Teorema del Coriolis

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

In una lezione precedente abbiamo visto che per ogni funzione vettoriale derivabile $\mathbf{u}(t)$, si ha

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \tag{1}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$ un vettore che ci dà un'informazione sulla rapidità di variazione degli assi coordinati x', y', z' del sistema rotante K' rispetto agli assi x, y, z del sistema fisso K. Per scoprire il significato fisico di tale grandezza, definiamo i seguenti operatori di derivazione:

$$D_a = \left.\frac{d}{dt}\right|_a \quad \text{(operatore di derivazione assoluta)}$$

$$D_r = \left.\frac{d}{dt}\right|_r \quad \text{(operatore di derivazione relativa)}$$

Per quanto precede

$$D_a = D_r + \boldsymbol{\omega}\wedge \tag{2}$$

Nel caso particolare del vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ di una particella, si ha

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \omega \wedge \mathbf{r}$$

in cui riconosciamo il principio dei moti relativi (§ **??**). Ne consegue che nel caso di un sistema di riferimento rotante, la velocità di trascinamento è

$$\mathbf{v}_\tau = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \tag{3}$$

per cui appare chiaro il ruolo svolto dal vettore $\boldsymbol{\omega}$: è la velocità angolare di K' rispetto a K. Più precisamente, K' ruota attorno a un asse fisso. Per determinare la relazione tra accelerazione assouta e relativa, premettiamo la seguente proposizione:

Proposizione 1 *L'accelerazione angolare assoluta coincide con l'accelerazione angolare relativa.*

Dimostrazione. L'asserto segue immediatamente dalla (1) per $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$. ■

Tale proposizione suggerisce di denotare con $\boldsymbol{\alpha}$ l'accelerazione assoluta:

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{4}$$

Ciò premesso, dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 2 *(***Teorema del Coriolis***)*
L'accelerazione assoluta di un punto materiale che si muove rispetto a K e a K', è

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_{CC}, \tag{5}$$

dove $\mathbf{a}_a$ e $\mathbf{a}_r$ sono rispettivamente l'accelerazione assoluta e relativa, mentre

$$\mathbf{a}_{CC} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \tag{6}$$

L'accelerazione di trascinamento è

$$\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{r} + \mathbf{a}_c \tag{7}$$

essendo

$$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \tag{8}$$

Dimostrazione. Scriviamo il principio dei moti relativi nel formalismo degli operatori di derivazione assoluta e relativa:

$$D_a \mathbf{r} = D_r \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

Applichiamo, quindi, a primo e secondo membro l'operatore di derivazione assoluta:

$$\begin{aligned} D_a \left(D_a \mathbf{r} \right) &= D_a \left(D_r \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \right) \\ &= \left(D_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \right) \left(D_r \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \right) \end{aligned}$$

Tenendo conto della linearità dell'operatore di derivazione, si ha:

$$D_a^2 \mathbf{r} = D_r^2 \mathbf{r} + D_r \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \right) + \boldsymbol{\omega} \wedge D_r \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \right) \tag{9}$$

Applicando note regole di derivazione

$$D_r \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \right) = \left(D_r \boldsymbol{\omega} \right) \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge D_r \mathbf{r}$$

Per la proposizione 1:

$$D_r \boldsymbol{\omega} = D_\alpha \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha}$$

mentre

$$D_r \mathbf{r} = \mathbf{v}_r$$

cioè la velocità relativa. L'asserto segue immediatamente osservando che il termine a primo membro della (9) è l'accelerazione assoluta, mentre $D_r^2 \mathbf{r} = \mathbf{a}_r$ ovvero l'accelerazione relativa. ■

Definizione 3 *La grandezza*

$$\mathbf{a}_{CC} = 2 \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$$

*è l'***accelerazione di Coriolis** *o* **accelerazione complementare***; il termine*

$$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \right)$$

*è l'***accelerazione centripeta** *; il termine* $\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r}$ *è* **accelerazione lineare***.*

Il teorema del Coriolis ci dice che l'accelerazione assoluta non è semplicemente la risultante dell'accelerazione relativa e dell'accelerazione di trascinamento, come nel caso di un moto di trascinamento puramente traslatorio, ma differisce dalla predetta risultante per il termine complementare $\mathbf{a}_{cc}$.

In generale, se K' compie un moto di traslazione e di rotazione, denotando con $\mathbf{R}(t)$ il vettore posizione di O' (rispetto a K), l'accelerazione di trascinamento è data

$$\mathbf{a}_\tau = \mathbf{a}_* + \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{r} + \mathbf{a}_c \tag{10}$$

dove $\mathbf{a}_* = \ddot{\mathbf{R}}$, i.e. l'accelerazione assoluta di O'.

Esaminiamo alcuni casi particolari. Per un qualunque moto di trascinamento rotatorio per il quale la velocità angolare è parallela al vettore velocità relativa della particella, l'accelerazione di Coriolis è nulla, mentre l'accelerazione di trascinamento è

$$\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r} \tag{11}$$

giacchè si annulla anche l'accelerazione centripeta.

Nel caso di *quiete relativa* i.e. $\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ si ha nuovamente $\mathbf{a}_{CC} = \mathbf{0}$