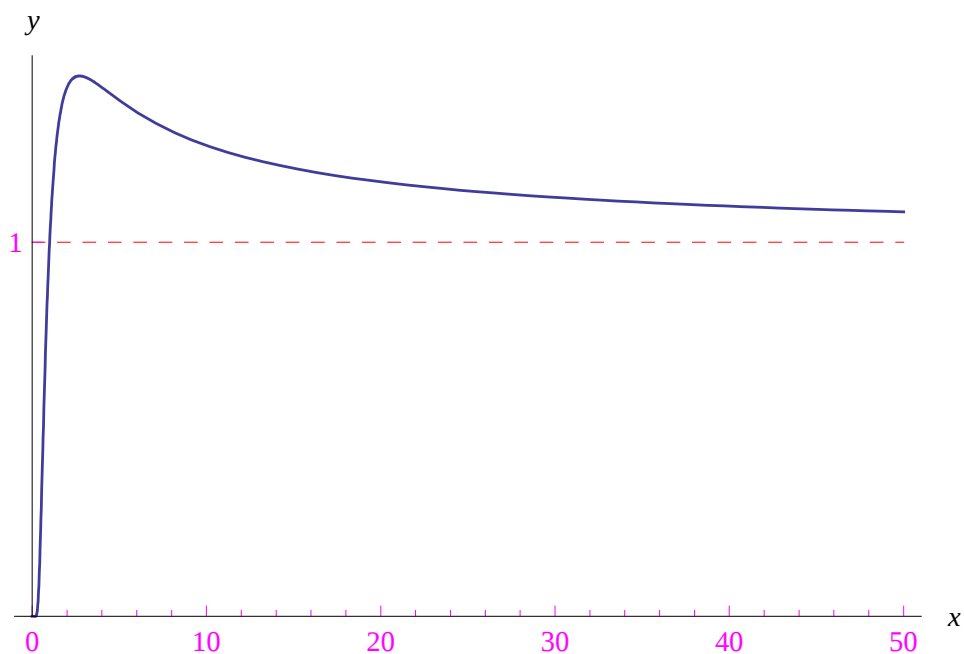


## Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

## Forme indeterminate $0^0$ , $1^\infty$ , $\infty^0$

Marcello Colozzo



Consideriamo una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  la cui espressione analitica è:

$$f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)},$$

essendo  $\varphi$  e  $\psi$  funzioni reali.

**Teorema 1** Se  $x_0$  è punto di accumulazione per  $X$  e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lambda_1 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lambda_2,$$

allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x)}$$

**Dimostrazione.** Scriviamo:

$$f(x) = e^{\ln \varphi(x)^{\psi(x)}} = e^{\psi(x) \ln \varphi(x)},$$

cosicchè:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\psi(x) \ln \varphi(x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow x_0} [\psi(x) \ln \varphi(x)]} \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [\psi(x) \ln \varphi(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \ln \varphi(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) \ln \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \\ &= \lambda_2 \ln \lambda_1, \end{aligned}$$

Cioè:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = e^{\lambda_2 \ln \lambda_1} = \lambda_1^{\lambda_2}$$

■

Osserviamo che  $\varphi(x)^{\psi(x)}$  si presenta in una forma indeterminata quando il prodotto  $\psi(x) \ln \varphi(x)$  si presenta nella forma indeterminata  $0 \cdot \infty$ . Ciò accade in tre casi distinti:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0 \implies \varphi(x)^{\psi(x)}$  si presenta nella forma indeterminata  $0^0$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1 \implies \varphi(x)^{\psi(x)}$  si presenta nella forma indeterminata  $1^\infty$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = +\infty \implies \varphi(x)^{\psi(x)}$  si presenta nella forma indeterminata  $\infty^0$

**Esempio 2** Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$$

Riesce:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}$$

Vedremo in seguito che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$$

Il grafico della funzione  $x^{1/x}$  è riportato in fig. 1.

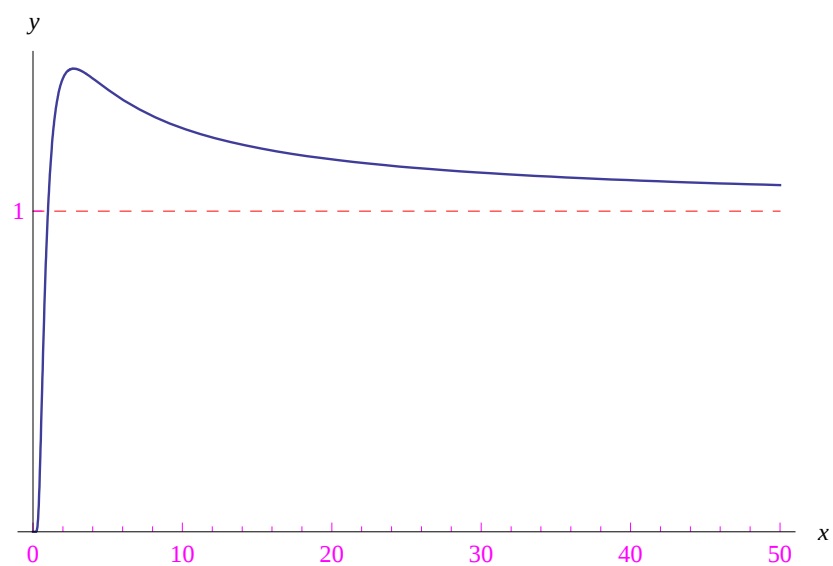


Figura 1: Diagramma cartesiano di  $x^{1/x}$ . La retta  $y = 1$  è asintoto orizzontale a destra.