

Appunti di Fisica 1

Marcello Colozzo - <http://www.extrabyte.info>

Esercizio 1 Il processo di *focalizzazione magnetica* di elettroni, è ben modellizzato dal seguente campo di forze in due dimensioni:

$$\mathbf{F}(x, y) = -k_1 y \mathbf{i} - k_2 x \mathbf{j}, \quad (1)$$

dove $k_1 \neq k_2$ sono due costanti positive con le dimensioni di una forza su una lunghezza. È conservativo il campo (1)?

Soluzione

Le componenti cartesiane della forza sono:

$$F_x(x, y) = -k_1 y, \quad F_y(x, y) = k_2 x$$

Segue

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -k_1 \neq k_2 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Ne consegue che il campo assegnato non è conservativo:

$$\nexists V(x, y) \mid \mathbf{F} = -\nabla V$$

Proviamo a calcolare il lavoro eseguito dalle forze del campo quando un punto materiale viene spostato lungo una circonferenza γ di centro l'origine e raggio R . Senza perdita di generalità, il punto materiale percorre γ in senso antiorario che come è noto, è il verso positivo, per cui:

$$L = \oint_{+\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \oint_{+\gamma} (k_1 y dx + k_2 x dy)$$

Una rappresentazione parametrica di γ è

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Quindi

$$\begin{aligned} L &= R^2 \int_0^{2\pi} (k_1 \sin^2 \theta - k_2 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= R^2 \left(\underbrace{k_1 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{I_1} - \underbrace{k_2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{I_2} \right) \end{aligned}$$

Calcoliamo gli integrali. Dalla nota relazione trigonometrica

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

si ha

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left(2\pi - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta}_{=0} \right)$$

Cioè

$$I_1 = \pi$$

L'integrale I_2

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta) d\theta = 2\pi - \pi = \pi$$

Ne concludiamo

$$L = \pi R^2 (k_1 - k_2) \neq 0$$

in conseguenze del carattere non conservativo della forza che esegue tale lavoro. Si noti che per $k_1 = k_2$ si ha $L = 0$, conformemente all'[esercizio precedente](#).