Forma algebrica dei numeri complessi

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Sia (x, y) un numero complesso preso ad arbitrio. Dalla definizione di addizione di numeri complessi e di moltiplicazione di numeri complessi, si trae la seguente identità:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) \tag{1}$$

Ne consegue che un qualunque numero complesso si esprime in uno ed un solo modo, come somma di un numero complesso del tipo $(x, 0)$ e di un numero complesso del tipo $(0, y)$. Ciò suggerisce di definire i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R}' = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\}, \quad \mathbb{I} = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid x = 0\} \tag{2}$$

È facile persuadersi che la struttura algebrica di campo viene trasferita a $\mathbb{R}'$. Innanzitutto osserviamo che $\mathbb{R}'$ è chiuso rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione di elementi di $\mathbb{R}'$:

$$\begin{cases} (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in \mathbb{R}' \\ (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0) \in \mathbb{R}' \end{cases}, \quad \forall (x_1, 0), (x_2, 0) \in \mathbb{R}' \tag{3}$$

Inoltre:

1. $(0, 0) \in \mathbb{R}'$
2. $(1, 0) \in \mathbb{R}'$
3. $-(x, 0) \in \mathbb{R}', \quad \forall (x, 0) \in \mathbb{R}'$
4. $(x, 0)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+0}, -\frac{0}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{1}{x}, 0\right) \in \mathbb{R}', \quad \forall (x, 0) \in \mathbb{R}' - \{(0, 0)\}$

Ciò implica che $\mathbb{R}'$ è un **sottocampo** di $\mathbb{C}$.

Esiste un'evidente corrispodenza biunivoca tra $\mathbb{R}'$ e $\mathbb{R}$, cosicché possiamo identificare ogni elemento $(x, 0)$ di $\mathbb{R}'$ con il corrispondente elemento di $\mathbb{R}$. Cioè adottiamo la convenzione:

$$(x, 0) \equiv x$$

Pertanto i numeri complessi del tipo $(x, 0)$ sono numeri reali. Ciò implica la denominazione di **unit'a reale** per $(1, 0) \equiv 1$. Abbiamo in tal modo mostrato che il campo complesso $\mathbb{C}$ è un *ampliamento* del campo reale $\mathbb{R}$.

L'insieme $\mathbb{I}$, invece, non è un sottocampo di $\mathbb{C}$ giacché non è chiuso rispetto alla moltiplicazione di elementi dell'insieme medesimo. Infatti, ricordando la definzione di moltiplicazione:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

si ha

$$(0, y_1) \cdot (0, y_2) = (-y_1 y_2, 0) \notin \mathbb{I}, \quad \forall (0, y_1), (0, y_2) \in \mathbb{I} \tag{4}$$

Definizione 1 *Gli elementi di I diconsi* **numeri immaginari** *o* **immaginari puri**. *Il numero* $(0, 1)$ *è l'***unità immaginaria**.

Quest'ultima denominazione deriva da

$$(0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0), \quad \forall (0, y) \in \mathbb{I} \tag{5}$$

L'unità immaginaria è simboleggiata da i. Cioè

$$i \stackrel{def}{=} (0, 1) \tag{6}$$

Segue

$$(0, y) = \underbrace{(0, 1)}_{=i} \cdot \underbrace{(y, 0)}_{=y} = iy, \tag{7}$$

cosicché ogni numero immaginario $(0, y)$ si esprime attraverso il prodotto dell'unità immaginaria i per il numero reale y. In tal modo la (1) può essere riscritta come

$$(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{=x} + \underbrace{(0, y)}_{=iy} = x + iy \tag{8}$$

Abbiamo così ricavato la **forma algebrica del numero complesso** (x, y) che da qui in poi indicheremo con z:

$$z = x + iy \tag{9}$$

Definizione 2 *Assegnato $z = x + iy$, il numero reale x si dice* **parte reale** *del numero complesso z e si indica con* $\mathrm{Re}\,(z)$*, mentre il numero reale y è la* **parte immaginaria** *di z e si denota con* $\mathrm{Im}\,(z)$.

È facile calcolare la potenza *n-esima* dell'unità immaginaria per alcuni valori di n:

$$\begin{aligned}
i^2 &= (1, 0) \cdot (1, 0) = (0 - 1, 0) = (-1, 0) = -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\
i^4 &= i^3 \cdot i^2 = -i^2 = 1 \\
i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\
i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1
\end{aligned}$$

La forma algebrica di un numero complesso è efficace per l'esecuzione di moltiplicazione e di divisione di due numeri complessi. Siano $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Segue

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2
\end{aligned}$$

Cioè

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i (x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{10}$$

Se $z_2 \neq 0$ possiamo eseguire la divisione

$$\frac{z_1}{z_2}$$

A tale scopo moltiplichiamo e dividiamo per il complesso coniugato di z_2, cioè $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$:

$$\frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \tag{11}$$

Ma $z_2 \cdot \bar{z}_2 = |z_2|^2$ cioè il modulo di z_2:

$$|z_2|^2 = (x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2) = x_2^2 + y_2^2$$

Sviluppando il numeratore $z_1 \cdot \bar{z}_2$ si trova finalmente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \tag{12}$$

A questo punto è facile calcolare il reciproco di $z = x + iy \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \tag{13}$$