vuol dire che il contributo dominante a  $f(t)$  proviene dalle componenti di Fourier con  $\omega \simeq \omega_0$ . Viceversa, per  $|\omega - \omega_0| \gg 1$ , il contributo è trascurabilmente piccolo.

---

da cui prendendo la parte reale:

$$f(t) = A \cos \omega_0 t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Viceversa, al diminuire di  $\tau$  la distribuzione  $g(\omega)$  delle frequenze tende ad allargarsi, come mostrato in fig. 4.

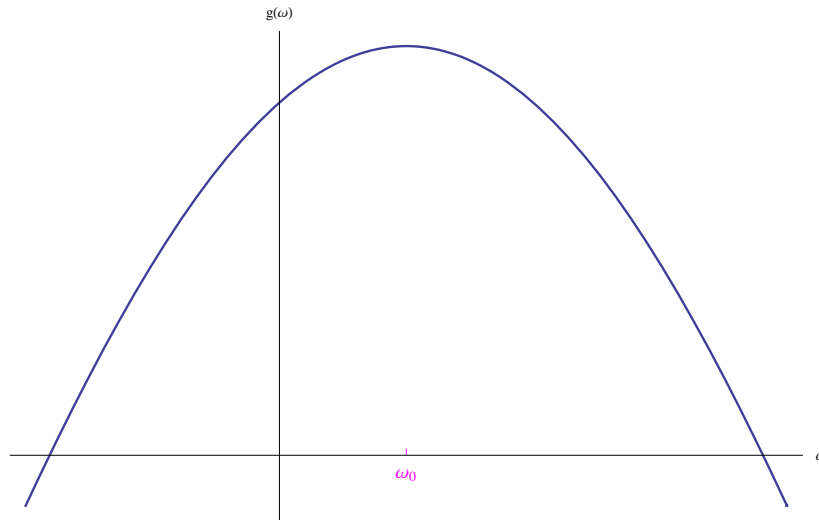


Figura 4: Al diminuire della durata  $\tau$ , la densità spettrale tende ad allargarsi intorno a  $\omega_0$ . Ciò vuol dire che le componenti di Fourier con  $|\omega - \omega_0| \gg 1$  forniscono un contributo non trascurabile.

Per  $\tau \rightarrow 0$ , abbiamo un segnale  $y = f(t)$  impulsivo, i.e. deltiforme:  $y = A\delta(t)$  a cui contribuiscono tutte le componenti di Fourier con  $\omega$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Infatti:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega \cdot 0} \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$