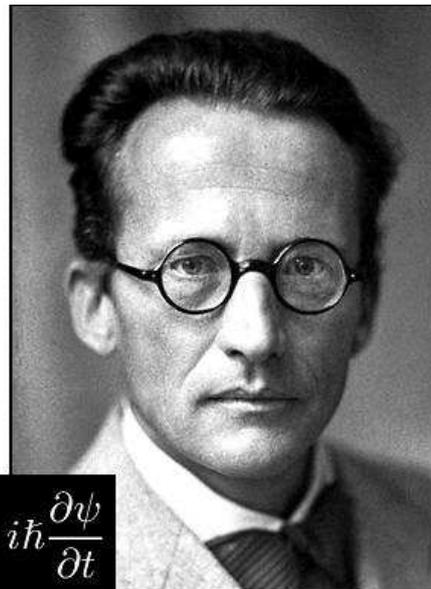


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Introduzione al formalismo matematico della Meccanica Quantistica

Marcello Colozzo



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x) \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Indice

1	La nozione di spazio funzionale	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Moto di un punto nello spazio ordinario	3
1.3	Lo spazio funzionale $C([a, b])$	4
1.4	Endomorfismi in $C^p([a, b])$	8
1.4.1	Autofunzioni e autovalori	10
1.4.2	Polinomi di Legendre	11
1.4.3	I polinomi di Hermite	12
2	Il formalismo matematico della Meccanica Quantistica	14
2.1	“Moto” di un “punto” in uno spazio funzionale	14
2.2	Traslazione spaziale ed evoluzione temporale	18
2.3	Le osservabili posizione e impulso. L’equazione di Schrödinger	24
2.4	Il tempo quale osservabile quantistica	28
2.5	Sintesi dei risultati	29
2.6	Interpretazione statistica della funzione d’onda	30
2.7	Ipotesi di De Broglie	33
2.8	Il concetto di onda di probabilità. La mitragliatrice di Born	35
2.9	L’esperienza della doppia fenditura	36
2.10	Il principio di indeterminazione di Heisenberg	39
2.10.1	Diffrazione attraverso una fenditura	40

Capitolo 1

La nozione di spazio funzionale

1.1 Introduzione

Il presente capitolo si propone di introdurre con metodi elementari la nozione di *spazio funzionale* ovvero di quell'ente matematico che è il principale oggetto di studio dell'*Analisi Funzionale*, una branca della matematica sviluppatasi nella prima metà del secolo scorso. Tale disciplina è parte integrante del formalismo matematico della Meccanica Quantistica. Incidentalmente, nel 1938 **Ettore Majorana** – titolare della cattedra di Fisica Teorica presso l'Università di Napoli – nei suoi *Appunti per la prolusione ai corsi* [1], scriveva:

Per esporre la meccanica quantistica nel suo stato attuale esistono due metodi pressoché opposti. L'uno è il cosiddetto metodo storico: ed esso spiega in qual modo, per indicazioni precise e quasi immediate dell'esperienza, sia sorta la prima idea del nuovo formalismo; e come questo si sia successivamente sviluppato in una maniera obbligata assai più dalla necessità interna che non del tenere conto di nuovi decisivi fatti sperimentali. L'altro metodo è quello matematico, secondo il quale il formalismo quantistico viene presentato fin dall'inizio nella sua più generale e perciò più chiara impostazione, e solo successivamente, se usato in maniera esclusiva, presenta inconvenienti molto gravi.

È un fatto che, quando sorse la meccanica quantistica, essa incontrò per qualche tempo presso molti fisici sorpresa, scetticismo e perfino incomprensione assoluta, e ciò soprattutto perché la sua consistenza logica, coerenza e sufficienza appariva, più che dubbia, inafferrabile. Ciò venne anche, benché del tutto erroneamente, attribuito a una particolare oscurità di esposizione dei primi creatori della nuova meccanica; ma la verità è che essi erano dei fisici, e non dei matematici, e che per essi l'evidenza e giustificazione della teoria consisteva soprattutto nell'immediata applicabilità ai fatti sperimentali che l'avevano suggerita.

[...]

Questi strumenti matematici in gran parte preesistevano al sorgere della nuova meccanica (come opera disinteressata di matematici che non prevedevano un così eccezionale campo di applicazione), ma la meccanica quantistica li ha «sforzati» e ampliati per soddisfare alle necessità pratiche.

Gli “strumenti matematici” a cui faceva riferimento Majorana, sono fondamentalmente gli *spazi di Hilbert* e altri enti che sono oggetto di studio dell'Analisi funzionale che per quanto precede, si sviluppò proprio in quel periodo storico. Si tratta, dunque, di una coincidenza significativa.

Rispetto all'Analisi matematica, l'Analisi funzionale "sale di un livello", nel senso che la prima studia fundamentalmente *funzioni di punto*, cioè oggetti del tipo:

$$f : P \in \mathbb{K}^n \rightarrow f(P) \in \mathbb{K}, \quad (1.1)$$

dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Nel primo caso abbiamo le usuali funzioni reali di variabili reali:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

In sostanza, f è un ente che applicato ad un punto di un assegnato spazio che può essere \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , restituisce univocamente un punto di \mathbb{R} o di \mathbb{C} . In Analisi funzionale, invece, si considerano **spazi topologici** i cui "punti" sono funzioni nel senso dell'Analisi matematica. In generale:

$$\mathbb{S} = \{f \mid f \text{ verifica la proprietà } \mathcal{P}\} \quad (1.2)$$

La proprietà \mathcal{P} può essere, ad esempio, la continuità o la sommabilità in un assegnato insieme di punti nel senso dell'Analisi matematica. L'insieme \mathbb{S} viene quindi strutturato come **spazio vettoriale** introducendo le usuali leggi di composizione e relativi assiomi, dopodiché la definizione di un prodotto interno (o prodotto scalare) conferisce al predetto spazio una struttura di spazio euclideo od unitario (detto anche di Hilbert). Quest'ultimo caso si verifica quando il sostegno dello spazio vettoriale è il campo complesso. In questo modo, gli elementi dello spazio \mathbb{S} cioè le funzioni f , svolgono il ruolo di "punti" di \mathbb{S} (o meglio, di vettori posizione). Si può quindi sviluppare un'Analisi matematica su \mathbb{S} . Prima di procedere, rivediamo alcune nozioni che caratterizzano lo spazio ordinario i.e. lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 .

1.2 Moto di un punto nello spazio ordinario

Nello spazio fisico visualizziamo il movimento attraverso il moto di un punto (o di un insieme di punti) rispetto a un assegnato sistema di riferimento. Un esempio immediato è dato dal moto di una particella lungo una retta (asse x). Per "particella" intendiamo un ente fisico privo di struttura interna schematizzato attraverso un punto geometrico. Nel caso in esame, il predetto punto si muove sull'asse x che a sua volta, è composto da ∞^1 punti. Denotando con x l'ascissa della particella, si ha:

$$x = x(t), \quad (1.3)$$

dove il parametro reale t svolge il ruolo di "tempo" misurato da un orologio in quiete rispetto al sistema di riferimento da cui si osserva il moto. Queste considerazioni si estendono immediatamente allo spazio ordinario, per cui l'equazione precedente si scrive:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad (1.4)$$

essendo \mathbf{x} il vettore posizione della particella in un generico istante. Riesce:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{e}_k, \quad (1.5)$$

dove $\{\mathbf{e}_k\}$ è il sistema di versori degli assi coordinati. Tale insieme è una base ortonormale di \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'} = \delta_{kk'}, \quad (1.6)$$

avendo denotato con \cdot il prodotto scalare canonico, mentre $\delta_{kk'}$ è la delta di Kronecker:

$$\delta_{kk'} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = k' \\ 0, & \text{se } k \neq k' \end{cases}$$

L'espressione di \mathbf{x} quale combinazione lineare dei vettori di base può essere modificata in una forma che ci risulterà utile nel seguito. Moltiplicando scalarmente primo e secondo membro della (1.5) per il \mathbf{e}_k :

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_k \cdot \sum_{k'=1}^3 x_{k'} \mathbf{e}_{k'} = \sum_{k'=1}^3 x_{k'} \delta_{kk'} = x_k, \quad (1.7)$$

per cui

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e}_k \quad (1.8)$$

Il prodotto scalare ci permette di definire una *norma* (o *lunghezza*):

$$\|\mathbf{x}\| = +\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (1.9)$$

e una *metrica* (o *distanza*):

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}, \quad (1.10)$$

essendo

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^3 y_k \mathbf{e}_k,$$

punti di \mathbb{R}^3 presi ad arbitrio. La (1.4) può essere scritta in termini di coordinate cartesiane:

$$x_k = x_k(t) \quad (1.11)$$

1.3 Lo spazio funzionale $C([a, b])$

Nel paragrafo 1.1 abbiamo esaminato la possibilità di sviluppare un'Analisi matematica su uno spazio \mathbb{S} [cfr. eq. (1.2)]. Per essere più specifici e senza perdita di generalità, consideriamo come spazio \mathbb{S} il seguente insieme di funzioni reali della variabile reale ξ :

$$C([a, b]) \stackrel{def}{=} \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ è continua in } [a, b]\} \quad (1.12)$$

Introduciamo le seguenti leggi di composizione:

$$\begin{aligned} + & : C([a, b]) \times C([a, b]) \longrightarrow C([a, b]) \\ & \quad (f, g) \longrightarrow (f+g) \in C([a, b]) \\ \cdot & : \mathbb{R} \times C([a, b]) \longrightarrow C([a, b]), \\ & \quad (\lambda, f) \longrightarrow (\lambda f) \in C([a, b]) \end{aligned} \quad (1.13)$$

così definite:

$$\begin{aligned} (f + g)(\xi) &= f(\xi) + g(\xi), \quad \forall f, g \in C([a, b]), \quad \forall \xi \in [a, b] \\ (\lambda f)(\xi) &= \lambda f(\xi), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in C([a, b]), \quad \forall \xi \in [a, b] \end{aligned} \quad (1.14)$$

È facile verificare che le (1.13) soddisfano gli assiomi di spazio vettoriale. Pertanto, le (1.13) introducono in $C([a, b])$ una struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} . Intuitivamente, una qualunque funzione $f(\xi)$ dello spazio $C([a, b])$ è un vettore a infinite componenti non numerabili ciascuna “etichettata” da ξ . Ciò può essere visto più rigorosamente eseguendo una decomposizione $\mathcal{D}([a, b])$ dell’intervallo $[a, b]$ per poi far tendere a zero la sua norma. Precisamente, assegnati i punti:

$$a = \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots < \xi_{N-1} < \xi_N = b,$$

l’intervallo $[a, b]$ risulta decomposto in $N - 1$ intervalli:

$$[a, b] = \bigcup_{k=2}^N [\xi_{k-1}, \xi_k]$$

Denotiamo con Δ la norma della decomposizione:

$$\Delta \stackrel{def}{=} \|\mathcal{D}([a, b])\| = \max_{k \in \{2, \dots, N\}} (\xi_k - \xi_{k-1}) > 0$$

È facile convincersi che per un assegnato $\Delta > 0$ esistono infinite decomposizioni con norma Δ . Ciò significa che una generica decomposizione non è individuata univocamente da Δ , ma dalla N -pla ordinata $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$. Dal momento che esistono infinite decomposizioni di $[a, b]$ con norma Δ , segue che esistono infinite N -ple ordinate $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ ciascuna delle quali individua univocamente la decomposizione. Esiste, dunque, una corrispondenza biunivoca tra l’insieme delle decomposizioni di $[a, b]$ con norma Δ e l’insieme \mathbb{R}^N . Come è noto, introducendo le usuali operazioni di addizione di elementi di \mathbb{R}^N e di moltiplicazione di uno scalare per un elemento di \mathbb{R}^N , tale insieme assume la struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} . La base canonica è composta dai vettori:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\dots \\ \mathbf{e}_N &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Se $f \in C([a, b])$ posto $f_k = f(\xi_k)$, si ha:

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N) \in \mathbb{R}^N, \tag{1.16}$$

o, ciò che è lo stesso

$$\mathbf{f} = \sum_{k=1}^N f_k \mathbf{e}_k \tag{1.17}$$

Cioè f_k sono le componenti del vettore \mathbf{f} nella base canonica. Eseguendo l’operazione di passaggio al limite per $\Delta \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f(\xi_k) = f(\xi)$$

Consideriamo ora una *equipartizione* di $[a, b]$, cioè una decomposizione $D_e([a, b])$ tale che:

$$\xi_k - \xi_{k-1} = \Delta, \quad \forall k \in \{2, \dots, N\}$$

È chiaro che in tal caso $\Delta = \frac{b-a}{N}$, per cui i punti della equipartizione sono generati da:

$$\xi_k = a + (k - 1) \Delta = a + (k - 1) \frac{b - a}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1 \tag{1.18}$$

Una equipartizione è univocamente determinata da Δ . Possiamo, quindi, considerare l'applicazione:

$$\begin{aligned} \theta &: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{N} \\ \theta &: \Delta \rightarrow \theta(\Delta) = \left\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \right\rfloor \end{aligned}$$

dove $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la parte intera. In altri termini, θ è una legge che a ogni $\Delta > 0$ associa univocamente l'intero positivo $\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor$ che è il numero di punti della equipartizione determinata da Δ . Quindi:

$$N = \left\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \right\rfloor \tag{1.19}$$

I punti generati dalla (1.18) compongono il vettore $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$. Tenendo conto della (1.19) si ha:

$$\left(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor} \right) \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor} \mid \xi_k - \xi_{k-1} = \Delta, \quad k = 2, \dots, N$$

Per quanto precede:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbb{R}^{\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor} = C([a, b])$$

Ciò implica:

$$\dim C([a, b]) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \dim \mathbb{R}^{\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \right\rfloor = +\infty$$

Ne consegue che lo spazio vettoriale $C([a, b])$ è infinito-dimensionale. Si noti che tale dimensionalità è infinita non numerabile, come appare dal seguente schema riassuntivo:

Discreto	Continuo
$\xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$	$\xi \in [a, b]$
$\mathbf{f} = (f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_N))$	$f(\xi) \in f([a, b])$

Cioè, nel continuo non possiamo enumerare le componenti, nel senso che la generica componente del vettore $f \in C([a, b])$ è individuata da ξ che varia con continuità in $[a, b]$. Lo spazio vettoriale $C([a, b])$ è spesso chiamato *spazio funzionale* (proprio perchè i suoi vettori sono funzioni).

Lo spazio vettoriale $C([a, b])$ può essere strutturato come spazio euclideo, applicando il procedimento di passaggio al limite per $\Delta \rightarrow 0$. Precisamente, partiamo dallo spazio vettoriale

$$\mathbb{R}^N = \{ \mathbf{f} = (f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_N)) \mid f \in C([a, b]) \} \tag{1.20}$$

Introduciamo nello spazio vettoriale \mathbb{R}^N il prodotto scalare canonico:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \sum_{k=1}^N f_k g_k, \quad \forall f, g \in C([a, b]), \tag{1.21}$$

che nel caso di una equipartizione di norma Δ , può essere scritto come:

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor} f(\xi_k) g(\xi_k), \quad \forall f, g \in C([a, b]) \tag{1.22}$$

Eseguendo l'operazione di passaggio al limite per $\Delta \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor} f(\xi_k) g(\xi_k) = \int_a^b f(\xi) g(\xi) d\xi, \quad \forall f, g \in C([a, b]) \quad (1.23)$$

Ciò implica che $\int_a^b f(\xi) g(\xi) d\xi$ è la generalizzazione al continuo del prodotto scalare $\sum_{k=1}^N f_k g_k$ in \mathbb{R}^N e come tale, definisce il prodotto scalare canonico in $C([a, b])$ che viene denotato con $\langle f, g \rangle$. Quindi:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(\xi) g(\xi) d\xi, \quad \forall f, g \in C([a, b]) \quad (1.24)$$

Il prodotto scalare permette di introdurre in $C([a, b])$ la nozione di ortogonalità:

$$f, g \text{ ortogonali} \iff \int_a^b f(\xi) g(\xi) d\xi = 0,$$

e la nozione di *norma* $\|f\|$:

$$\|f\| = +\sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (1.25)$$

e quindi una *metrica*

$$\rho(f, g) = \|f - g\|, \quad \forall f, g \in C([a, b]) \quad (1.26)$$

Ritorniamo per un attimo allo spazio vettoriale (1.20). La base canonica (1.15) è manifestamente ortonormale:

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k'} \rangle = \delta_{kk'} \quad (1.27)$$

Scriviamo ora la (1.17) per una equipartizione di norma Δ :

$$\mathbf{f} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor} f_k \mathbf{e}_k \quad (1.28)$$

È intuitivo porre

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{b-a}{\Delta} \rfloor} f_k \mathbf{e}_k = \int_a^b f(\xi) \mathbf{e}(\xi) d\xi,$$

essendo

$$\mathbf{e}(\xi) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbf{e}_k,$$

giacché per $\Delta \rightarrow 0$ l'indice discreto $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ diviene un indice continuo $\xi \in [a, b]$. Tuttavia questo procedimento di passaggio al limite distrugge la numerabilità della base $\{\mathbf{e}_k\}$:

$$\{\mathbf{e}_k\} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \{\mathbf{e}(\xi)\} \text{ la cui cardinalità è infinita non numerabile}$$

Congetturiamo l'esistenza di basi ortonormali di cardinalità infinita numerabile:

$$\exists \{u_n\} \subset C([a, b]) \mid \langle u_n, u_{n'} \rangle = \delta_{nn'},$$

cosicchè

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n \iff f(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n(\xi), \quad (1.29)$$

dove $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ sono le componenti del vettore f nella base $\{u_n\}$. Per ricavare tali componenti moltiplichiamo scalarmente primo e secondo membro dell'equazione precedente per u_n :

$$\langle u_n, f \rangle = \sum_{n'=1}^{+\infty} c_{n'} \delta_{nn'} = c_n \quad (1.30)$$

Ne consegue che l'espansione dell'elemento $f \in C([a, b])$ attraverso i vettori di base $\{u_n\}$ si scrive:

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u_n, f \rangle u_n, \quad (1.31)$$

che è l'analogo della (1.8) valida nell'usuale spazio vettoriale \mathbb{R}^3 . Esplicitando nella (1.30) il prodotto scalare:

$$c_n = \int_a^b f(\xi) u_n(\xi) d\xi \quad (1.32)$$

Per stabilire l'esistenza di basi ortonormali del tipo appena visto, è necessario introdurre la nozione di *autofunzione* di un *operatore lineare*. Ciò sarà l'argomento del prossimo paragrafo.

1.4 Endomorfismi in $C^p([a, b])$

Imponiamo una condizione più forte allo spazio funzionale $C([a, b])$, definendo $C^p([a, b])$ quale insieme delle funzioni continue in $[a, b]$ ed ivi dotate di derivate continue fino all'ordine $p \geq 2$. Sulla falsariga del procedimento del paragrafo precedente, tale insieme assume la struttura di spazio vettoriale euclideo infinito-dimensionale, dopo aver introdotto il prodotto scalare canonico:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(\xi) g(\xi) d\xi, \quad \forall f, g \in C^p([a, b])$$

Denotando con $end(C^p([a, b]))$ lo spazio vettoriale degli **endomorfismi** di $C^p([a, b])$:

$$\hat{A} \in end(C^p([a, b])) \iff \hat{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{A}(f) + \beta \hat{A}(g), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in C^p([a, b]) \quad (1.33)$$

In altri termini, \hat{A} è una legge che a ogni elemento $f \in C^p([a, b])$ associa univocamente un elemento $\hat{A}(f) \in C^p([a, b])$ o ciò che è lo stesso, è un'applicazione tra i due insiemi $C^p([a, b])$, e detta applicazione è lineare. Un endomorfismo è detto anche *operatore lineare*. Ad esempio l'applicazione

$$\hat{A}(f) = \xi f(\xi), \quad \forall f \in C^p([a, b]) \quad (1.34)$$

associa a una funzione $f \in C^p([a, b])$ la funzione $\xi f(\xi)$ quale elemento di $C^p([a, b])$. Verifichiamo la linearità di tale applicazione, definendo

$$h(\xi) = \alpha f(\xi) + \beta g(\xi), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in C^p([a, b]) \quad (1.35)$$

Segue

$$\hat{A}(h) = \xi h(\xi) = \xi [\alpha f(\xi) + \beta g(\xi)] = \alpha \xi f(\xi) + \beta \xi g(\xi)$$

Cioè

$$\hat{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{A}(f) + \beta \hat{A}(g),$$

da cui la linearità di (1.34). Dalla definizione (1.33) e dall'esempio appena esaminato, risulta che la linearità deriva dal modo in cui agisce l'applicazione \hat{A} sugli elementi di $C^p([a, b])$. Quest'ultimi possono ovviamente essere funzioni non lineari, per cui non dobbiamo confondere la linearità di \hat{A} con quella delle funzioni definite in $[a, b]$. Nel caso dell'applicazione (1.34) se, ad esempio, prendiamo la funzione manifestamente non lineare

$$f_1(\xi) = \ln(\sin \xi^2 + 1), \quad f \in C^\infty([0, 2]),$$

si ha

$$\hat{A}(f_1) = \xi \ln(\sin \xi^2 + 1)$$

Nel paragrafo 1.1 abbiamo asserito che rispetto all'Analisi matematica, l'Analisi funzionale "sale di livello". Tale asserzione deriva dalla seguente tabella comparativa:

Analisi matematica	Analisi funzionale
	$\hat{A}(f)$ ("funzioni")
$f(x)$ (funzioni)	f ("punti")
x (punti)	

Cioè in Analisi funzionale le funzioni svolgono il ruolo di "punti", per cui è possibile definire "funzioni" che agiscono sui "punti" di un assegnato spazio funzionale. Nello specifico si tratta di funzioni lineari che per quanto precede si chiamano operatori lineari. Una denominazione alternativa è *trasformazioni lineari*, giacché tali enti operano una trasformazione dello spazio funzionale in sè. Ad esempio, nel caso particolare dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , una qualunque rotazione degli assi coordinati è una trasformazione lineare delle coordinate dei punti. In generale, ci si può riferire non a uno spazio funzionale, ma a un qualunque spazio topologico sviluppando un'Analisi funzionale. I risultati noti dell'Analisi matematica, si possono poi ricavare considerando il caso particolare dello spazio euclideo \mathbb{R}^n .

Consideriamo

$$\hat{D}(f) = \frac{d}{d\xi} f(\xi), \quad \forall f \in C^p([a, b]) \tag{1.36}$$

Cioè l'operatore di derivazione, la cui linearità discende dalla regola di derivazione:

$$\frac{d}{d\xi} [\alpha f(\xi) + \beta g(\xi)] = \alpha \frac{d}{d\xi} f(\xi) + \beta \frac{d}{d\xi} g(\xi) \tag{1.37}$$

L'operazione di prodotto di operatori lineari è così definita:

$$(\hat{A}\hat{B})(f) \stackrel{def}{=} \hat{A}(\hat{B}(f)), \quad \forall f \in C^p([a, b]), \quad \forall \hat{A}, \hat{B} \in \text{end}(C^p([a, b])) \tag{1.38}$$

che a sua volta permette di definire la potenza *n-esima* \hat{A}^n di un operatore. Ad esempio, nel caso dell'operatore di derivazione:

$$\hat{D}^2(f) = \frac{d^2}{d\xi^2} f(\xi),$$

cioè l'operatore di derivazione seconda. Alcuni operatori sono invertibili:

$$\hat{A}^{-1} | \hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{A} \hat{A}^{-1} = \hat{1}, \tag{1.39}$$

dove $\hat{1}$ è l'operatore identità:

$$\hat{1}(f) = f, \quad \forall f \in C^p([a, b]) \tag{1.40}$$

1.4.1 Autofunzioni e autovalori

Premettiamo la seguente proposizione:

Proposizione 1 *Comunque prendiamo $\hat{A} \in \text{end}(C^p([a, b]))$, l'immagine di $C^p([a, b])$ attraverso \hat{A} :*

$$\hat{A}(C^p([a, b])) = \left\{ \hat{A}(f) \mid f \in C^p([a, b]) \right\} \subseteq C^p([a, b]),$$

è un sottospazio vettoriale di $C^p([a, b])$.

Dimostrazione. Presi ad arbitrio $f, g \in C^p([a, b])$ si ha $\hat{A}(f), \hat{A}(g) \in \hat{A}(C^p([a, b]))$ e in virtù della linearità (i.e. additività e omogeneità):

$$\begin{aligned} \hat{A}(f) + \hat{A}(g) &= \hat{A}(f + g) \in \hat{A}(C^p([a, b])) \\ \alpha \hat{A}(f) &= \hat{A}(\alpha f) \in \hat{A}(C^p([a, b])), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde l'asserto. ■

Siamo interessati a elementi $u_\lambda \in C^p([a, b]) - \{0\}$ tali che

$$\hat{A}(u_\lambda) = \lambda u_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.41)$$

Cioè l'applicazione di \hat{A} a u_λ si riduce alla moltiplicazione dello scalare λ per il vettore u_λ , che in tal caso si dirà **autovettore** (o **autofunzione**) corrispondente all'**autovalore** λ . L'insieme (eventualmente vuoto) degli autovalori definisce lo **spettro** dell'operatore \hat{A} :

$$\sigma(\hat{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \hat{A}(u_\lambda) = \lambda u_\lambda \right\} \subseteq \mathbb{R} \quad (1.42)$$

Consideriamo ora il sottoinsieme di $C^p([a, b])$:

$$V_\lambda = \left\{ u_\lambda \in C^p([a, b]) \mid \hat{A}(u_\lambda) = \lambda u_\lambda \right\} \quad (1.43)$$

Proposizione 2 *L'insieme (1.43) è un sottospazio vettoriale di $C^p([a, b])$.*

Dimostrazione. Presi ad arbitrio $u_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$ si ha:

$$\begin{aligned} \hat{A}(u_\lambda + v_\lambda) &= \hat{A}(u_\lambda) + \hat{A}(v_\lambda) = \lambda(u_\lambda + v_\lambda) \implies (u_\lambda + v_\lambda) \in V_\lambda \\ \hat{A}(\alpha u_\lambda) &= \alpha \hat{A}(u_\lambda) = \alpha \lambda u_\lambda = \lambda(\alpha u_\lambda) \implies (\alpha u_\lambda) \in V_\lambda \end{aligned}$$

onde l'asserto. ■

Definizione 3 *Il sottospazio V_λ si dice **autospatio** di \hat{A} corrispondente all'autovalore λ .*

La ricerca delle autofunzioni e degli autovalori di un operatore A si riconduce alla ricerca delle soluzioni dell'equazione (1.41) nota come *equazione agli autovalori*, la cui tipologia è ovviamente legata all'espressione analitica dell'operatore \hat{A} . Ad esempio, nel caso dell'operatore di derivazione abbiamo:

$$\hat{D}(u_\lambda) = \lambda u_\lambda \iff \frac{du_\lambda}{d\xi} = \lambda u_\lambda,$$

cioè l'equazione agli autovalori è un'equazione differenziale del primo ordine lineare. Integrando per separazioni di variabili otteniamo:

$$u_\lambda(\xi) = C e^{\lambda \xi}, \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad (1.44)$$

Cioè le autofunzioni di \hat{D} sono funzioni esponenziali, mentre lo spettro è

$$\sigma(\hat{D}) = \mathbb{R} \quad (1.45)$$

e per un assegnato $\lambda \in \sigma(\hat{D})$, esistono ∞^1 autofunzioni (1.44).

1.4.2 Polinomi di Legendre

Sia $\hat{A} \in \text{end}(C^p([-1, 1]))$ tale che

$$\hat{A}(f) = \left[2\xi \frac{d}{d\xi} - (1 - \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} \right] f(\xi), \quad \forall f \in C^p([-1, 1]) \quad (1.46)$$

L'equazione agli autovalori si scrive:

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 u}{d\xi^2} - 2\xi \frac{du}{d\xi} + \lambda u(\xi) = 0, \quad (1.47)$$

che è l'equazione di Legendre. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti variabili. Le soluzioni [2] sono i *polinomi di Legendre*

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.48)$$

in cui l'intero naturale n è tale che $\lambda = n(n + 1)$. Quindi

$$\hat{A}(P_n) = n(n + 1) P_n(\xi), \quad n \in \mathbb{N}$$

Di seguito alcuni polinomi di Legendre:

$$P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = x, \quad P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1), \quad P_3(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi), \dots \quad (1.49)$$

$\{P_n(\xi)\}$ un sistema di vettori ortogonali in $C^p([-1, 1])$ come mostrato in [2]:

$$\int_{-1}^1 P_n(\xi) P_{n'}(\xi) d\xi \neq 0 \iff n \neq n'$$

Passiamo ai polinomi normalizzati:

$$u_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} N_n P_n(\xi), \quad (1.50)$$

essendo N_n una costante di normalizzazione:

$$N_n > 0 \mid \langle u_n, u_n \rangle = 1 \iff N_n^2 \int_{-1}^1 P_n(\xi)^2 d\xi = 1,$$

da cui:

$$N_n = \left(\int_{-1}^1 P_n(\xi)^2 d\xi \right)^{-1/2} \quad (1.51)$$

Calcolando l'integrale:

$$N_n = \sqrt{\frac{2n + 1}{2}} \quad (1.52)$$

Quindi le autofunzioni normalizzate sono

$$u_n(\xi) = \sqrt{\frac{2n + 1}{2}} P_n(\xi) \quad (1.53)$$

Pertanto

$$\hat{A}(u_n) = n(n + 1) u_n(\xi), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.54)$$

$\{u_n\}$ è una base ortonormale di $C^p([-1, 1])$ con $p \geq 1$:

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n u_n \iff f(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} c_n P_n(\xi), \quad \forall f \in C^p([-1, 1]) \quad (1.55)$$

Le componenti di $f \in C^p([-1, 1])$ nella predetta base sono:

$$\begin{aligned} c_n &= \left\langle \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n, f \right\rangle = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \langle P_n, f \rangle \\ &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{-1}^1 P_n(\xi) f(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1.56)$$

1.4.3 I polinomi di Hermite

Sia $\hat{A} \in \text{end}(C^p(\mathbb{R}))$ definito da

$$\hat{A}(f) = \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right) f(\xi), \quad \forall f \in C^p(\mathbb{R}) \quad (1.57)$$

la cui equazione agli autovalori è

$$\left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right) u_\lambda = \lambda u_\lambda, \quad (1.58)$$

cioè l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti variabili:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) u = 0 \quad (1.59)$$

Seguendo [2] cerchiamo soluzioni del tipo

$$u(\xi) = H(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (1.60)$$

Sostituendo la (1.60) in (1.59) si perviene alla seguente equazione differenziale per $H(\xi)$:

$$H''(\xi) - 2\xi H'(\xi) + (\lambda - 1) H(\xi) = 0,$$

nota in Fisica Matematica come *equazione di Hermite*. Le sue soluzioni sono i *polinomi di Hermite*:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}, \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \quad (1.61)$$

per cui le autofunzioni di (1.57) sono

$$u_n(\xi) = H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad (1.62)$$

avendosi $\lambda = 2n + 1$. I polinomi di Hermite verificano la seguente relazione di ortogonalità rispetto alla funzione $e^{-\xi^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_{n'}(\xi) d\xi = \pi^{1/2} 2^n n! \delta_{nn'}$$

Le soluzioni della (1.59) sono definite a meno di una costante moltiplicativa, per cui

$$u_n(\xi) = N_n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

essendo N_n una costante di normalizzazione, cioè tale che

$$\langle u_n, u_n \rangle = 1 \iff N_n^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) H_n(\xi) e^{-\xi^2} d\xi}_{=\pi^{1/2} 2^n n!} = 1,$$

da cui

$$N_n = \left(\frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n!} \right)^{1/2}$$

Ne concludiamo che le autofunzioni dell'operatore (1.57) sono

$$u_n(\xi) = \left(\frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n!} \right)^{1/2} H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad (1.63)$$

e i corrispondenti autovalori

$$\lambda_n = 2n + 1 \quad (1.64)$$

Il sistema $\{u_n(\xi)\}$ è una base ortonormale dello spazio funzionale $C^p(\mathbb{R})$, onde

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n u_n(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(\frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n!} \right)^{1/2} H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

dove

$$c_n = \langle u_n, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) u_n(\xi) d\xi = \left(\frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n!} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (1.65)$$

Abbiamo quindi trovato nello spazio funzionale $C^p(\mathbb{R})$ una base ortonormale di cardinalità infinita numerabile. Per quanto visto, gli elementi di tale base sono autofunzioni di un qualche operatore lineare $A \in \text{end}(C^p([a, b]))$. Ad esempio, nel caso di $C([-1, 1])$ si perviene alla seguente base ortonormale:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_n(x) \right\}, \quad (1.66)$$

dove $P_n(x)$ sono i *polinomi di Legendre*:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.67)$$

Segue

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} c_n P_n(x), \quad (1.68)$$

Le componenti c_n si esprimono come

$$\begin{aligned} c_n &= \left\langle \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_n, f \right\rangle = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \langle P_n, f \rangle \\ &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx, \end{aligned} \quad (1.69)$$

Capitolo 2

Il formalismo matematico della Meccanica Quantistica

2.1 “Moto” di un “punto” in uno spazio funzionale

Nei paragrafi precedenti abbiamo sviluppato l’analogo della combinazione lineare di un generico vettore di \mathbb{R}^3 attraverso i vettori di base:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{e}_k, \quad (2.1)$$

giungendo a un’espressione del tipo

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n u_n(\xi) \quad (2.2)$$

nello spazio funzionale $C^p([a, b])$, dove $[a, b]$ è un intervallo (limitato o illimitato) di \mathbb{R} . Possiamo spingerci oltre in questa analogia cercando di dare un senso all’analogo della seguente equazione vettoriale

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^3 x_k(t) \mathbf{e}_k, \quad (2.3)$$

che definisce il moto di un punto nello spazio ordinario. Scriviamo

$$f(\xi, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) u_n(\xi), \quad (2.4)$$

ove $f(\xi, t)$ è interpretabile come il vettore posizione di un “punto” di $C^p([a, b])$ al tempo t . Tale interpretazione è puramente formale, giacché non ha senso fisico considerare il moto in uno spazio funzionale. Tuttavia, questo formalismo si presta molto bene alla descrizione dell’evoluzione dinamica di una classe di sistemi fisici, i cosiddetti *sistemi quanto-meccanici* (non relativistici). Senza perdita di generalità, consideriamo nel paradigma della Meccanica classica una particella di massa m che si muove lungo l’asse x in quanto sottoposta a una forza di modulo $F(t, x, \dot{x})$ ove x denota l’ascissa della particella, mentre \dot{x} indica la derivata rispetto al tempo, ovvero la velocità scalare. Per la seconda legge di Newton:

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) \quad (2.5)$$

Supponendo nota la funzione $F(t, x, \dot{x})$ si perviene al seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} F(t, x, \dot{x}) \\ x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \end{cases}, \quad (2.6)$$

essendo t_0 un istante iniziale assegnato. Ci si aspetta che una qualunque legge di forza $F(t, x, \dot{x})$ sia una funzione sufficientemente regolare, in modo da soddisfare le ipotesi del Teorema di esistenza ed unicità, per cui il problema (2.6) ammette una ed una sola soluzione. Inoltre, la coppia ordinata $(x(t), \dot{x}(t))$ definisce lo stato meccanico del sistema al generico istante t . Per quanto precede, lo stato meccanico a tutti i tempi, quindi l'evoluzione dinamica del sistema, è univocamente determinato dallo stato iniziale (x_0, \dot{x}_0) . Un esempio concreto è dato dall'oscillatore armonico unidimensionale, ossia una particella di massa m sottoposta a un campo di forze elastiche:

$$F(x) = -kx, \quad (k > 0) \quad (2.7)$$

In tal modo il problema (2.6) si scrive

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \end{cases}, \quad (2.8)$$

essendo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.9)$$

la pulsazione (o frequenza angolare) dell'oscillatore. Il problema (2.6) ammette l'unica soluzione

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \cos\left(\omega_0 t - \arctan \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}\right) \quad (2.10)$$

Cioè per tale sistema la legge oraria è un'oscillazione sinusoidale tra i punti dell'asse x di ascissa $-\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}$ e $\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}$.

Come vedremo in seguito (§ 2.10), per una particella con gli stessi gradi di libertà ma costituente un sistema quanto-meccanico S_q , esiste una limitazione di principio nota come *Principio di indeterminazione di Heisenberg*, secondo cui non è possibile misurare simultaneamente e con precisione assoluta le grandezze x e $p = m\dot{x}$, essendo p la quantità di moto (o *impulso* o *momento lineare*). Ciò si traduce in una indeterminazione sullo stato meccanico iniziale (x_0, \dot{x}_0) e quindi sulla soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy (2.6) avendosi:

$$x(t, x_0, \dot{x}_0) = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \cos\left(\omega_0 t - \arctan \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}\right), \quad (2.11)$$

che distrugge la possibilità di determinare la posizione della particella in un generico istante t . Il principio di indeterminazione è espresso dalla disuguaglianza:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.12)$$

dove $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ essendo $h = 6.6261696 \times 10^{-27}$ erg s la costante di Planck, mentre Δx e Δp denotano le grandezze seguenti:

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad \Delta p = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \quad (2.13)$$

Qui $\langle \cdot \rangle$ indica il valore medio. Ad esempio, per l'ascissa:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x) dx,$$

dove $\rho(x)$ è la densità di probabilità:

$$\rho(x) = \frac{d}{dx}w(x)$$

Precisamente, $dw = \rho(x_0) dx$ è la probabilità infinitesima che l'ascissa x della particella appartenga all'intervallo infinitesimo $[x_0, x_0 + dx]$. Per definizione di probabilità

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1 \quad (2.14)$$

Intuitivamente, la (2.14) esprime la circostanza secondo cui la particella si trova in “qualche punto” di ascissa $x \in (-\infty, +\infty)$. In caso di dipendenza esplicita dal tempo si ha $\rho(x_0, t) dx =$ probabilità infinitesima di trovare al tempo t la particella in $[x_0, x_0 + dx]$.

Conclusione 4 *A ogni sistema quanto-meccanico non relativistico S_q che compie un moto unidimensionale, possiamo associare univocamente una funzione $\rho(x, t)$ non negativa e di classe $C^0(\mathbb{R})$, che verifica la condizione di normalizzazione. In simboli*

$$\forall S_q, \exists \rho(x, t) \in C^0(\mathbb{R}), \rho(x, t) \geq 0 \mid \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

Tale funzione definisce la densità di probabilità per la posizione della particella.

Formalmente, la non presenza della particella in alcun punto dell'asse x si traduce matematicamente attraverso la condizione $\rho(x, t) \equiv 0$. Scriviamo

$$\rho(x, t) \equiv 0 \implies \text{la particella non esiste} \quad (2.16)$$

Il primo membro della disuguaglianza (2.12) è il *prodotto di indeterminazione*. Scriviamo

$$\Delta x \geq F(\Delta p), \quad (2.17)$$

avendo posto

$$F(\Delta p) = \frac{\hbar}{2\Delta p} \quad (2.18)$$

Tenendo conto della (2.12) e di un noto **criterio di regolarità per confronto**, si ha:

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0^+} F(\Delta p) = +\infty \implies \lim_{\Delta p \rightarrow 0^+} \Delta x = +\infty \quad (2.19)$$

Cioè una misura con precisione infinita dell'impulso restituisce una indeterminazione infinita sulla posizione, e viceversa:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \Delta p = +\infty \quad (2.20)$$

L'indeterminazione nella posizione implica a sua volta un'indeterminazione nell'energia meccanica. Infatti, nel caso di un oscillatore classico, quindi con stato iniziale esattamente determinato, l'energia meccanica a tutti i tempi è:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x(t)^2 \quad (2.21)$$

Sostituendo nella (2.21) la (2.11) e la sua derivata rispetto al tempo, dopo alcuni passaggi si trova:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x(t)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 = E = \text{costante}, \quad (2.22)$$

come appunto ci si aspetta, giacché il sistema è conservativo. Nel caso quantistico l'indeterminazione sullo stato iniziale (x_0, \dot{x}_0) impedisce la scrittura di un'equazione del tipo (2.22).

L'indeterminazione delle grandezze fisiche che caratterizzano i sistemi quanto-meccanici ha spinto i fisici a considerare non il moto nello spazio fisico (in questo caso \mathbb{R}^1) ma il "moto" di un "punto" in uno spazio funzionale \mathbb{S} univocamente associato al sistema. Qui ci viene in aiuto l'analogia vista nei paragrafi precedenti che in questo caso si scrive (dato che abbiamo una sola dimensione e quindi una sola componente del vettore posizione):

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}, \quad f(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n u_n(\xi) \quad (2.23)$$

Ricordiamo che l'indice continuo ξ rimpiazza l'indice discreto che individua le componenti del vettore posizione. In questo caso abbiamo una sola componente:

$$k \in \{1\} \rightarrow \xi \in [a, b] \implies x \rightarrow f(\xi) \quad (2.24)$$

Per un sistema quanto-meccanico che compie un moto unidimensionale, la variabile continua ξ si identifica con l'ascissa $x \in (-\infty, +\infty)$ e lo spazio funzionale \mathbb{S} è $L^2(\mathbb{R})$ cioè lo spazio i cui elementi sono le funzioni di quadrato sommabile su \mathbb{R} :

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \quad (2.25)$$

Inoltre, in Meccanica quantistica è consuetudine denotare con ψ gli elementi di $L^2(\mathbb{R})$, considerando l'estensione del loro codominio al campo complesso \mathbb{C} , per cui

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}), \quad \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx < +\infty \quad (2.26)$$

In tal modo $L^2(\mathbb{R})$ risulta essere uno spazio di Hilbert, ovvero uno spazio vettoriale sul campo complesso con prodotto interno

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \phi^*(x) dx, \quad \forall \psi, \phi \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.27)$$

Segue

$$\exists \{u_n\} \subset L^2(\mathbb{R}) \mid \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n u_n(x) \quad (2.28)$$

Le componenti c_n di ψ nella base ortonormale $\{u_n(x)\}$ sono in generale numeri complessi:

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) u_n(x) dx \quad (2.29)$$

La (2.4) si riscrive

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) u_n(x) \quad (2.30)$$

che per quanto visto, è il vettore posizione di un “punto” di $L^2(\mathbb{R})$ al tempo t . Ne consegue che le coordinate di tale punto nella base $\{u_n\}$ sono

$$(c_0(t), c_1(t), \dots, c_n(t), \dots)$$

Quindi da una parte abbiamo il moto reale della particella lungo l’asse x , senza però poter determinare il valore esatto dell’ascissa in funzione del tempo. Dall’altra parte abbiamo il moto per così dire, fittizio, di un punto in uno spazio di Hilbert in cui non possiamo enumerare gli assi coordinati giacché tale spazio ha dimensione infinita non numerabile.

I predetti spazi sono legati dal seguente ruolo svolto dal vettore $\psi(x, t)$: il modulo al quadrato $|\psi(x, t)|^2$ è la densità di probabilità $\rho(x, t)$ introdotta in precedenza:

$$|\psi(x, t)|^2 = \rho(x, t) \tag{2.31}$$

Ne consegue che la funzione $\psi(x, t)$ verifica la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.32}$$

Tale condizione è garantita dall’appartenenza di ψ a $L^2(\mathbb{R})$ a meno di una inessenziale costante moltiplicativa. Ne consegue che la conclusione (4) si riscrive:

Conclusione 5 *A ogni sistema quanto-meccanico non relativistico S_q che compie un moto unidimensionale, possiamo associare univocamente un elemento ψ non nullo dello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ la cui norma al quadrato è la densità di probabilità di trovare la particella in un assegnato punto dell’asse x . In simboli:*

$$\forall S_q, \exists \psi \in L^2(\mathbb{R}) - \{0\} \mid |\psi(x, t)|^2 \equiv \rho(x, t) \tag{2.33}$$

Osservazione 6 *Abbiamo escluso il vettore nullo dello spazio vettoriale $L^2(\mathbb{R})$ giacché per la (2.16) si ha*

$$\psi = 0 \implies \text{la particella non esiste} \tag{2.34}$$

La domanda che sorge spontanea è: come determiniamo il vettore $\psi(x, t)$ che per quanto visto, risulta essere indispensabile per conoscere la probabilità di trovare la particella in un assegnato intervallo dell’asse x ? L’unica informazione in nostro possesso è che $\psi(x, t)$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di una imprecisata base ortonormale dello spazio di Hilbert a cui ψ appartiene, come espresso dalla (2.30).

2.2 Traslazione spaziale ed evoluzione temporale

Per poter rispondere al quesito del paragrafo precedente, rammentiamo innanzitutto che nella notazione $\psi(x, t)$ la variabile reale x svolge il ruolo di indice che individua una delle infinite (non numerabili) componenti di ψ al tempo t , non rispetto alla base numerabile $\{u_n\}$ ma rispetto alla generalizzazione al continuo della base (1.15). Dobbiamo poi esaminare alcune proprietà dell’operatore di derivazione rispetto a una data variabile (x o t). A tale scopo consideriamo una qualunque funzione f derivabile in un intervallo $[a, b]$ di \mathbb{R} . Nel formalismo sviluppato nei paragrafi precedenti, diremo che f è un vettore di un appropriato spazio funzionale. L’operatore di derivazione è dato da

$$\hat{D}(f) = \frac{d}{dx} f(x) \tag{2.35}$$

Una notazione equivalente e più precisa è:

$$\left(\hat{D}f\right)(x) = \frac{d}{dx}f(x) \quad (2.36)$$

A volte si preferisce la notazione priva di parantesi al primo membro:

$$\hat{D}f = \frac{d}{dx}f(x), \quad (2.37)$$

che si legge \hat{D} opera su f e restituisce $\frac{d}{dx}f(x)$. Se ora scriviamo $y = f(x)$ denotando la derivata con la notazione di Leibnitz:

$$\hat{D}y = \frac{dy}{dx} \quad (2.38)$$

o ciò che è lo stesso:

$$\frac{dy}{dx} = \hat{D}y, \quad (2.39)$$

che formalmente può essere interpretata come un'equazione differenziale del primo ordine in $y(x)$. La conoscenza del valore assunto dalla funzione incognita in un punto iniziale $x_0 \in [a, b]$, restituisce il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \hat{D}y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Per risolvere tale problema, trattiamo l'operatore \hat{D} alla stregua di una costante (rispetto a x) con l'accortezza che la variabile y dovrà sempre comparire alla sua destra, mentre variabili x, dx verranno posizionate alla sua sinistra. Seguendo tale prescrizione, separiamo le variabili:

$$\frac{dy}{y} = dx\hat{D} \quad (2.41)$$

Integriamo

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{\eta} = \int_{x_0}^x d\xi\hat{D} \quad (2.42)$$

Siccome \hat{D} non dipende da x , si ha:

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = (x - x_0)\hat{D} \quad (2.43)$$

Passando agli esponenziali e ricordando che la variabile y è posizionata a destra di \hat{D} :

$$y(x) = e^{(x-x_0)\hat{D}}y_0 \quad (2.44)$$

Ripristinando la notazione $f(x)$:

$$f(x) = \hat{T}(x, x_0)f(x_0), \quad (2.45)$$

avendo definito l'operatore di *traslazione spaziale*

$$\hat{T}(x, x_0) = e^{(x-x_0)\hat{D}},$$

che è manifestamente un operatore lineare, giacché per un dato spazio funzionale \mathbb{S} si ha:

$$\hat{X} \in \text{end}(\mathbb{S}) \implies F(\hat{X}) \in \text{end}(\mathbb{S}),$$

essendo F una funzione arbitraria. Ne consegue che il valore assunto nel punto x da una qualunque funzione derivabile $f(x)$ è il risultato dell'applicazione dell'operatore $\hat{T}(x, x_0)$ al valore iniziale $f(x_0)$. Si dice allora che l'operatore di derivazione rispetto a x è il *generatore delle traslazioni spaziali*, giacché ci fa passare dal valore iniziale $f(x_0)$ al valore $f(x)$. In simboli:

$$f(x_0) \xrightarrow{\hat{T}(x, x_0)} f(x) \quad (2.46)$$

Si noti che $\hat{T}(x_0, x_0) = \hat{1}$ come appunto ci si aspetta. Nel caso di una funzione (derivabile) $f(t)$ dove t è il tempo, si ha:

$$f(t) = e^{(t-t_0)\hat{D}} f(t_0), \quad (2.47)$$

dove ora \hat{D} denota l'operatore di derivazione $\frac{d}{dt}$, ed è il generatore dell'evoluzione temporale

$$f(t_0) \xrightarrow{\text{evoluzione temporale}} f(t) \quad (2.48)$$

I due processi esaminati – traslazione spaziale ed evoluzione temporale – sono lineari in quanto generati da operatori lineari, come appunto l'operatore di derivazione:

$$\hat{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{D}f + \beta \hat{D}g, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}), \quad \forall f, g \text{ derivabili} \quad (2.49)$$

Quindi anche se f è una funzione non lineare, il processo algoritmico che ricostruisce – a partire da $f(x_0)$ – i valori assunti da f in punti $x \neq x_0$, è lineare. Si noti che la linearità di \hat{D} discende dalla definizione di derivata:

$$\hat{D}f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Segue

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha f + \beta g) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x + \Delta x) + \beta g(x + \Delta x) - [\alpha f(x) + \beta g(x)]}{\Delta x} \\ &= \alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \beta \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Formalmente, sviluppando l'esponenziale in serie di Taylor di punto iniziale x_0 :

$$e^{(x-x_0)\hat{D}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \hat{D}^k,$$

onde

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \hat{D}^k f(x_0)$$

Ma

$$\hat{D}^k f(x_0) = \left(\hat{D}^k f \right) (x_0) = \frac{d^k}{dx^k} f(x),$$

per cui

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left. \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right|_{x_0},$$

cioè lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x)$, a patto di assumere $f(x)$ infinitamente derivabile in x_0 . Nel caso del vettore $\psi(x, t) \in L^2(\mathbb{R})$ denotando con \hat{D}_t l'operatore di derivazione rispetto al tempo t , si ha:

$$\hat{D}_t \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.50)$$

Seguendo il procedimento formale appena visto, otteniamo a partire da un istante iniziale t_0 :

$$\psi(x, t) = e^{(t-t_0)\hat{D}_t}\psi_0(x),$$

avendo posto $\psi_0(x) = \psi(x, t_0)$. Ricordiamo tuttavia che tali espressioni avendo un carattere puramente formale non forniscono l'espressione analitica di $\psi(x, t)$. Tentiamo una strada simile, congetturando

$$\exists \hat{H} \in \text{end}(L^2(\mathbb{R})) \mid \hat{H}\psi = \beta \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.51)$$

dove β è una costante. Se \hat{H} non dipende esplicitamente da t , possiamo applicare il procedimento precedente, risolvendo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{K}\psi \\ \psi(x, 0) = \psi_0 \end{cases}, \quad (2.52)$$

per un assegnato valore iniziale $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Qui è $\hat{K} = \beta^{-1}\hat{H}$ non dipendente da t . Dal momento che l'equazione differenziale è a variabili separabili, dobbiamo innanzitutto determinare eventuali integrali costanti. Per fissare le idee, consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Se y_0 è uno zero di $g(y)$:

$$g(y_0) = 0,$$

segue che l'unica soluzione di (2.53) è la funzione costante $y(x) \equiv y_0$. Nel caso in esame è

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = g(\psi) \\ \psi(x, 0) = \psi_0 \end{cases}, \quad (2.54)$$

dove $g(\psi) = \hat{K}\psi$, il cui unico zero è $\psi = 0$. Ne consegue che se $\psi_0 = 0$ i.e. vettore nullo dello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, allora l'unica soluzione del problema di Cauchy (2.52) è il vettore nullo. Dobbiamo escludere tale eventualità, in quanto implica la non-presenza della particella [cfr. eq. (2.34)]. Quindi poniamo $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}) - \{0\}$, e integrando per separazione di variabili ricaviamo l'unica soluzione:

$$\psi(x, t) = \hat{U}(t, t_0)\psi_0(x), \quad (2.55)$$

essendo

$$\hat{U}(t, t_0) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{t-t_0}{\beta}\hat{H}} \quad (2.56)$$

l'operatore di evoluzione temporale. Ricordiamo che $\psi(x, t)$ è normalizzata a 1:

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde

$$\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1$$

Ne consegue che l'operatore di evoluzione temporale conserva la "lunghezza" dei vettori di $L^2(\mathbb{R})$. L'utilizzo delle virgolette ci ricorda che non ci stiamo riferendo a vettori del consueto spazio ordinario,

ma di elementi di uno spazio funzionale. Osserviamo poi che un qualunque endomorfismo di uno spazio funzionale è una trasformazione lineare dello spazio in sè:

$$\hat{X} \in \text{end}(\mathbb{S}), \quad \hat{X}(f) \in \mathbb{S}, \quad \forall f \in \mathbb{S} \quad (2.57)$$

Una trasformazione lineare che lascia invariata la lunghezza dei vettori è una “rotazione”:

$$\hat{R} \in \text{end}(\mathbb{S}), \quad \hat{R}(f) \in \mathbb{S}, \quad \|\hat{R}f\| = \|f\|, \quad \forall f \in \mathbb{S} \quad (2.58)$$

Se $\mathbb{S} = \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo \hat{R} è rappresentato in un'assegnata base ortonormale da una matrice ortogonale R :

$$RR^T = R^T R = \bar{I}, \quad (2.59)$$

dove R^T denota la matrice trasposta e \bar{I} la matrice identità di ordine 3. Nel caso in esame deve essere:

$$\langle \hat{U}(t, t_0)\psi_0, \hat{U}(t, t_0)\psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0 \rangle, \quad \forall \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.60)$$

Per scrivere un'espressione per $\hat{U}(t, t_0)$ che sia l'equivalente “hilbertiana” della (2.59) valida nell'eucideo, dobbiamo estendere la nozione di trasposizione di una matrice e, quindi, di un endomorfismo allo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. A tale scopo, osserviamo che preso ad arbitrio $\hat{A} \in \text{end}(L^2(\mathbb{R}))$, si definisce **aggiunto** o **coniugato hermitiano** di \hat{A} , l'endomorfismo \hat{A}^\dagger tale che

$$\langle \hat{A}\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \hat{A}^\dagger\varphi \rangle \quad (2.61)$$

Per un assegnato $\hat{A} \in L^2(\mathbb{R})$, esiste ed è unico $\hat{A}^\dagger \in L^2(\mathbb{R})$. Infatti supponiamo che:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}\psi, \varphi \rangle &= \langle \psi, \hat{A}^\dagger\varphi \rangle \\ \langle \hat{A}\psi, \varphi \rangle &= \langle \psi, (\hat{A}^\dagger)' \varphi \rangle \end{aligned} \quad (2.62)$$

Sottraendo membro a membro:

$$0 = \langle \psi, \hat{A}^\dagger\varphi \rangle - \langle \psi, (\hat{A}^\dagger)' \varphi \rangle, \quad (2.63)$$

Dalla linearità di $\hat{A}^\dagger, (\hat{A}^\dagger)'$:

$$\langle \psi, [\hat{A}^\dagger - (\hat{A}^\dagger)'] \varphi \rangle = 0, \quad \forall \psi, \varphi \in L^2(\mathbb{R})$$

Cioè

$$\hat{A}^\dagger - (\hat{A}^\dagger)' = \hat{0} \implies \hat{A}^\dagger = (\hat{A}^\dagger)' \quad (2.64)$$

L'operazione

$$\hat{A} \longrightarrow \hat{A}^\dagger$$

che ci fa passare da un assegnato \hat{A} al suo aggiunto, si chiama *coniugazione hermitiana*.

Osservazione 7 *La definizione di operatore aggiunto:*

$$\langle \hat{A}\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \hat{A}^\dagger\varphi \rangle \quad (2.65)$$

è valida non solo in $L^2(\mathbb{R})$ ma in un qualunque spazio di Hilbert.

Riprendiamo la (2.66):

$$\left\langle \widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) \psi_0, \widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) \psi_0 \right\rangle = \langle \psi_0, \psi_0 \rangle, \quad \forall \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.66)$$

sviluppando il primo membro:

$$\left\langle \widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) \psi_0, \widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) \psi_0 \right\rangle = \left\langle \psi_0, \widehat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) \left[\widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) \psi_0 \right] \right\rangle = \left\langle \psi_0, \left[\widehat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) \widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) \right] \psi_0 \right\rangle, \quad (2.67)$$

la (2.66) diventa:

$$\left\langle \psi_0, \left[\widehat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) \widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) \right] \psi_0 \right\rangle = \langle \psi_0, \psi_0 \rangle, \quad \forall \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.68)$$

Tale relazione è soddisfatta se e solo se

$$\widehat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) \widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) = \hat{1}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.69)$$

In maniera del tutto analoga si perviene a

$$\widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) \widehat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) = \hat{1}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.70)$$

In definitiva, l'operatore di evoluzione temporale lascia invariata la norma dei vettori se e solo se

$$\widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) \widehat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) = \widehat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) \widehat{\mathcal{U}}(t, t_0) = \hat{1}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.71)$$

Un tale operatore è detto **unitario**. Ne consegue che l'equivalente hilbertiano dell'operazione di trasposizione è l'operazione di coniugazione hermitiana che ci fa passare all'operatore aggiunto. L'hermitiano coniugato di $\widehat{\mathcal{U}}(t, t_0)$ è

$$\widehat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) = \left(e^{\frac{t-t_0}{\beta} \hat{H}} \right)^\dagger = e^{\frac{t-t_0}{\beta^*} \hat{H}^\dagger} \quad (2.72)$$

Per quanto riguarda l'operatore \hat{H} , ci aspettiamo che esso sia in qualche modo legato alla natura del sistema quantistico considerato. Innanzitutto notiamo che \hat{H} è il generatore dell'evoluzione temporale. Infatti dalla (2.56) segue

$$\hat{H} = \hat{0} \implies \psi(x, t) \equiv \psi_0(x), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

cioè la densità di probabilità è congelata al valore iniziale $\rho(x, t) = \rho_0(x) = |\psi_0(x)|^2$. Inoltre, in meccanica quantistica grandezze fisiche del tipo energia, posizione, momento lineare, momento angolare, si chiamano *osservabili* in quanto intrinsecamente definite attraverso un assegnato procedimento di misura.

È naturale allora associare l'operatore \hat{H} alla funzione hamiltoniana, giacchè dalla meccanica analitica sappiamo che l'hamiltoniana genera l'evoluzione temporale. Dal momento che abbiamo assunto \hat{H} non dipendente esplicitamente dal tempo, si ha che il sistema in esame è conservativo o ciò che è lo stesso, sottoposto a un campo di forze posizionali e di energia potenziale $V(x)$, per cui l'hamiltoniana si scrive:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (2.73)$$

A questo punto, si tratta di far corrispondere alla predetta funzione un endomorfismo di $L^2(\mathbb{R})$. Premettiamo dapprima alcune nozioni riguardo la struttura di tale operatore lineare. In precedenza, abbiamo introdotto il concetto di operatore aggiunto. A tale proposito, ricordiamo che nello spazio vettoriale $end(\mathbb{H})$ dove \mathbb{H} è un qualunque spazio di Hilbert, i cosiddetti *operatori autoaggiunti* o *hermitiani* costituiscono una particolare classe di operatori, in quanto verificano la condizione:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \quad (2.74)$$

Sussiste infatti il teorema per la cui dimostrazione rimandiamo a [5]:

Teorema 8 *Gli autovalori di un operatore hermitiano sono reali. Gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti, sono ortogonali. Cioè, se \hat{A} è un operatore hermitiano:*

$$\sigma(\hat{A}) \subseteq \mathbb{R} \quad (2.75)$$

e

$$\langle u_\lambda, u_{\lambda'} \rangle = 0, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \sigma(\hat{A}), \quad \lambda \neq \lambda' \quad (2.76)$$

Una qualunque osservabile verrà quindi rappresentata da un operatore hermitiano, i cui autovalori costituiscono i risultati di una misura di tale grandezza in un senso che definiremo più avanti attraverso un noto teorema. La realtà degli autovalori giustifica la scelta degli operatori hermitiani quali enti matematici rappresentativi delle osservabili quantistiche. Imponiamo dunque

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger \quad (2.77)$$

Nella (2.72) la grandezza costante β è data da $\beta = i\hbar$:

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} \implies \hat{U}^\dagger(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}},$$

per cui la (2.71) è automaticamente soddisfatta, mentre l'equazione differenziale operatoriale (2.51) si scrive:

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.78)$$

Osserviamo che la costante di Planck ha le dimensioni di una energia \times un tempo, per cui ci ritroviamo con le giuste dimensioni. Per quanto precede, le grandezze x e p sono osservabili quantistiche e come tali sono rappresentate dagli operatori hermitiani $\hat{x}, \hat{p} \in \text{end}(L^2(\mathbb{R}))$. Pertanto l'operatore hamiltoniano si esprime come

$$\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p})$$

Cioè

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (2.79)$$

La definizione degli operatori \hat{x}, \hat{p} è l'argomento del prossimo paragrafo.

2.3 Le osservabili posizione e impulso. L'equazione di Schrödinger

Riprendiamo l'endomorfismo (1.34) riscrivendolo nella notazione più compatta:

$$(\hat{A}f)(x) = xf(x), \quad \forall f \in C^p([a, b]), \quad (2.80)$$

che associa a una funzione $f \in C^p([a, b])$ la funzione $xf(x)$ quale elemento di $C^p([a, b])$. Passiamo allo spazio funzionale $L^2(\mathbb{R})$ ridifenendo l'endomorfismo in \hat{x} :

$$(\hat{x}f)(x) = xf(x) \quad (2.81)$$

Teniamo ben presente che \hat{x} agisce sulla funzione $f(x)$ moltiplicandola per la variabile $x \in (-\infty, +\infty)$. Ad esempio, prendiamo

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{se } x \notin [-\pi, \pi] \end{cases}, \quad (2.82)$$

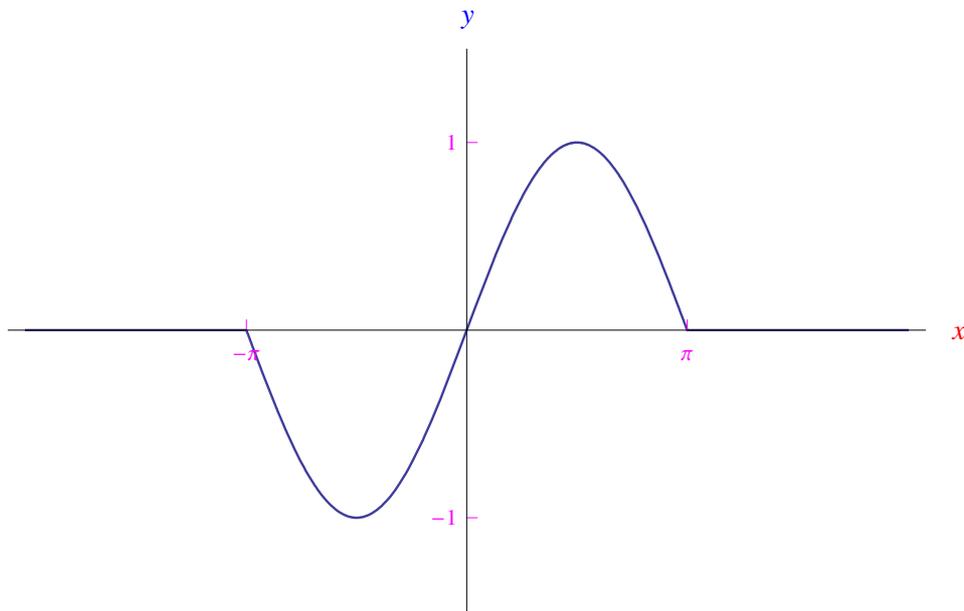


Figura 2.1: Grafico della funzione (2.82).

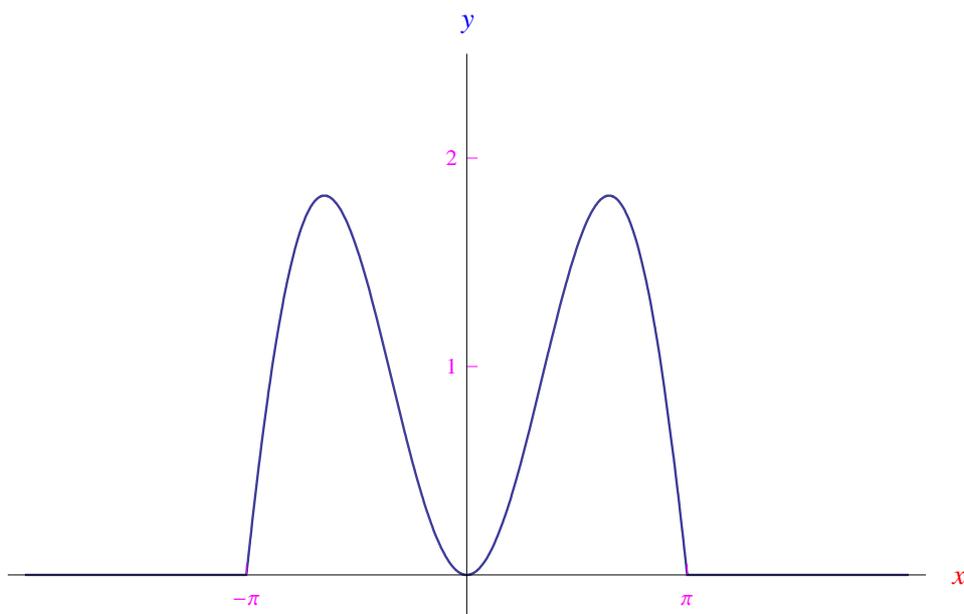


Figura 2.2: Grafico della funzione $(\hat{x}f_1)(x)$.

che è manifestamente un elemento di $L^2(\mathbb{R})$. Il suo grafico è riportato in fig. 2.1. Riesce

$$(\hat{x}f_1)(x) = \begin{cases} x \sin x, & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{se } x \notin [-\pi, \pi] \end{cases},$$

graficata in fig. 2.2.

Per determinare autofunzioni e autovalori di \hat{x} , scriviamo l'equazione agli autovalori:

$$(\hat{x}u_\lambda)(x) = \lambda u_\lambda(x) \iff xu_\lambda(x) = \lambda u_\lambda(x)$$

Per definizione di autovettore deve essere $u_\lambda(x) \neq 0$, per cui l'equazione precedente equivale a

$$x = \lambda \tag{2.83}$$

Segue che ogni funzione di $L^2(\mathbb{R})$ è autofunzione di \hat{x} con autovalore $\lambda = x$:

$$(\hat{x}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda), \tag{2.84}$$

che è una soluzione banale per come abbiamo definito l'endomorfismo \hat{x} . Un'autofunzione non banale associata all'autovalore λ è una funzione **delta di Dirac**. Precisamente:

$$u_\lambda(x) = \delta(x - \lambda), \tag{2.85}$$

giacché

$$\hat{x}\delta(x - \lambda) = x\delta(x - \lambda) = \lambda\delta(x - \lambda), \tag{2.86}$$

che discende da una nota proprietà della funzione δ :

$$g(x)\delta(x - \lambda) = g(\lambda)\delta(x - \lambda) \tag{2.87}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\hat{x}\delta(x - \lambda) = \lambda\delta(x - \lambda), \tag{2.88}$$

con λ preso ad arbitrio in \mathbb{R} . Ciò implica $\sigma(\hat{x}) = \mathbb{R}$, per cui sospettiamo che \hat{x} sia hermitiano. Per verificarlo, eseguiamo il prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}\psi, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{x}\psi)(x) \varphi^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x) \varphi^*(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) x\varphi^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) (\hat{x}\varphi^*)(x) dx \\ &= \langle \psi, \hat{x}\varphi \rangle, \quad \forall \psi, \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Cioè $\hat{x} = \hat{x}^\dagger$. Per il teorema 8 deve essere

$$\langle u_\lambda, u_{\lambda' \neq \lambda} \rangle = 0$$

Dal momento che λ varia con continuità da $-\infty$ a $+\infty$:

$$\langle u_\lambda, u_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda') \tag{2.89}$$

Cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \lambda) \delta(x - \lambda') dx = \delta(\lambda - \lambda')$$

Il sistema di autofunzioni $\{u_\lambda(x) = \delta(x - \lambda)\}$ è una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$, per cui preso ad arbitrio $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda) \delta(x - \lambda) d\lambda \quad (2.90)$$

Per una nota proprietà della funzione δ , si ha $c(\lambda) = f(\lambda)$ per cui

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \delta(x - \lambda) d\lambda \quad (2.91)$$

Per un assegnato $x_0 \in \mathbb{R}$ la (2.88) si scrive:

$$\hat{x}\delta(x - x_0) = x_0\delta(x - x_0) \quad (2.92)$$

L'operatore hermitiano \hat{x} rappresenta l'osservabile posizione della particella. Per quanto detto nel paragrafo precedente, gli autovalori di un operatore hermitiano associato a una assegnata osservabile quantistica, sono i risultati di una misura della osservabile medesima. Nel caso in esame x_0 è il risultato della misura della posizione della particella, mentre l'autofunzione $\delta(x - x_0)$ è la $\psi(x)$ del sistema, anche se non è un elemento di $L^2(\mathbb{R})$, in quanto non si tratta di una funzione nel senso ordinario. Tuttavia verifica la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

Inoltre

$$\delta(x - x_0) = 0, \quad \forall x \neq x_0$$

Cioè abbiamo una probabilità nulla di trovare la particella in punti di ascissa $x \neq x_0$. Ne consegue che $\delta(x - x_0)$ descrive una particella localizzata in x_0 . Per il principio di indeterminazione segue che l'incertezza sull'impulso è $\Delta p = +\infty$.

Un trattamento simile può essere applicato all'osservabile impulso p a cui corrisponde l'operatore hermitiano \hat{p} per il quale si ha un'equazione agli autovalori simile alla (2.92)

$$\hat{p}\delta(p - p_0) = p_0\delta(p - p_0), \quad (2.93)$$

in cui abbiamo una particella di impulso definito p_0 e posizione con indeterminazione infinita. Tuttavia, a noi interessa l'espressione analitica dell'operatore hermitiano \hat{p} in termini di variabile x (si parla di *rappresentazione nello spazio delle coordinate* o *x-rappresentazione*). Cioè

$$\hat{p}(f) = -\beta \frac{\partial}{\partial x} f(x, t), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

dove $\beta = i\hbar$ è la costante introdotta in precedenza (cfr. eq. (2.51)). Quindi

$$\hat{p}(f) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x, t), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.94)$$

In tal modo dalla (2.79) otteniamo

$$\hat{H}(f) = \frac{1}{2m} \hat{p}^2(f) + \hat{V}(f), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.95)$$

Esplicitiamo i vari termini a secondo membro:

$$\begin{aligned} \hat{p}^2(f) &= \hat{p}(\hat{p}(f)) = \hat{p}\left(-i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}\right) = -i\hbar \hat{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -i\hbar\left(-i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\hbar^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \hat{V}(f) &= V(x) f(x, t) \end{aligned}$$

Sostituendo nella (2.95):

$$\hat{H}(f) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + V(x) f(x, t), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.96)$$

Ne consegue che l'equazione differenziale operatoriale

$$\hat{H}(\psi) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.97)$$

che regola l'evoluzione temporale del sistema, nella x -rappresentazione diventa un'equazione differenziale alle derivate parziali del second'ordine lineare rispetto alla variabile spaziale x e del primo ordine rispetto alla variabile t :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.98)$$

nota come *equazione di Schrödinger*.

2.4 Il tempo quale osservabile quantistica

Dalla (2.97) segue che l'operatore hamiltoniano nella t -rappresentazione si scrive:

$$\hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.99)$$

Scriviamo l'equazione agli autovalori per tale operatore:

$$\hat{H}u_E(x) = Eu_E(x),$$

avendosi $E \in \mathbb{R}$ (autovalori dell'energia), giacché \hat{H} è hermitiano. Senza perdita di generalità, supponiamo che lo spettro dell'hamiltoniano sia puramente continuo:

$$\sigma(\hat{H}) \equiv \sigma_c(\hat{H})$$

Possiamo quindi denotare la generica autofunzione dell'energia come

$$u(x, E), \quad \forall E \in \sigma_c(\hat{H}) \quad (2.100)$$

Sulla falsariga del procedimento formale visto in § 2.2, possiamo scrivere:

$$u(x, E) = e^{(E-E_0)\hat{D}_E} u(x, E_0), \quad (2.101)$$

essendo

$$\hat{D}_E = \frac{\partial}{\partial E}, \quad (2.102)$$

mentre $E_0 \in \sigma_c(\hat{H})$ è un autovalore "iniziale". Dal momento che la (2.101) ha un significato puramente formale che non ci consente di determinare $u(x, E)$ a partire da $u(x, E_0)$, scriviamo

$$\exists \hat{t} \in \text{end}(L^2(\mathbb{R})) \mid \hat{t}u = \beta \frac{\partial u}{\partial E}, \quad (2.103)$$

dove β è una costante. Segue il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial E} = \hat{\tau} u \\ u(x, E_0) = u_{E_0}(x) \end{cases}, \quad (\hat{\tau} = \beta^{-1} \hat{t}), \quad (2.104)$$

la cui unica soluzione è

$$u(x, E) = \hat{V}(E, E_0) u(x, E_0), \quad (2.105)$$

avendo posto:

$$\hat{V}(E, E_0) = e^{\frac{E-E_0}{\beta} \hat{t}} \quad (2.106)$$

Al solito, tale operatore deve essere unitario, quindi possiamo porre $\beta = -i\hbar$:

$$u(x, E) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E_0)\hat{t}} u(x, E_0) \quad (2.107)$$

L'operatore hermitiano \hat{t} si dice *operatore temporale* e corrisponde all'osservabile tempo t [4]. Nella E -rappresentazione

$$\hat{t} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial E} \quad (2.108)$$

Inoltre

$$[\hat{H}, \hat{t}] = i\hbar, \quad (2.109)$$

che dà luogo alla relazione di indeterminazione

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.110)$$

nota come *relazione di indeterminazione tempo-energia*.

2.5 Sintesi dei risultati

Una serie di dati empirici che hanno determinato la crisi della Fisica classica, è rappresentata dall'esistenza di una classe di sistemi meccanici per i quali l'evoluzione dinamica dello stato $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ove \mathbf{q} denota il vettore delle coordinate generalizzate, non è deterministica. Per tali sistemi si rinuncia a una descrizione in termini delle predette variabili, recuperando il determinismo fisico attraverso una grandezza vibrante complessa $\psi(\mathbf{q}, t)$ (i.e. *funzione d'onda*) soluzione dell'equazione d'onda di Schrödinger che in forma operatoriale dà luogo al seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \\ \psi(\mathbf{q}, 0) = \psi_0(\mathbf{q}) \end{cases}, \quad (2.111)$$

dove ψ è ora interpretabile come un vettore non nullo di un appropriato spazio di Hilbert, mentre \hat{H} è un endomorfismo autoaggiunto del predetto spazio, che caratterizza e specifica univocamente il sistema meccanico assegnato. Per il teorema di esistenza ed unicità segue che il problema di Cauchy (2.111) ammette una ed una sola soluzione. Ne consegue che l'evoluzione dinamica del vettore ψ è univocamente determinata dal suo valore iniziale ψ_0 e dall'operatore lineare \hat{H} . Abbiamo poi visto che tale soluzione può essere scritta come:

$$\psi(\mathbf{q}, t) = \hat{U}(t) \psi_0(\mathbf{q}),$$

essendo $\hat{U}(t)$ l'operatore di evoluzione temporale

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}},$$

che è un operatore unitario, per cui l'evoluzione temporale di un tale sistema è una trasformazione unitaria dello spazio di Hilbert associato al sistema medesimo. Il significato fisico della grandezza ψ è inglobato in una identità funzionale che nel caso di un sistema composto da una sola particella il cui numero di gradi di libertà è pari a 1, si scrive:

$$|\psi(x, t)|^2 = \rho(x, t),$$

dove $\rho(x, t)$ è la densità di probabilità di trovare la particella al tempo t in un intorno infinitesimo di x . Queste considerazioni innescano una serie di problemi ontologici circa la realtà della funzione d'onda ψ soprattutto in relazione al *paradosso della misura* che verrà trattato in un numero successivo. Concludiamo che in linea di principio, è possibile estendere il procedimento di "costruzione" della grandezza ψ per sistemi più generali di quelli visti. Ad esempio, per un sistema per il quale l'ascissa x è una variabile aleatoria, è possibile associare una grandezza ψ tale che $|\psi|^2$ definisce la densità di probabilità per quel dato processo aleatorio. La funzione ψ può essere quindi riguardata come un vettore di uno spazio funzionale assegnato, quindi soluzione di un problema di Cauchy del tipo:

$$\begin{cases} \hat{K}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t}, \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x) \end{cases}, \quad (2.112)$$

essendo \hat{K} un opportuno operatore differenziale.

2.6 Interpretazione statistica della funzione d'onda

Abbiamo ricavato l'equazione di Schrödinger per un sistema quanto-meccanico costituito da una particella di massa m che compie un moto 1-dimensionale e sottoposta a un campo di forze conservativo di energia potenziale $V(x)$. L'equazione si generalizza immediatamente al caso di una particella che si muove in \mathbb{R}^3 . Precisamente, basta sostituire l'operatore di derivazione parziale seconda $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ con il laplaciano $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ottenendo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (2.113)$$

Iniziamo con l'osservare che la soluzione ψ di tale equazione può avere un andamento periodico a causa dell'unità immaginaria a secondo membro. Infatti, abbiamo visto nei numeri precedenti che la soluzione può essere scritta nella forma:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}\psi_0(\mathbf{x}) \quad (2.114)$$

Questa circostanza suggerisce le denominazioni *funzione d'onda* per la grandezza ψ ed *equazione d'onda di Schrödinger* per la (2.113). Rileviamo tuttavia una differenza sostanziale con l'*equazione d'onda di D'Alambert*

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,$$

che è del secondo ordine nella derivata temporale. Al contrario, l'equazione di Schrödinger è del primo ordine rispetto alla predetta variabile per il modo in cui l'equazione è stata ricavata. Infatti, in forma operatoriale si scrive:

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (2.115)$$

dove \hat{H} è l'operatore hamiltoniano associato al sistema. Ricordiamo poi che l'evoluzione temporale della funzione d'onda è un processo deterministico in forza dell'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \\ \psi(\mathbf{x}, t_0) = \psi_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.116)$$

In altri termini, il valore iniziale $\psi(\mathbf{x}, t_0)$ determina (per un assegnato hamiltoniano e quindi per un dato sistema quantistico) il valore di ψ in un qualsiasi istante successivo. Ciò esprime il *principio di causalità* in meccanica quantistica [6].

Nei numeri precedenti abbiamo interpretato fisicamente la funzione d'onda attraverso la seguente identità funzionale:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2, \quad (2.117)$$

dove $\rho(\mathbf{x}, t)$ è la densità di probabilità per la posizione, nel senso che la grandezza differenziale

$$dw = \rho(\mathbf{x}_0, t) d^3x$$

è la probabilità infinitesima di trovare al tempo t la particella nel volume infinitesimo d^3x centrato in \mathbf{x}_0 . Inizialmente Schrödinger interpretò in maniera diversa la grandezza ψ definendo la (2.117) come la densità di carica elettrica al tempo t nel punto \mathbf{x} . È da tener presente che all'epoca erano sconosciute le particelle elettricamente neutre. Qualunque sia il significato fisico di ψ (densità di probabilità o di carica elettrica) iniziamo con il verificare che ρ verifica la cosiddetta equazione di continuità, premettendo alcune nozioni.

Sia $G(t)$ una grandezza scalare di densità $\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$G(t) = \int_D \rho(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (2.118)$$

per un assegnato dominio $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Dal momento che ρ è una funzione delle coordinate (x, y, z) e del tempo t , possiamo immaginare che essa venga "trasportata". Definiamo allora un campo vettoriale $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ – denominato *densità di corrente* di $G(t)$ – tale che se $d\sigma$ è un qualunque elemento di superficie e \mathbf{n} il versore normale, $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}d\sigma$ è la quantità di grandezza che attraversa $d\sigma$ nell'unità di tempo. Ciò implica che

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}d\sigma$$

è la quantità di grandezza che attraversa la superficie S nell'unità di tempo. Dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 9 *L'equazione del bilancio per la grandezza $G(t)$ di densità $\rho(x, t)$ e densità di corrente $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ è*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = \gamma, \quad (2.119)$$

dove $\gamma(\mathbf{x}, t)$ è la densità di velocità di creazione/distruzione della grandezza $G(t)$:

$$\Gamma(t) = \int_D \gamma(\mathbf{x}, t) d^3x, \quad (2.120)$$

essendo $\Gamma(t)$ la velocità di creazione/distruzione di $G(t)$.

Dimostrazione. Preso ad arbitrio un dominio D di frontiera regolare ∂D , si ha che l'equazione del bilancio in forma integrale si scrive:

$$\frac{dG}{dt} + \oint_{\partial D} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}d\sigma = \Gamma(t)$$

Abbiamo

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x$$

L'integrale di superficie può essere convertito in un integrale di volume utilizzando il teorema della divergenza:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_D \operatorname{div} \mathbf{j} d^3x$$

Segue

$$\int_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} - \gamma \right) d^3x = 0$$

Per l'arbitrarietà di D si ha:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} - \gamma = 0,$$

onde l'asserto. ■

Se $\gamma(\mathbf{x}, t) > 0$ il mezzo in cui si propaga la grandezza G si dice *sorgente*. Viceversa, per $\gamma(\mathbf{x}, t) < 0$ il mezzo assorbe. Per ultimo, $\gamma(\mathbf{x}, t) = 0$ la grandezza G si conserva e l'equazione del bilancio si chiama *equazione di continuità*. Per quanto precede, tale equazione esprime localmente la conservazione di G , a differenza dell'equazione integrale

$$\frac{dG}{dt} + \oint_{\partial D} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

che esprime globalmente la conservazione di G . Ciò premesso, riscriviamo l'equazione di Schrödinger (2.113) e la sua complessa coniugata

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}, t) = -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \end{cases} \quad (2.121)$$

Moltiplichiamo la prima per ψ^* e la seconda per ψ , per poi sottrarre membro a membro:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \psi \nabla^2 \psi^* &= i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \iff \\ \iff \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* + \frac{2im}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) &= 0 \\ \iff \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (2.122)$$

Definiamo

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*), \quad (2.123)$$

la cui divergenza è

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*)$$

Ne consegue che la (2.122) è l'equazione di continuità per la grandezza di densità $\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (2.124)$$

Schrödinger definì

$$\rho_c(\mathbf{x}, t) = q\rho(\mathbf{x}, t), \quad (2.125)$$

dove q è la carica elettrica della particella. Quindi la densità di corrente elettrica associata a tale carica è

$$\mathbf{j}_c(\mathbf{x}, t) = q\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (2.126)$$

Tuttavia tale interpretazione offre il fianco a numerose critiche [2]. Ad esempio, l'eventuale *sparpagliamento* dell'onda descritta dalla funzione $\psi(\mathbf{x}, t)$ determina un conseguente sparpagliamento della carica elettrica trasportata, contrariamente ai risultati delle esperienze che vedono una particella elettricamente carica come un oggetto puntiforme. Fu Max Born che nel 1926 propose l'interpretazione statistica discussa in precedenza, e cioè $dw = \rho(\mathbf{x}_0, t) d^3x$ è la probabilità infinitesima di osservare al tempo t la particella nell'elemento di volume centrato in \mathbf{x}_0 , mentre $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt$ è la probabilità infinitesima che la particella attraversi l'elemento di superficie $d\sigma$ nell'intervallo di tempo infinitesimo dt . L'interpretazione statistica ha senso solo se ci riferiamo a un numero $N \gg 1$ di particelle che si trovano nelle stesse condizioni iniziali. Un tale sistema fisico è denominato *fascio*. In tale configurazione sperimentale, la grandezza dw è il numero N' di particelle osservate al tempo t nel volume d^3x , mentre $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt$ è il numero N'' di particelle che attraversano l'elemento di superficie $d\sigma$ nell'intervallo di tempo dt . Se le particelle hanno una carica elettrica q :

$$qN' = \text{carica elettrica del fascio di particelle}$$

$$N''\mathbf{j} = \text{densità di corrente elettrica del fascio di particelle}$$

2.7 Ipotesi di De Broglie

Come è noto, la radiazione elettromagnetica esibisce una doppia natura: ondulatoria e corpuscolare. La prima tiene conto dei fenomeni di interferenza e diffrazione. La seconda, invece, interviene nei processi di assorbimento (effetto fotoelettrico) e di diffusione (effetto Compton). In base a questi dati empirici, a un'onda elettromagnetica piana e monocromatica di frequenza ν e lunghezza d'onda λ , si deve attribuire un'energia E e una quantità di moto p dati dalle seguenti relazioni

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad (2.127)$$

che possono essere riscritte in termini della costante ridotta di Planck $\hbar = \frac{h}{2\pi}$:

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k, \quad (2.128)$$

essendo $\omega = 2\pi\nu$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ rispettivamente la frequenza angolare e il numero d'onde. Ne consegue che in tutti i processi in cui si presenta l'aspetto corpuscolare, la radiazione si comporta come una particella di energia $E = \hbar\omega$ e quantità di moto $p = \hbar k$. Per l'ipotesi di De Broglie, tale corrispondenza è invertibile: il moto di una particella di quantità di moto \mathbf{p} ed energia E , equivale alla propagazione di un'onda piana monocromatica. Ricordiamo che nel caso unidimensionale l'equazione di D'Alembert

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

ammette soluzioni del tipo onda piana $\psi(x \pm ct)$. Nel caso particolare di un'onda piana monocromatica, in forma complessa si ha:

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.129)$$

che si generalizza al caso tridimensionale:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (2.130)$$

dove \mathbf{k} è il vettore che definisce la direzione di propagazione (*vettore d'onda*), il cui modulo è il numero d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Per l'ipotesi di De Broglie:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar} \quad (2.131)$$

Quindi

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}, \quad (2.132)$$

che si propaga alla velocità di fase:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} \quad (2.133)$$

Se p non è esattamente definito, la corrispondente propagazione ondulatoria coincide con il moto di un *pacchetto d'onde*, ovvero una sovrapposizione lineare di onde piane monocromatiche, rappresentata – in virtù della linearità dell'equazione di D'Alembert – dalla seguente espressione:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A \int_D e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - E(\mathbf{p})t)} d^3p, \quad (2.134)$$

dove D è un dominio limitato dello spazio degli impulsi, in cui il momento lineare \mathbf{p} della particella è non nullo. Dalla teoria della propagazione ondosa, sappiamo che la velocità del pacchetto d'onde è la velocità di gruppo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dp} \frac{dp}{dk} = \frac{dE}{dp} \quad (2.135)$$

Ad esempio, per una particella non relativistica:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \implies \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v, \quad (2.136)$$

per cui

$$v_g = v \quad (2.137)$$

Per quanto precede, la funzione (2.132) è soluzione dell'equazione d'onda di D'Alembert. Verifichiamo che tale funzione risolve anche l'equazione di Schrödinger. Senza perdita di generalità, consideriamo il caso unidimensionale:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.138)$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -kAe^{i(kx - \omega t)} \implies \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi(x, t) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -i\omega \psi(x, t) \end{aligned}$$

che sostituite nell'equazione di Schrödinger:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x) = \hbar\omega$$

Per l'ipotesi di De Broglie:

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E,$$

cioè l'energia meccanica di una particella che compie un moto non relativistico in un campo di forze posizionali di energia potenziale $V(x)$.

2.8 Il concetto di onda di probabilità. La mitragliatrice di Born

Consideriamo una particella di massa m che si muove in una regione sede di un campo di forze posizionali di energia potenziale $V(\mathbf{x})$. L'energia meccanica della particella si scrive:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (2.139)$$

Per l'ipotesi di De Broglie possiamo associare a tale particella l'onda piana monocromatica:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)} \quad (2.140)$$

soluzione dell'equazione di Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (2.141)$$

Nel paragrafo 2.6 abbiamo visto che Schrödinger interpretò $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ alla stregua di una grandezza proporzionale alla densità di carica elettrica associata alla particella. Ad esempio nel caso dell'atomo di idrogeno, l'elettrone risulterebbe "distribuito" nell'atomo proprio come un'onda. Ciò è in accordo con l'ipotesi di De Broglie secondo la quale il moto dell'elettrone equivale alla propagazione di un'onda. Nella concezione di Schrödinger – De Broglie, l'onda è l'ente fisico fondamentale, mentre l'aspetto corpuscolare è un epifenomeno. Si parla, dunque, di *onde materiali*. Abbiamo poi visto (§ 2.6) che nel 1926 Born congetturò $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ = densità di probabilità di trovare l'elettrone in un dato punto dello spazio e in un assegnato istante di tempo. Per giustificare tale congettura Born paragonò l'onda di materia all'onda d'urto generata dall'esplosione di una bomba [7]. In un piano orizzontale contenente il punto di esplosione, fissiamo un sistema di riferimento polare (r, θ) con polo nel predetto punto. In presenza di una distribuzione isotropa dell'energia generata dall'esplosione, si ha che la funzione che descrive la propagazione dell'onda d'urto è $\psi(r, t)$, cioè indipendente dall'angolo θ in virtù dell'isotropia. Inoltre, $\psi(r, t)$ decresce all'aumentare di r . Più precisamente:

$$\exists r_0 > 0 \mid \psi(r_0, t) \simeq 0 \quad (2.142)$$

In altri termini, se ci posizioniamo a distanza $r \geq r_0$ restiamo illesi. Chiamiamo r_0 *distanza di sicurezza*. Born suggerisce di prendere la stessa quantità Q di polvere da sparo costituente la bomba, per fabbricare $N \gg 1$ proiettili che verranno sparati da una *mitragliatrice isotropa*, ovvero una mitragliatrice che attraverso un meccanismo rotante, spara proiettili distribuendoli per 360° in un assegnato piano orizzontale. La rotazione genera, inoltre, una distribuzione statistica pari all'intensità dell'onda d'urto prodotta dalla bomba. Cioè la percentuale di proiettili che giunge a r all'istante t è:

$$n(r, t) = \psi(r, t), \quad \forall r, t \quad (2.143)$$

da ciò segue che alla distanza di sicurezza:

$$n(r_0, t) \simeq 0 \quad (2.144)$$

Abbiamo, dunque, una probabilità "quasi" nulla che un proiettile ci colpisca. A differenza dell'esplosione della bomba in cui è l'energia che si propaga per onde, nel caso della mitragliatrice l'ente che si propaga non è più l'energia ma la probabilità. Una probabilità di trovare la materia "condensata" in un proiettile.

2.9 L'esperienza della doppia fenditura

Nei numeri precedenti abbiamo visto che le particelle materiali esibiscono una duplice natura corpuscolare e ondulatoria. L'aspetto corpuscolare prende forma nelle esperienze in cui la particella è singolarmente osservata. Di contro, il comportamento ondulatorio si manifesta nei tipici fenomeni da interferenza e diffrazione.

Per discutere il *dualismo onda-corpuscolo* illustriamo l'esperienza della doppia fenditura [2]. Una sorgente S emette un fascio di elettroni di energia E . Il fascio incide sulla lamina Σ_1 che presenta le fenditure numerate con 1 e 2, come illustrato in fig. 2.3. Per l'ipotesi di De Broglie il moto di singolo elettrone del fascio equivale alla propagazione di un'onda piana monocromatica:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)} \quad (2.145)$$

che incide sulla lamina Σ_1 , per cui in parte viene riflessa e in parte subisce una diffrazione attraverso le fenditure. Se denotiamo con ψ_1 e ψ_2 le onde diffratte, l'onda di De Broglie nella regione in prossimità dello schermo Σ_2 è:

$$\psi_{diff}(\mathbf{x}, t) = \psi_1(\mathbf{x}, t) + \psi_2(\mathbf{x}, t) \quad (2.146)$$

Per l'interpretazione statistica di Born, la densità di probabilità di trovare l'elettrone in un assegnato punto in prossimità dello schermo Σ_2 è

$$\rho_{diff}(\mathbf{x}, t) = |\psi_1(\mathbf{x}, t) + \psi_2(\mathbf{x}, t)|^2, \quad (2.147)$$

mentre la densità di corrente di probabilità è

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{diff}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\hbar}{2im} (\psi_{diff}^* \nabla \psi_{diff} - \psi_{diff} \nabla \psi_{diff}^*) \\ &= \frac{\hbar}{2im} [(\psi_1 + \psi_2)^* \nabla (\psi_1 + \psi_2) - (\psi_1 + \psi_2) \nabla (\psi_1 + \psi_2)^*] \end{aligned} \quad (2.148)$$

Un rivelatore R è disposto sullo schermo Σ_2 ed ha una posizione variabile individuata dall'ascissa x (cfr. fig. 2.3). Se \mathbf{n} è il versore della normale esterna a Σ_2 e $d\sigma$ l'elemento di superficie di R ovvero la sua sezione, la probabilità che un elettrone attraversi $d\sigma$ nell'intervallo unitario di tempo è

$$\Pi(x, t) = \mathbf{j}_{diff}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (2.149)$$

dove $\mathbf{j}_{diff}(\mathbf{x}, t)$ è data dalla (2.148). Si osservi che Π dipende dall'ascissa x e non da $\mathbf{x} = (x, y, z)$ in quanto la densità di corrente va calcolata lungo Σ_2 in cui è stato fissato un sistema di ascisse. Dalla configurazione sperimentale segue che la formula precedente esprime la probabilità che R riveli il passaggio di un elettrone nell'intervallo unitario di tempo.

La media temporale di $\Pi(t)$ è

$$\bar{\Pi}(x) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Pi(t) dt \quad (2.150)$$

Se ci limitiamo a $\tau \gg 1$, si ha

$$\bar{\Pi}(x) \simeq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Pi(t) dt, \quad (2.151)$$

che per la legge dei grandi numeri è

$$\bar{\Pi}(x) = \Phi(x),$$

essendo Φ il flusso di elettroni nell'unità di tempo attraverso R , cioè il numero di elettroni che nell'unità di tempo attraversano la sezione unitaria di R . Al variare della posizione di R , si ha Φ è una

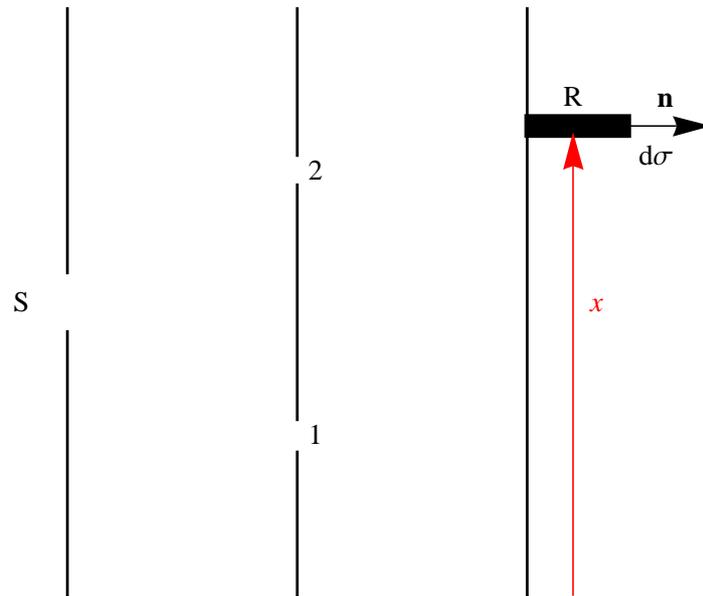


Figura 2.3: Illustrazione dell'esperienza della doppia fenditura.

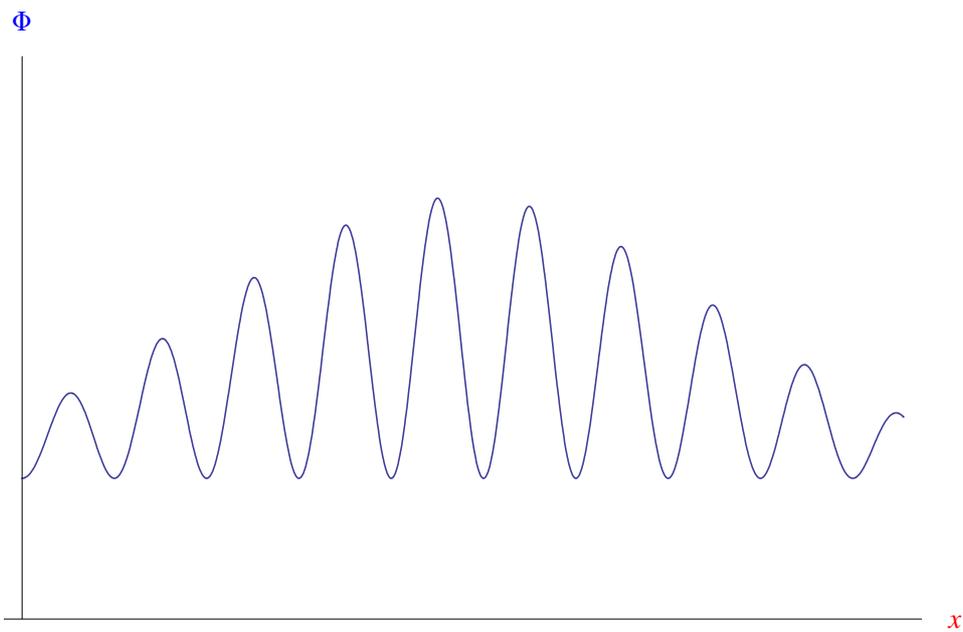


Figura 2.4: Figura di interferenza (grafico del flusso di elettroni $\Phi(x)$).

funzione reale della variabile reale x , cioè $\Phi(x)$ il cui grafico si chiama *figura di interferenza* giacché presenta una alternanza di massimi e minimi tipici dei fenomeni di interferenza, come illustrato in fig. 2.4.

Aggiungiamo ora due rivelatori R_1 e R_2 in corrispondenza delle fenditure 1 e 2. In tal modo il numero $N(t)$ di particelle conteggiate da R al tempo t , si esprime come somma di due contributi:

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t), \quad (2.152)$$

dove $N_k(t)$ è il numero di particelle conteggiate da R_k al tempo t (per $k = 1, 2$). Considerando come sono posizionati i rivelatori R_1 e R_2 , si ha che $N_k(t)$ è il numero di particelle che sono passate attraverso la k -esima fenditura. Inoltre, dalla (2.146) segue che le onde diffratte ψ_1 e ψ_2 danno luogo alle correnti di probabilità.

$$\mathbf{j}_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2im} (\psi_k^* \nabla \psi_k - \psi_k \nabla \psi_k^*), \quad k = 1, 2 \quad (2.153)$$

Quindi la probabilità che R_k riveli il passaggio di un elettrone nell'intervallo di tempo unitario è:

$$\Pi_k(x_k, t) = \mathbf{j}_k(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\sigma_k, \quad (2.154)$$

dove: x_k è l'ascissa di R_k calcolata rispetto a un asse x disposto lungo Σ_1 ; \mathbf{n} è il versore della normale esterna a Σ_1 ; $d\sigma_k$ è la sezione di R_k . Eseguendo la media temporale otteniamo il flusso di elettroni che attraversano R_k nell'unità di tempo:

$$\Phi_k = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Pi_k(x_k, t) dt \underset{\tau \gg 1}{\simeq} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Pi_k(x_k, t) dt \quad (2.155)$$

Dalla (2.152) si ha che il flusso totale delle particelle che attraversano la lamina Σ_1 e che quindi giungono sullo schermo Σ_2 è:

$$\Phi_{tot}(x) = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (2.156)$$

dove ora l'ascissa x è misurata lungo Σ_2 . Nella configurazione sperimentale precedente (assenza di R_k) avevamo trovato:

$$\Phi(x) \underset{\tau \gg 1}{=} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{j}_{diff}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\sigma dt \quad (2.157)$$

Confrontando con Φ_1 e Φ_2 , dati da

$$\Phi_1 \underset{\tau \gg 1}{=} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{j}_1(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\sigma_1 dt, \quad \Phi_2 \underset{\tau \gg 1}{=} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{j}_2(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\sigma_2 dt,$$

si ha

$$\Phi_{tot}(x) \neq \Phi(x),$$

giacché

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{diff}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\hbar}{2im} [(\psi_1 + \psi_2)^* \nabla (\psi_1 + \psi_2) - (\psi_1 + \psi_2) \nabla (\psi_1 + \psi_2)^*] \\ &= \frac{\hbar}{2im} [\psi_1^* \nabla (\psi_1 + \psi_2) - \psi_1 \nabla (\psi_1 + \psi_2)^* + \\ &\quad + \psi_2^* \nabla (\psi_1 + \psi_2) - \psi_2 \nabla (\psi_1 + \psi_2)^*] \\ &\neq \mathbf{j}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{j}_2(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.158)$$

Graficando Φ_1 e Φ_2 in funzione di x , si trova un andamento privo di oscillazioni. Precisamente, la funzione $\Phi_1(x)$ presenterà un massimo relativo (che poi è anche massimo assoluto) in corrispondenza

dell'ascissa x_1 del rivelatore R_1 , con andamento decrescente man mano che ci allontaniamo dal rivelatore (lungo la lamina Σ_1). Un comportamento analogo per il flusso $\Phi_2(x)$ che presenterà un massimo in corrispondenza di R_2 . Ne consegue che anche la somma $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_{tot}$ esibirà un andamento privo di oscillazioni. Fisicamente ciò si interpreta asserendo che la presenza dei rivelatori ha modificato il fenomeno distruggendo la figura di interferenza [2].

Se schematizziamo l'elettrone come un corpuscolo, dobbiamo necessariamente asserire che per giungere in R , l'elettrone deve necessariamente passare per una delle due fenditure. Ed è proprio ciò che succede quando posizioniamo i due rivelatori R_1 e R_2 . Tuttavia in assenza di questi ultimi, viene generata una figura di interferenza tipica dei fenomeni ondulatori, e ciò distrugge il carattere corpuscolare dell'elettrone. Ma anche il carattere ondulatorio non può essere applicato senza restrizioni; infatti, basta posizionare nuovamente i predetti rivelatori per cancellare la figura di interferenza.

Concludiamo osservando che il dualismo onda-corpuscolo rispecchia due punti di vista opposti insiti nell'interpretazione di fenomeni fisici [3]. Infatti, questi ultimi vengono interpretati o come manifestazione di *enti* schematizzabili attraverso un punto geometrico (la *simple location* di Whitehead) o come manifestazione di un *campo* spazialmente esteso. Dal punto di vista della *simple location* i fenomeni vengono spiegati attraverso l'azione di corpuscoli o particelle materiali, come ad esempio nel caso dell'attrazione gravitazionale. Nel paradigma del "campo esteso", invece, i processi fisici sono interpretabili attraverso l'azione di un campo in cui l'energia si propaga per onde (si pensi, ad esempio, al campo elettromagnetico quale soluzione delle equazioni di Maxwell).

La realtà fisica esibisce, dunque, un dualismo che vede in contrapposizione il paradigma della *simple location* con quello del campo esteso. Nel caso in esame, il predetto dualismo si manifesta nella dicotomia onda-corpuscolo, due aspetti che coesistono in un'unica entità che chiamiamo "particella".

2.10 Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Nel paragrafo precedente abbiamo esaminato il dualismo onda-corpuscolo, secondo cui la materia esibisce proprietà corpuscolari od ondulatorie in funzione della configurazione sperimentale atta a studiarne il comportamento.

Per "corpuscolo" intendiamo un qualunque sistema fisico avente dimensioni trascurabili rispetto a quelle dell'ambiente in cui si muove. Geometricamente, un corpuscolo è rappresentato da un punto dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Denominazioni alternative sono *punto materiale* e *particella*. Assegnato un sistema di riferimento inerziale $K(Oxyz)$, supponiamo che siano note le equazioni orarie del moto, ossia consideriamo assegnata una **rappresentazione parametrica regolare** della traiettoria della particella, ove il parametro della rappresentazione è il tempo t misurato dall'orologio di K :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (2.159)$$

da cui è possibile ricavare – per derivazione rispetto a t – le componenti cartesiane del vettore velocità della particella in ogni istante di tempo:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \quad (2.160)$$

e quindi della quantità di moto (o impulso):

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad p_z = mv_z \quad (2.161)$$

Orbene, il principio di interminazione di Heisenberg stabilisce:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.162)$$

Senza formalizzarci troppo, diciamo che $\Delta x, \Delta p_x, \dots$, esprimono l'incertezza con cui conosciamo la grandezza x (o p_x). Dalle disuguaglianze (2.162) segue l'impossibilità di misurare simultaneamente e con precisione infinita, coppie di grandezze $(x, p_x), (y, p_y), (z, p_z)$. Ad esempio, se misuriamo la componente p_x dell'impulso con precisione infinita ($\Delta p_x = 0$), si ha $\Delta x = +\infty$. Fisicamente questo risultato implica che la particella può avere un'ascissa qualunque (da $-\infty$ a $+\infty$). Al contrario, possiamo misurare y, z con precisione infinita anche se $\Delta p_x = 0$, con la differenza che si avrà $\Delta p_y = \Delta p_z = +\infty$, ovvero una indeterminazione sulle componenti p_y, p_z del vettore impulso. Queste considerazioni (che nascono da evidenze sperimentali) distruggono il concetto di traiettoria. Fondamentalmente, le predette evidenze sperimentali nascono da due esperienze ideali proposte da Heisenberg [2].

2.10.1 Diffrazione attraverso una fenditura

Una sorgente S emette un fascio di elettroni in cui ogni elettrone è schematizzato attraverso un corpuscolo di impulso \mathbf{p} . Il fascio incide perpendicolarmente su uno schermo Σ in cui è praticata una fenditura di larghezza d (cfr. fig. 2.5). Il singolo elettrone che attraversa la fenditura ha un'ordinata y nota con una indeterminazione:

$$\Delta y \sim d \tag{2.163}$$

Per l'ipotesi di De Broglie, il moto di un elettrone di impulso \mathbf{p} equivale alla propagazione di un'onda piana e monocromatica:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)},$$

per cui l'impulso è legato al vettore d'onda dalla relazione $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ o ciò che è lo stesso, alla lunghezza d'onda $\lambda = h/p$. Per effetto della diffrazione, il vettore che definisce la direzione di propagazione (cioè \mathbf{k}) viene deviato di un angolo $-\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0$, dove

$$\beta_0 \sim \frac{\lambda}{d}$$

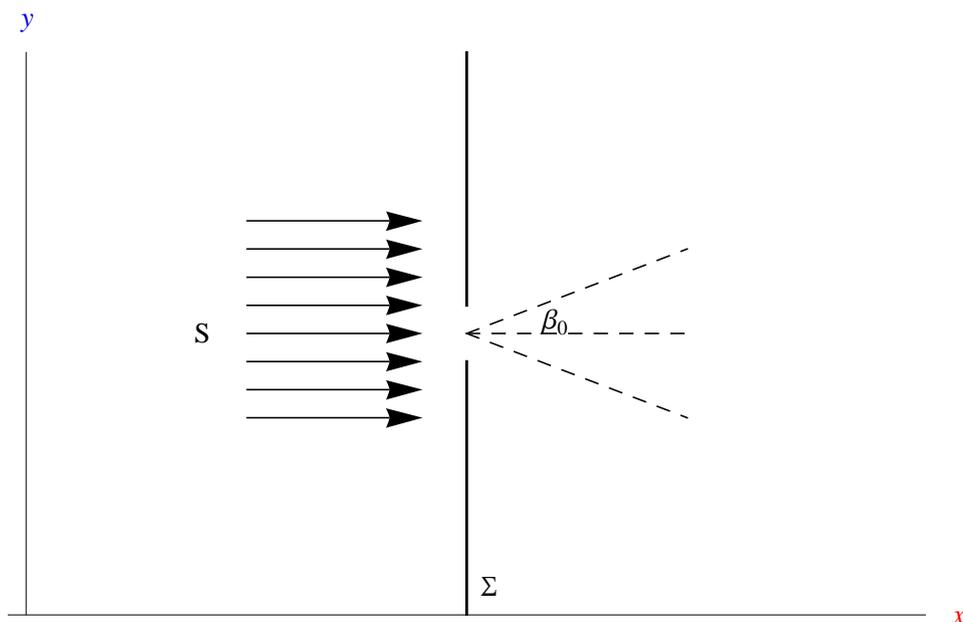


Figura 2.5: Diffrazione attraverso una fenditura di un fascio di elettroni.

Prima di attraversare Σ le componenti cartesiane dell'impulso dell'elettrone sono:

$$p_x = p, \quad p_y = 0,$$

giacché il fascio incide perpendicolarmente a Σ . Ma per quanto visto, la diffrazione può deviare il vettore \mathbf{p} di un angolo $-\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0$, per cui sarà $p_y = p \sin \beta$. Ne consegue un'indeterminazione

$$\Delta p_y \sim p \sin \beta_0 \sim \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d} \quad (2.164)$$

Tenendo conto della (2.163):

$$\Delta y \Delta p_y \sim h \quad (2.165)$$

In maniera analoga si perviene a

$$\Delta x \Delta p_x \sim h, \quad \Delta z \Delta p_z \sim h \quad (2.166)$$

Bibliografia

- [1] Recami E., *Il caso Majorana* Utet, 1987.
- [2] Caldirola P. Cirelli R., Prosperi G.M. *Introduzione alla Fisica Teorica* Utet, 1987.
- [3] Caldirola P. *Dalla microfisica alla macrofisica*, Mondadori 1978
- [4] Recami E., Zamboni-Rached M., Licata I., On a Time-Space Operator for Observables in QM and QFT, preprint su Arxiv
- [5] Cattaneo Gasparini I., *Strutture algebriche e operatori lineari*. Veschi, 1990
- [6] Davydov A.S., *Meccanica quantistica*. Edizioni Mir, 1981
- [7] Coppola F., *Ipotesi sulla realtà*. Lalli, 1991.