Appunti di Fisica 1

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

1 Forze non conservative

Per quanto stabilito in una lezione precedente, il teorema di conservazione dell'energia meccanica è un caso particolare del teorema del lavoro e dell'energia cinetica, espresso dalla seguente relazione differenziale:

$$dL = dT \tag{1}$$

Infatti, se la risultante $\mathbf{F}$ delle forze agenti sul punto materiale è conservativa, si ha:

$$dL = -dV \tag{2}$$

per cui

$$d(T+V) = 0 \Longrightarrow T + V = \text{costante} \equiv E$$

Nel caso contrario i.e. se $\mathbf{F}$ non è conservativa possiamo servirci solo della (1), che in termini finiti si scrive

$$L = T_2 - T_1 \tag{3}$$

Se $\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$ si ha $L = \sum_{k=1}^{n} L_k$ essendo L_k il lavoro eseguito da $\mathbf{F}_k$. In termini di traiettoria

$$L = \int_{\gamma(A,B)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma(A,B)} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{s} \tag{4}$$

In questo caso il lavoro L dipende oltre che dagli estremi A e B, dalla traiettoria seguita γ. In linea di principio, possiamo trovare traiettorie per le quali il lavoro è nullo, ma ciò non implica il carattere conservativo di $\mathbf{F}$. Alternativamente, possiamo argomentare in termini di traiettorie chiuse: affinché la forma differenziale lineare

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

sia un differenziale esatto, è sufficiente che

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \forall \gamma \text{ regolare, semplice e chiusa}$$

Tipici esempi di forze non conservative sono le forze di attrito e le resistenze passive. Dal momento che tali forze sono costantemente orientate in verso contrario a quello del moto, si ha

$$\forall d\mathbf{s}, \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} < 0) \Longrightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} < 0$$

Esempio 1 *Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su una guida circolare scabra di raggio di raggio R (fig. 1).*

Denotando con s l'ascissa curvilinea contata a partire dal punto A, la forza di attrito è

$$\mathbf{F}_\tau = -m\,|\ddot{s}|\,\boldsymbol{\tau}$$

Il lavoro elementare eseguito da tale forza è

$$dL_\tau = \mathbf{F}_\tau \cdot d\mathbf{s} = -m\,|\ddot{s}|\,\boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{s} = -m\,|\ddot{s}|\,ds$$

Integrando

$$L_\tau = \oint_{\gamma} dL_\tau = -m\,|\ddot{s}| \int_0^{2\pi R} ds = -2\pi m\,|\ddot{s}|\,R < 0 \tag{5}$$

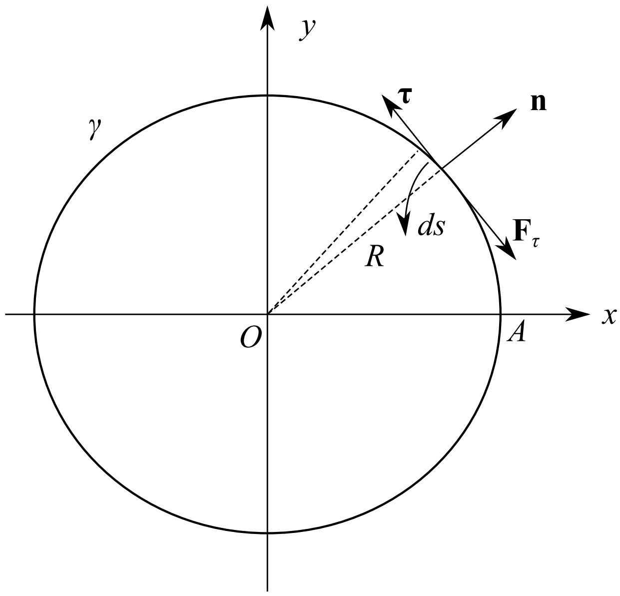

Figura 1: Esempio 1.

Una caratterizzazione notevole delle forze non conservative, è espresso dal seguente teorema:

Teorema 2 *Il lavoro eseguito dalla risultante delle forze non conservative agenti su un punto materiale che si muove lungo una curva $\gamma(A, B)$, è pari alla variazione di energia meccanica tra gli estremi A e B della predetta curva.*

Dimostrazione. La risultante delle forze agenti sul punto materiale, può essere scritta come

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{nc}, \tag{6}$$

dove $\mathbf{F}_c$ e $\mathbf{F}_{nc}$ sono rispettivamente le risultanti delle forze conservative e delle forze non conservative[1]. Segue che il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ nello spostare il punto materiale da A a B, è con ovvio significato dei simboli:

$$L = L_c + L_{nc} \tag{7}$$

Per il teorema del lavoro e dell'enegia cinetica:

$$L_c + L_{nc} = T_2 - T_1, \quad (T_1 = T(A), \ T_2 = T(B)), \tag{8}$$

mentre

$$L_c = V_1 - V_2, \tag{9}$$

essendo $V(x, y, z)$ l'energia potenziale del campo conservativo $\mathbf{F}_c(x, y, z)$. L'asserto segue dalla sostituzione della (9) nella (8):

$$V_1 - V_2 + L_{nc} = T_2 - T_1 \Longrightarrow L_{nc} = (T_2 + V_2) - T_1 + V_1$$

Cioè

$$L_{nc} = E_2 - E_1 \tag{10}$$

■

[1] Ovviamente una delle due può essere nulla.

Riferimenti bibliografici

[1] Sette D., 1968. *Lezioni di Fisica. Volume I*. Veschi