

Appunti di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Nell'esercizio precedente abbiamo utilizzato le formule parametriche per risolvere un'assegnata forma indeterminata. Tale procedimento è applicabile quando la funzione di cui si vuole calcolare il limite dipende da x esclusivamente attraverso le funzioni trigonometriche. Cioè

$$f(x) = F(\sin x, \cos x, \tan x, \dots) \quad (1)$$

Ad esempio nell'esercizio precedente, avevamo

$$F(\sin x, \cos x) = \frac{1 - \cos x - \sin x}{1 - \cos x + \sin x} \quad (2)$$

Qui F è una funzione razionale fratta di $\sin x, \cos x$, per cui l'applicazione delle formule parametriche restituisce una funzione razionale fratta della variabile t , che è più semplice da manipolare. D'altra parte, se l'espressione analitica di F è comunque complicata, tale sarà la funzione espressa in termini di variabile parametrica. Ad esempio

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \sin^3 x (1 + \cos^5 x) (1 - \sin^4 x)}{1 - \cos x + \sin^5 x \cos^6 x} \quad (3)$$

Applicando le formule parametriche

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{8t^3}{(1+t^2)^3} \left[1 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^5 \right] \left[1 - \frac{16t^4}{(1+t^2)^4} \right]}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{32t^5}{(1+t^2)^5} - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^6} \quad (4)$$

Sviluppando i vari termini, magari utilizzando un sistema di computer algebra, si perviene al limite del rapporto di due polinomi $p(t)$ e $q(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= t^{22} + 11t^{20} + 55t^{18} - 40t^{17} + 165t^{16} - 160t^{15} + 330t^{14} \\ &\quad + 320t^{13} + 462t^{12} - 480t^{11} + 462t^{10} + 752t^9 - 330t^8 \\ &\quad - 352t^7 + 165t^6 + 55t^4 - 32t^3 + 11t^2 - 87t + 1 \\ q(t) &= (1+t^2)^2 (t^{18} + 9t^{16} + 36t^{14} + 16t^{13} + 84t^{12} + 80t^{11} + 126t^{10} \\ &\quad - 160t^9 + 126t^8 + 160t^7 + 84t^6 + 80t^5 + 36t^4 + 16t^3 + 9t^2 + 1), \end{aligned} \quad (5)$$

da cui

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p(t)}{q(t)} = 1 \quad (6)$$