Esercizio n. 95

http://www.extrabyte.info

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}} = \infty^0$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}\right] = \lim_{x\to 0^+} \ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln(\sin x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata ∞^0 alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln(\sin x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos^2 x} = -1$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}\right] = -1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$