

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Introduzione alla Fisica del reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli



Indice

1	Teoria del trasporto e dispersione	5
1.1	Introduzione	5
1.2	Legge di Flick	7
1.3	Sezione trasversale e suo significato	8
1.3.1	Metodo del Kernel	10
1.4	Equazione di diffusione	14
1.5	Equazione di Boltzmann	20
1.6	Equazione di diffusione (parte 2)	24
1.7	Equazione non omogenea	28
1.7.1	Flusso asintotico	30
1.7.2	Flusso transiente	32
1.7.3	Dispersione o scattering anisotropo	34
2	Meccanica delle collisioni elastiche	36
2.1	Classificazione dei reattori a fissione nucleare	36
2.2	Legge di dispersione	38
2.3	Potere di rallentamento e rapporto di moderazione	40
2.3.1	Letargia	41
2.3.2	Rallentamento in un mezzo infinito, stato stazionario	41
3	Reattori termici. Caso ideale: reattore esteso all'infinito	48
3.1	Reattore termico omogeneo, spoglio, ed esteso all'infinito	48
3.2	Reattore termico omogeneo con uranio-235	55
3.3	Reattore termico eterogeneo	55
4	Distribuzione di velocità dei neutroni	60
4.1	Calcolo della distribuzione marginale maxwelliana	60
5	Reattori termici. Caso reale: reattore di dimensione finite	62
5.1	Calcolo di K_{eff} . Età di Fermi	62
5.1.1	Integrazione dell'equazione di Fermi. Probabilità di fuga alle risonanze	64
5.1.2	Equazione critica di un reattore omogeneo e spoglio	68
5.1.3	Buckling di un reattore	69
5.2	Avviamento di un reattore	70
5.3	Potenza sviluppata da un reattore	74
5.4	Reattori con riflettori	74
5.4.1	Introduzione	74
5.4.2	Gruppi di diffusione	75

5.4.3	Guadagno da riflettore (reflector saving)	77
5.4.4	Teoria dei due gruppi di neutroni: veloci e lenti (termici)	78
5.4.5	Teoria di n gruppi d'energia	85
5.5	Attività temporale di un reattore termico spoglio	86
5.5.1	Neutroni pronti	86
5.5.2	Neutroni ritardati. Equazioni della cinetica	87
5.5.3	Equazioni della cinetica e reattività	90
5.5.4	Gruppo di neutroni ritardati	92
6	Controllo dei reattori	94
6.1	Introduzione. Criticità di un reattore	94
6.2	Combustibile	94
6.3	Temperatura	94
6.4	Prodotti di fissione	95
6.5	Barre di controllo. Teoria di un gruppo di energia	95
6.6	Prodotti di fissione. Veleni	98
6.7	Coefficiente di temperatura nucleare. Stabilità intrinseca di un reattore	100
A	Applicazioni dell'Analisi vettoriale	103
A.1	Equazione del bilancio	103
B	Armoniche sferiche. Polinomi di Legendre	105
B.1	Funzioni di quadrato sommabile sulla sfera unitaria	105
	Bibliografia	107

Introduzione storica

La fissione nucleare

Nella **fissione nucleare** il nucleo di un atomo pesante (uranio-235 o plutonio-239) decade in nuclei di atomi con numero atomico minore. Tale processo è accompagnato dall'emissione di energia e radioattività.

La fissione nucleare *spontanea* caratterizza gli elementi chimici pesanti come il mendelevio e il laurenzio. Per contro, il fenomeno può essere indotto artificialmente e allora si parla di fissione nucleare *artificiale* o di *origine antropica*.

Il primo processo di reazione nucleare artificiale fu realizzato nel 1932 dai fisici E. Walton e J. Cockcroft, i quali ottennero la fissione del nucleo di un atomo di litio-7 attraverso un bombardamento di protoni. Nel 1934 Enrico Fermi (fig. 1) e il suo gruppo di Via Panisperna, ottennero la fissione del nucleo dell'atomo di Uranio, utilizzando neutroni anziché protoni.

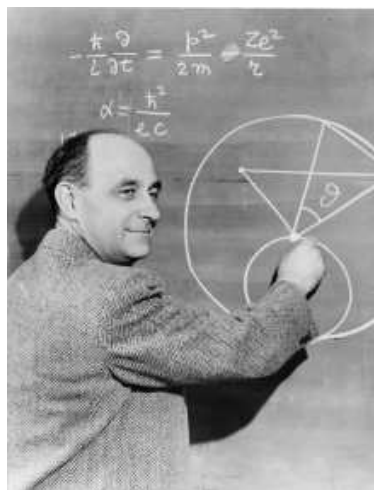


Figura 1: Enrico Fermi.

Il rallentamento dei neutroni era ottenuto utilizzando come sede degli esperimenti una vasca di pesci rossi, **ancora esistente** (l'acqua agiva da *moderatore*). In realtà Fermi e il suo gruppo pensavano di aver prodotto nuovi *elementi transuranici*. Incidentalmente, la chimica tedesca Ida Noddack ipotizzò la scissione del nucleo di Uranio, e furono i fisici Otto Frisch e Lise Meitner che elaborarono i fondamenti teorici della fissione nucleare.

Il ruolo svolto da Ettore Majorana

La genialità dell'intuizione di Fermi risiedeva nel fatto di aver utilizzato come “proiettili” i neutroni, anziché i protoni (come nell'esperienza di Walton e Cockcroft del 1932). I neutroni dal momento che hanno carica elettrica nulla, non vengono respinti dalla carica nucleare (positiva) come invece avviene per i protoni. Tuttavia, si era visto che in un processo di fissione i neutroni *lenti* sono più efficienti rispetto ai neutroni veloci. Per tale ragione il gruppo di via Panisperna impiegò l'acqua come mezzo moderatore in modo da rallentare i “neutroni-proiettili”.

Come è noto, il famoso fisico teorico Ettore Majorana (fig. 2) sparì misteriosamente nella primavera del 1938 [1].



Figura 2: Ettore Majorana.

Majorana faceva parte del gruppo di via Panisperna, per cui era a conoscenza delle ricerche sui processi di fissione che Fermi erroneamente interpretò come produzione di nuovi elementi transuranici. In realtà, il geniale fisico teorico si era progressivamente allontanato dall'Istituto di via Panisperna, ma secondo un famoso aneddoto¹, Fermi si rivolse ad Ettore nel tentativo di risolvere l'enigma sollevato da Ida Noddack circa la possibilità di aver scisso o meglio *fissionato*, il nucleo dell'atomo di uranio.

Forse Ettore Majorana aveva intuito (nel lontano 1934) le potenzialità distruttive dell'enorme quantità di energia liberata dalla fissione nucleare? Incidentalmente, come riportato da alcune testimonianze, Ettore affermava spesso che “la fisica era sulla strada sbagliata”.

¹È riportato al tempo 1h 25 m di questo [video](#).

Capitolo 1

Teoria del trasporto e dispersione

1.1 Introduzione

Si prenda in considerazione un certo numero di collisioni di dispersione (scattering) di un neutrone con i nuclei di un mezzo moderante la sua velocità: il moderatore. Sia r la distanza percorsa dal neutrone dal punto iniziale A in cui nasce al punto finale B in cui viene assorbito (fig. 1.1). Tra una collisione e l'altra il neutrone percorre la distanza s_i .

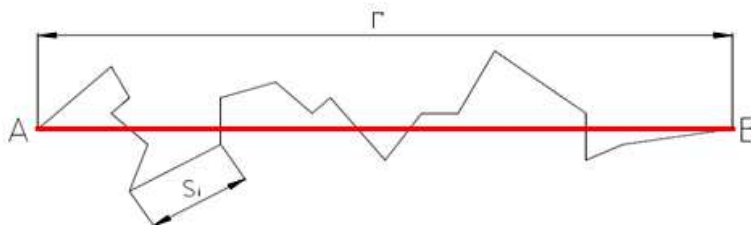


Figura 1.1: Percorso di un neutrone dal punto A di emissione al punto B di assorbimento.

Si ha dunque:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i \quad (1.1)$$

Ci interessa calcolare il valor medio di $|\mathbf{r}|^2$:

$$|\mathbf{r}|^2 = r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j = \sum_{i=1}^n s_i^2 + \sum_{i \neq j} s_i s_j \cos \psi_{ij} \quad (1.2)$$

Ipotizzando che il moderatore sia perfettamente isotropo si ha $\cos \psi_{ij} = 0$ e dunque:

$$M(r^2) = \sum_{i=1}^n s_i^2 = \overline{ns^2} \quad (1.3)$$

Poiché n è in realtà un numero molto grande passeremo a calcolare s^2 nel seguente modo:

$$\overline{s^2} = \int_0^{+\infty} s^2 p'(s) ds, \quad (1.4)$$

dove $p'(s)$ è la probabilità che occorre determinare. Chiamato λ_s il libero cammino medio di dispersione, la probabilità che ha il neutrone di essere assorbito in un intervallo $\Delta_s < \lambda_s$ è

Δ_s/λ_s . Allora la probabilità che ha il neutrone di giungere in $s + ds$ senza essere assorbito, è uguale alla *probabilità composta* = probabilità di essere in s + probabilità di essere assorbito in ds (fig. 1.2).



Figura 1.2: Valutazione della probabilità $p'(s)$.

$$\begin{aligned} p(s + ds) &= p(s) \left(1 - \frac{ds}{\lambda_s}\right) \Rightarrow p(s + ds) = p(s) - p(s) \frac{ds}{\lambda_s} \\ &\Rightarrow \frac{p(s + ds) - p(s)}{ds} \frac{1}{p(s)} = -\frac{1}{\lambda_s} \\ &\Rightarrow \frac{p'(s)}{p(s)} = -\frac{1}{\lambda_s} \Rightarrow p(s) = e^{-s/\lambda_s} \Rightarrow dp(s) = -\frac{1}{\lambda_s} e^{-s/\lambda_s} ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

Quindi sostituendo nella (1.4) si ottiene

$$\overline{s^2} = \int_0^{+\infty} (-s^2) \frac{1}{\lambda_s} e^{-s/\lambda_s} ds = 2\lambda_s^2 \quad (1.6)$$

e dunque per una dispersione **isotropa** si ha:

$$\overline{r^2} = 2n\lambda_s^2 \quad (1.7)$$

Definizione 1 Si definisce **dispersione elastica** (**elastic scattering**) la collisione tra particelle che cambiano il loro stato di moto, ma non mutano il loro **stato quantico** o la loro costituzione.

Nella maggior parte dei casi l'energia cinetica del nucleo bersaglio è molto piccola rispetto all'energia del nucleo proiettile. In taluni casi il nucleo bersaglio manifesta un rinculo – come ben si conosce dalla collisione tra sfere elastiche – mentre il proiettile perde parte della sua energia cinetica.

Il normale processo di moderazione neutronica consiste in una successione di collisioni elastiche con i nuclei del moderatore; ogni collisione si traduce in una perdita di energia cinetica del neutrone proiettile fino a quando essa si approssima all'energia cinetica dei nuclei del moderatore dovuta alla temperatura dello stesso moderatore. Si dice allora che i neutroni sono “termalizzati”.

L'energia cinetica dei neutroni di fissione è di circa 1 MeV; l'energia cinetica nel corso del processo di moderazione scende fino a qualche frazione di eV.

Definizione 2 Si la **dispersione anelastica** (**inelastic scattering**) allorchè le particelli collidenti cambiano il loro stato quantico, ma non la costituzione.

Esempio 3

$$Li^7 + n \rightarrow Li^{7*} + n \quad \text{il nucleo di Litio è in uno stato eccitato}$$

In tal caso, mentre avviene la dispersione elastica, una parte della corrispondente energia cinetica è ceduta al nucleo bersaglio per eccitarlo. La minima energia per eccitare il nucleo bersaglio si chiama **energia di soglia**.

1.2 Legge di Flick

Il trasporto e la dispersione dei neutroni si basano fondamentalmente sul seguente **bilancio neutronico**:

$$\text{produzione} - \text{perdita} - \text{assorbimento} = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (1.8)$$

dove n è la densità neutronica e t è il tempo. In uno stato costante e stazionario si ha:

$$\text{produzione} = \text{perdita} + \text{assorbimento} \quad (1.9)$$

L'equazione fondamentale che esprime il principio di conservazione del numero di neutroni è chiamata **equazione di Boltzmann del trasporto**, simile a quella che si studia nella diffusione dei gas, e nella quale appaiono: velocità del neutrone = v , raggio vettore di posizione = $\mathbf{r}$, direzione angolare in 4π radianti = Ω .

Come in tutti i fenomeni di diffusione di molecole di gas o di calore, si mostra che la diffusione tende sempre a muoversi da zone ad alta densità a zone di bassa densità. Un comportamento simile si osserva con la diffusione neutronica: ci sono più collisioni per unità di volume in zone ad alta densità, e dopo la collisione i neutroni si allontanano dal centro di collisione.

Se consideriamo un flusso neutronico di energia costante ossia di neutroni monoenergetici, possiamo scrivere la legge fondamentale nello studio della diffusione neutronica: la **legge di Flick**:

$$\mathbf{J} = -D \cdot \text{grad } \Phi \quad (1.10)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{n \text{ neutroni/unità di tempo}}{\text{unità di area normale alla direzione del flusso}} = \left[\frac{n \text{ neutroni}}{\text{m}^2 \text{ s}} \right] \\ \Phi &= \text{flusso di neutroni} = \frac{n \text{ neutroni/unità di tempo}}{\text{unità di volume}} = \left[\frac{n \text{ neutroni}}{\text{m}^3 \text{ s}} \right] \\ D &= \text{coefficiente} = \frac{n \text{ neutroni}/(\text{m}^2 \text{ s})}{n \text{ neutroni}/(\text{m}^3 \text{ s})} = [\text{m}] \end{aligned}$$

Prima di affrontare le equazioni suddette occorre ricordare alcuni argomenti della Fisica Nucleare.

Vita media τ e larghezza del livello Γ (mean lifetime τ and level width Γ)

La grandezza τ è mediamente l'intervallo di tempo durante il quale un nucleo rimane in uno stato eccitato prima di emettere una particella o una radiazione. La grandezza Γ può essere considerata come una indicazione dell'indeterminazione nella conoscenza dell'energia di uno stato quantico.

L'indeterminazione richiama il famoso **principio di indeterminazione di Heisenberg** per il quale scriveremo

$$\tau \Gamma = \frac{h}{2\pi}, \quad \text{dove } h = \text{costante di Planck} \quad (1.11)$$

Il nucleo di un isotopo cambierà il suo stato a causa dell'emissione di un protone, un neutrone, un particella α (nucleo di He), o di una radiazione; per ogni tipo di emissione dunque si definiranno dei tempi τ_i e delle larghezze di livello Γ_i e dunque per ogni stato energetico scriveremo

$$\tau_i \Gamma_i = \frac{h}{2\pi} \implies \Gamma = \sum_i \Gamma_i \quad (1.12)$$

il cui significato fisico è: Γ è proporzionale alla probabilità che il nucleo eccitato o composto, in uno stato energetico, subirà cambiamenti nell'unità di tempo.

Consideriamo una reazione nucleare genericamente rappresentata da



dove: a = particella incidente, X = nucleo bersaglio, Y = nucleo residuo, b = particella emessa

Siano Γ_a e Γ_b le larghezze dei livelli rappresentanti le probabilità di emissione delle particelle a e b . Avremo quindi: $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b$. Applicando i metodi della meccanica ondulatoria, Breit e Wigner derivarono un'espressione per le valutazioni delle reazioni nucleari, includendo l'assorbimento per risonanza. I risultati sono espressi in termini di **sezione trasversale nucleare** o **nuclear cross section** denotata con σ . Nota l'equazione di De Broglie, sia λ la lunghezza d'onda equivalente della particella incidente, avente energia interna e cinetica pari a E . Il nucleo composto, in esatta risonanza con il proprio livello quantico, avrà un'energia pari a E_r . Precisamente, la **formula di Breit–Wigner**

$$\sigma \simeq \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \quad (1.14)$$

Nel caso la particella α fosse un neutrone osserveremo che esso non ha energia interna e dunque la sua energia è solo cinetica, inoltre la sua lunghezza d'onda λ è proporzionale a $1/\sqrt{E}$. Pertanto per un neutrone si ha:

$$\lambda^2 = \frac{k}{\sqrt{E}} \quad \text{e} \quad \Gamma_a = \Gamma_n = \frac{k'}{\sqrt{E}},$$

essendo k, k' costanti. Sostituendo nella (1.14):

$$\sigma \simeq \frac{k/E}{4\pi} \frac{k'/\sqrt{E}\Gamma_b}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \implies \sigma \simeq \frac{A}{\sqrt{E}} \frac{\Gamma_b}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}, \quad \text{dove } A = \text{costante} \quad (1.15)$$

Nel caso in cui Γ_b non varia molto con l'energia il valore max della sezione trasversale è (v. fig. 1.3)

$$\sigma_{\max} \simeq \frac{A}{\sqrt{E_r}} \frac{\Gamma_b}{\frac{1}{4}\Gamma^2}$$

1.3 Sezione trasversale e suo significato

Consideriamo ora la lastra di fig. 1.4

N = numero di nuclei bersaglio per ogni cm^3

I = neutroni ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}$) che interferiscono normalmente sulla superficie della lastra

N_a = atomi/ cm^2 della lastra

Si definisce **sezione trasversale (cross section)** σ = l'area effettiva per la reazione di ogni nucleo bersaglio

$$\sigma = \frac{C}{N_a I} \quad (1.16)$$

Osservando la fig. 1.4

$$-\frac{dI}{I} = N\sigma dx \implies I_x = I_0 e^{-N\sigma x} \quad (1.17)$$

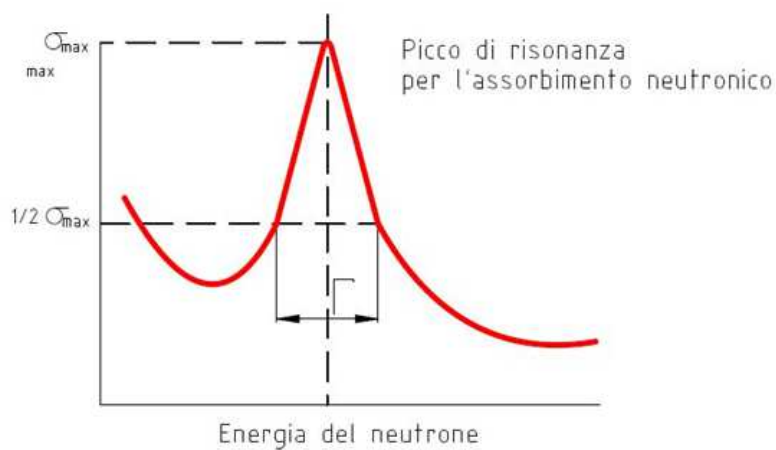


Figura 1.3: Massimo valore di σ .

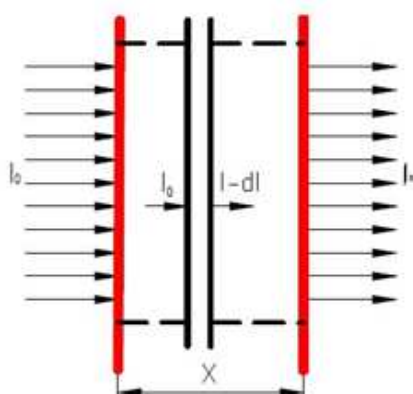


Figura 1.4: Neutroni attraverso una lastra.

Si chiama **sezione trasversale macroscopica**

$$\Sigma = N\sigma \quad (1.18)$$

Se il materiale della lastra si compone di diversi elementi avremo

$$\Sigma = N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2 + \dots + N_i\sigma_i + \dots \quad (1.19)$$

L'unità di misura normalmente utilizzata per le sezioni trasversali è il barn, dove

$$1\text{barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

1.3.1 Metodo del Kernel

Indichiamo con Σ_s e Σ_a le sezioni trasversali o sezioni d'urto rispettivamente di scattering e di assorbimento. La sezione d'urto totale sarà

$$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_a \quad (1.20)$$

Consideriamo un mezzo infinito, costituito da atomi pesanti, entro il quale viaggiano dei neutroni monoenergetici con diversa velocità, direzione e verso, la cui distribuzione sia isotropa. Il flusso neutronico sarà in funzione della posizione e del tempo $\Phi(\mathbf{s}, t)$ di dimensioni $\left[\frac{\text{neutroni}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}\right]$. In un punto $P(x, y, z)$ al tempo t avremo neutroni di scattering e di assorbimento pari a:

$$\Phi(\mathbf{s}, t) \cdot \Sigma_s, \quad \Phi(\mathbf{s}, t) \cdot \Sigma_a \quad (1.21)$$

I neutroni che subiscono scattering in P' sono $\Phi(\mathbf{s}', t) \cdot \Sigma_s$ (fig. 1.5).

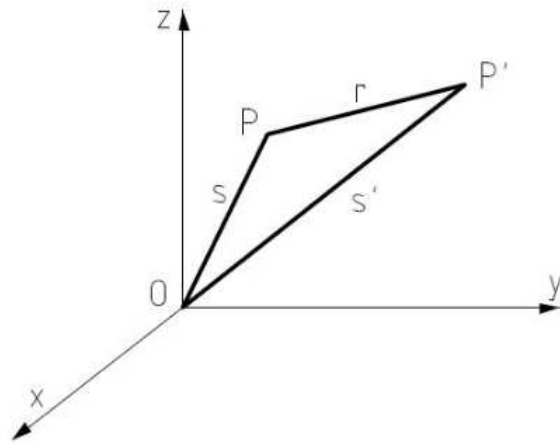


Figura 1.5: Scattering dei neutroni nel punto P' .

Per andare da P' a P i neutroni impiegano un tempo r/v (v = velocità) e dunque sarà

$$t - \frac{r}{v} = t'$$

La probabilità che avvenga uno scattering dando un incremento infinitesimo ds' è dunque:

$$\Phi\left(\mathbf{s}', t - \frac{r}{v}\right) \cdot \Sigma_s ds' \quad (1.22)$$

Indicando con dA un elemento di superficie $\perp$ a $\mathbf{r}$ e tale che $dA \cdot dh = dV$ sia un elemento interno di P esprimiamo con il rapporto $\frac{dA}{4\pi r^2}$ la probabilità che i neutroni di scattering di P' attraversino la dA . Il numero complessivo di neutroni sarà dunque:

$$\frac{dA}{4\pi r^2} \cdot \Phi \left(\mathbf{s}', t - \frac{r}{v} \right) \cdot \Sigma_s d\mathbf{s}', \quad (1.23)$$

di cui solo una parte giunge in P , precisamente

$$\Phi(\mathbf{s}, t) = \int_V \Phi(\mathbf{s}', t) \frac{e^{-\Sigma_s r}}{4\pi r} \Sigma_s d\mathbf{s}' \quad (1.24)$$

dove $r = |\mathbf{s} - \mathbf{s}'|$. Alternativamente:

$$\Phi(\mathbf{s}, t) = \int_V \Phi \left(\mathbf{s} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v} \right) \frac{e^{-\Sigma_s r}}{4\pi r} \Sigma_s d\mathbf{r} \quad (1.25)$$

Questa è un'equazione rigorosa alle seguenti condizioni: scattering (o dispersione) a simmetria sferica in un mezzo omogeneo ed esteso a tutto lo spazio. Questa equazione integrale è lineare e omogenea. La linearità è una diretta conseguenza dell'ipotesi che la probabilità di una collisione è proporzionale al flusso Φ .

Un altro metodo della teoria del trasporto è **metodo del Kernel** il che si basa sull'espressione $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ che indica la probabilità che un neutrone emesso da $\mathbf{x}'$ giunga, dopo un certo numero di collisioni, in $\mathbf{x}$. Se i neutroni vengono prodotti con probabilità $S(\mathbf{x}')$ per unità di volume in tutti i punti $\mathbf{x}'$ dello spazio, la densità del numero di neutroni in $\mathbf{x}$ è

$$n(\mathbf{x}) = \int K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') S(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (1.26)$$

Il Kernel dipende dalle caratteristiche dei neutroni e dalle proprietà del mezzo in cui essi si diffondono. Se il mezzo è isotropo, omogeneo, infinito, $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ deve dipendere solo dalla distanza $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Riprendendo la (1.25) possiamo scrivere [2]:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{e^{-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \Sigma}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (1.27)$$

Poniamo i vettori posizione in questa relazione: $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$; sarà allora:

$$\Sigma_s(\mathbf{x}') = \Sigma_s(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \Sigma(\mathbf{x}') = \Sigma(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \quad (1.28)$$

Nel caso di un **mezzo non omogeneo** il Kernel si modifica come segue:

$$\Sigma_s(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \frac{\exp \left[- \int_0^1 \Sigma(\mathbf{x} + \xi \mathbf{r}) r d\xi \right]}{4\pi |\mathbf{r}|^2} \quad (1.29)$$

Tenendo conto della presenza di sorgenti identificate come $S(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v})$, il flusso $\Phi(\mathbf{x}, t)$ sarà:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{r} \left[\Sigma_s(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \Phi \left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v} \right) + S \left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v} \right) \right] \frac{\exp \left[- \int_0^1 \Sigma(\mathbf{x} + \xi \mathbf{r}) r d\xi \right]}{4\pi |\mathbf{r}|^2} \quad (1.30)$$

Quindi se il mezzo è omogeneo e non vi sono sorgenti esterne sarà: $\xi = 0$ e $S = 0$.

1° Caso – Risolviamo l'equazione ponendo $\Sigma_a = 0$, $S = 0$ e mezzo omogeneo infinito:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Sigma_s \int \Phi\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right) \frac{e^{-\Sigma_s r}}{4\pi r^2} d\mathbf{r} \quad (1.31)$$

Proposizione 4 La soluzione della (1.31) è una costante.

Dimostrazione. Scriviamo:

$$\text{cost} = \Sigma_s \int \text{cost} \cdot \frac{e^{-\Sigma_s r}}{4\pi r^2} d\mathbf{r} \implies 1 = \Sigma_s \int \frac{e^{-\Sigma_s r}}{4\pi r^2} d\mathbf{r} \quad (1.32)$$

Esprimiamo $d\mathbf{r}$ in **coordinate sferiche** (fig. 1.6). Le componenti del vettore $d\mathbf{r}$ sono:

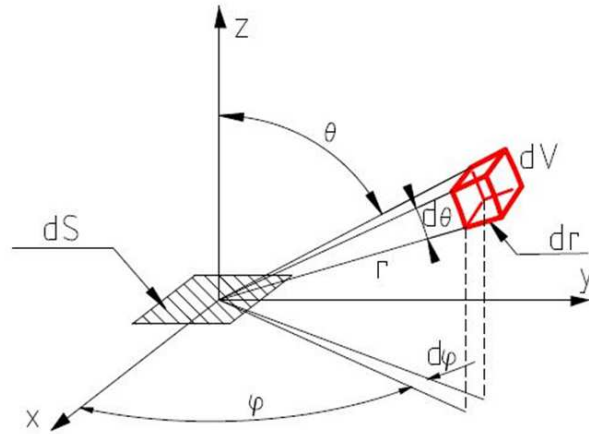


Figura 1.6: $d\mathbf{r}$ in coordinate sferiche.

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\theta, \quad ds_3 = r \sin \theta d\varphi$$

per cui

$$1 = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} r \cdot r \frac{e^{-\Sigma_s r}}{r^2} dr \implies 1 = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{\Sigma_s}$$

■

Fisicamente si spiega il perché $\Phi(\mathbf{x}, t) = \text{costante}$ e non potrebbe essere altrimenti essendo il mezzo omogeneo e infinito, non essendovi inoltre né sorgenti esterne né assorbimento.

Dunque in tal caso la densità neutronica è costante nel tempo e nello spazio.

2° Caso - Ammettiamo che vi sia un certo assorbimento neutronico nel mezzo moderante; quindi $\Sigma_a \neq 0$. Supponiamo inoltre che Σ_a sia piccola, tale che si possa pensare leggermente variabile la legge di distribuzione della densità neutronica; quindi si è passati da un fenomeno descritto da una retta ad un altro descritto da una curva. Richiamiamo la legge di Flick (§ 1.2):

$$\mathbf{J} = -D \text{grad } \Phi \quad (1.33)$$

dove:

$\mathbf{J}$ = vettore densità di corrente neutronica

D = coefficiente di diffusione

Φ = flusso di neutroni

Il segno meno sta ad indicare che in un elemento di volume dV si ha una diminuzione di densità neutronica. All'ipotesi di Σ_a piccola, aggiungeremo che i neutroni siano monoenergetici, lo scattering isotropo nel sistema del laboratorio, lievi variazioni di Φ nell'intorno di due o tre cammini liberi medi. Attraverso una superficie di area S passano $J \cdot S$ neutroni/s provenienti da P' . I neutroni di scattering che attraversano la superficie $S \cos \theta$ sono:

$$\begin{aligned} \Sigma_s(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \Phi\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right) S \cos \theta &\implies \\ J \cdot S &= \int \Sigma_s(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \Phi\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right) S \cos \theta \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \exp\left[-r \int_0^1 \Sigma_s(\mathbf{x} + \xi \mathbf{r})\right] dr \\ J &= \int \Sigma_s(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \Phi\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right) \cos \theta \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \exp\left[-r \int_0^1 \Sigma_s(\mathbf{x} + \xi \mathbf{r})\right] dr \end{aligned} \quad (1.34)$$

Avendo supposto che Φ sia leggermente variabile, sviluppiamolo in serie di Taylor arrestandoci al secondo termine:

$$\Phi\left(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t - \frac{r}{v}\right) = \Phi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{r} \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{x}, t) - \frac{r}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \dots$$

Per l'omogeneità del mezzo scriveremo

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \frac{\Sigma_s(\mathbf{x})}{4\pi} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta e^{-\Sigma_s(\mathbf{x})} \left\{ \begin{aligned} &\Phi + r \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + r \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \\ &+ r \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{r}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (1.35)$$

Supposte le variazioni di flusso in direzione z per cui $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$, sviluppando i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_-(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4} \frac{\Sigma_s}{\Sigma} \Phi + \frac{\Sigma_s}{\Sigma^2} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{4v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ \mathbf{J}_+(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4} \frac{\Sigma_s}{\Sigma} \Phi + \frac{\Sigma_s}{\Sigma^2} \left(-\frac{1}{6} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{4v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Allora le componenti del vettore $\mathbf{J}$ secondo x, y, z sono rispettivamente:

$$J_x = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad J_y = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad J_z = J_+ - J_- = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.37)$$

per cui

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j} + J_z \mathbf{k} \implies \mathbf{J} = -\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} \text{grad } \Phi, \quad (1.38)$$

onde

$$D = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} = \frac{\Sigma_s}{3(\Sigma_s + \Sigma_a)^2} = \frac{\Sigma_s}{3\left(\Sigma_s^2 + 2\Sigma_s + \frac{\Sigma_a^2}{\Sigma_s}\right)}$$

e ricordando l'ipotesi $\Sigma_a = \Sigma_s$

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s} \quad (1.39)$$

Denotando con n la densità del numero di neutroni i.e. il numero di neutroni per unità di volume, e con v la velocità dei neutroni, si ha $\Phi = nv$, cosicché

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{3\Sigma^2} \text{grad}(nv) \quad (1.40)$$

In un mezzo isotropo v è costante:

$$\mathbf{J} = -\frac{v}{3\Sigma^2} \text{grad}(n) = -D_0 \text{grad}(n) \quad (1.41)$$

1.4 Equazione di diffusione

Ricordando l'equazione di Boltzmann di trasporto, già incontrata nell'introduzione, possiamo scrivere:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{produzione} - \text{assorbimento} - \text{perdite} \quad (1.42)$$

in cui abbiamo:

- produzione = $S(\mathbf{x}, t)$ per la presenza di sorgenti esterne al mezzo;
- assorbimento = $\Sigma_a \Phi(\mathbf{x}, t)$, dove Σ_a è la sezione d'urto macroscopica di assorbimento;
- perdite (leakage) = $-D \cdot \nabla^2 \Phi$

La perdita si ricava nel modo seguente. Si consideri il volume elementare $dV = dxdydz$; il flusso totale nella direzione z attraverso la superficie $dxdy$ è

$$\left(J_z + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) dxdy - J_z dxdy = \frac{\partial J_z}{\partial z} dxdydz = -D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} dxdydz \quad (1.43)$$

In modo analogo per gli assi x, y . Ricordando il **teorema della divergenza** (o teorema di Gauss):

$$\Phi = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div } \mathbf{J} dV = \int_V \text{div} (-D \text{grad } \Phi) dV = -D \nabla^2 \Phi$$

che rappresenta la perdita. La (1.42) diventa così

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S(\mathbf{x}, t) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{x}, t) + D \nabla^2 \Phi \quad (1.44)$$

Il coefficiente di diffusione D ha il valore espresso nel caso di scattering isotropo nel sistema del laboratorio, ma cambia il suo valore qualora si manifesti una anisotropia nella direzione della velocità. Intuitivamente si capisce che nei mezzi pesanti, ossia aventi nuclei pesanti e liberi, lo scattering è isotropo con buona approssimazione possiamo accettare che lo sia. Mentre con nuclei leggeri lo scattering è anisotropo, cioè la direzione della velocità del neutrone tende a scostarsi dalla direzione che aveva prima della collisione. Con tali considerazioni, che verranno meglio precisate in seguito, si intuisce che in mezzi leggeri, godendo la velocità di direzioni privilegiate, aumenta la densità di corrente neutronica $\mathbf{J}$ in corrispondenza della quale aumenta D ossia Σ_s . La correzione che si apporta a D a causa dell'anisotropia fa uso della grandezza

$$\bar{\mu}_0 = \overline{\cos \psi} = \frac{2}{3A} = \text{coseno medio di scattering}, \quad (1.45)$$

dove A = numero di massa del mezzo bersaglio. In questo caso D assume il valore

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{3\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0)} = \frac{\lambda_s}{3(1 - \bar{\mu}_0)} = \frac{\lambda_{tr}}{3} \\ \Rightarrow \lambda_{tr} &= \frac{1}{\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0)} = \text{percorso libero medio di trasporto} \end{aligned} \quad (1.46)$$

e sempre che sia $\Sigma_a = 1$. Nel caso in cui si volesse tener conto dell'assorbimento il coefficiente D assume il valore:

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s(1 - \bar{\mu}_0) \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma} + \frac{\Sigma_a}{\Sigma} \frac{\bar{\mu}_0}{1 - \bar{\mu}_0} + \dots \right)} \quad (1.47)$$

Le condizioni di integrabilità dell'equazione di diffusione sono

$$\Phi \geq 0, \quad J_A = J_B$$

La seconda condizione è presto dimostrata. Deve essere (fig. 1.7):

$$\begin{cases} J_A^+ = J_B^- \\ J_A^- = J_B^+ \end{cases} \implies J_A^+ - J_A^- = J_B^+ - J_B^- \implies J_A = J_B$$

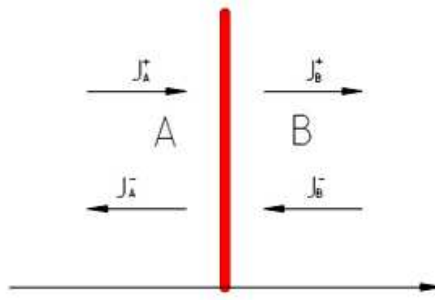


Figura 1.7: Condizioni di integrabilità dell'equazione di diffusione.

Per la prima condizione, immaginiamo che B sia il vuoto e che Φ vari come in fig. 1.8, da cui si evidenzia:

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{x=0} = -\frac{\Phi_0}{d} \implies d = -\frac{\Phi_0}{\left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{x=0}} \quad (1.48)$$

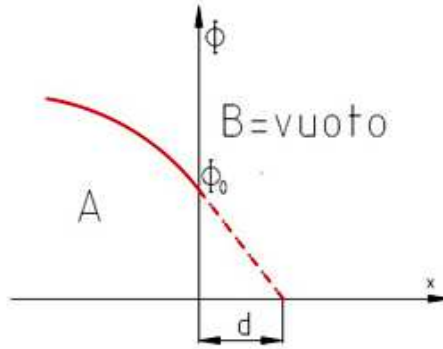


Figura 1.8: Condizioni di integrabilità dell'equazione di diffusione.

Ricordando le (1.36):

$$J_- = \frac{\Phi_0}{4} + \frac{\lambda_{tr}}{6} \frac{d\Phi}{dx} = 0 \implies d = \frac{2}{3} \lambda_{tr} \quad (1.49)$$

In seguito supponiamo $\Phi(d) = 0$.

Esempio 1 – Stato stazionario, mezzo infinito, sorgente puntiforme.

Esprimiamo il flusso Φ in funzione soltanto di r , scriviamo il laplaciano di $\Phi(r, \theta, \varphi)$, cioè in coordinate sferiche. Tenendo conto che Φ dipende solo dalla coordinata radiale (scattering isotropo, i.e. a simmetria sferica), si ha:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.50)$$

Si ha così:

$$D \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \Sigma_a \Phi + S(r) = 0 \quad (1.51)$$

Una sorgente puntiforme è *deltiforme* ossia esprimibile attraverso la funzione delta di Dirac:

$$\delta(r) = 0, \quad r \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r) dr = 1 \quad (1.52)$$

Più precisamente

$$S(r) = S \delta(r), \quad (1.53)$$

dove S = neutroni emessi/s. Assumendo $S = 1$

$$D \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \Sigma_a \Phi + \delta(r) = 0 \quad (1.54)$$

Per $r \neq 0$

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \Sigma_a \frac{\Phi}{D} = 0 \quad (1.55)$$

Poniamo

$$\frac{\Sigma_a}{D} = \frac{1}{L^2} = \chi^2$$

nota come **lunghezza di diffusione**. Con tale posizione la (1.55) si riscrive:

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \chi^2 \Phi = 0 \quad (1.56)$$

Le condizioni al contorno per tale equazione differenziale sono:

$$a) \quad \Phi(r) > 0 \text{ e finito; } b) \quad \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 J(r) = 1$$

ove la condizione b) è valida per una sorgente puntiforme ed emissione =1 neutrone. Poniamo

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \implies \frac{d^2 \Phi}{dr^2} = \frac{2u}{r^3} - \frac{2}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dr^2},$$

che sostituita nella (1.56) dà

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \chi^2 u = 0 \quad (1.57)$$

il cui integrale generale è

$$u = A e^{-\chi r} + B e^{\chi r} \quad (1.58)$$

e dunque

$$\Phi = \frac{A}{r} e^{-\chi r} + \frac{B}{r} e^{\chi r}$$

Per la condizione al contorno a) deve essere $B = 0$, perché $e^{\chi r}$ farebbe $\Phi \rightarrow +\infty$ per $r \rightarrow +\infty$. Quindi

$$\Phi = \frac{A}{r} e^{-\chi r} \quad (1.59)$$

Calcoliamo la densità di corrente neutronica $J(r)$:

$$J(r) = -D \frac{d\Phi}{dr} = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{A}{r} e^{-\chi r} \right) = D A \frac{e^{-\chi r}}{r^2} (\chi r + 1) \quad (1.60)$$

Applicando la condizione b) si ottiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 D A \frac{e^{-\chi r}}{r} (\chi r + 1) = \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi D A e^{-\chi r} (\chi r + 1) = 1 \quad (1.61)$$

$$\implies 4\pi D A = 1 \implies A = \frac{1}{4\pi D}$$

Dunque l'integrale generale è

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi D} \frac{e^{-\chi r}}{r} \quad (1.62)$$

Esempio 2 – Stato stazionario, mezzo infinito, sorgente piana infinita.

$$D \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \Sigma_a \Phi + S(x) = 0 \quad (1.63)$$

dove

$$S(x) = \delta(x) \quad \text{delta di Dirac} \quad (1.64)$$

Le condizioni al contorno:

$$a) \quad \Phi(x) > 0 \text{ e finito; } \lim_{x \rightarrow 0} J(x) = \frac{1}{2} \quad (1.65)$$

Allora per $x > 0$ possiamo scrivere:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \chi^2 \Phi = 0, \quad (1.66)$$

il cui integrale generale è

$$\Phi(x) = A e^{-\chi x} + B e^{\chi x} \quad (1.67)$$

che per la condizione a) deve avere $B = 0$ e dunque

$$\Phi(x) = A e^{-\chi x} \implies J(x) = -D \frac{d\Phi}{dx} = -D \frac{d}{dx} (A e^{-\chi x}) = -D A \chi e^{-\chi x} \quad (1.68)$$

Segue

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-D A \chi e^{-\chi x}) = \frac{1}{2} \implies A = \frac{1}{2D\chi} \quad (1.69)$$

Così l'integrale generale è:

$$\Phi(x) = \frac{e^{-\chi x}}{2D\chi} \quad (1.70)$$

Questo integrale si ottiene dimostrando che una sorgente $S(x)$ piana e infinita è il continuo di infinite sorgenti puntiformi, come rappresentato in fig. 1.9.

La densità di corrente attraverso l'area tratteggiata è

$$\frac{\Phi(r)}{2\pi a \cdot da}, \quad (1.71)$$

mentre il numero di neutroni che l'attraversano è:

$$\frac{\Phi(r)}{2\pi a \cdot da}, \quad \text{dove } r = \sqrt{x^2 + a^2} \quad (1.72)$$

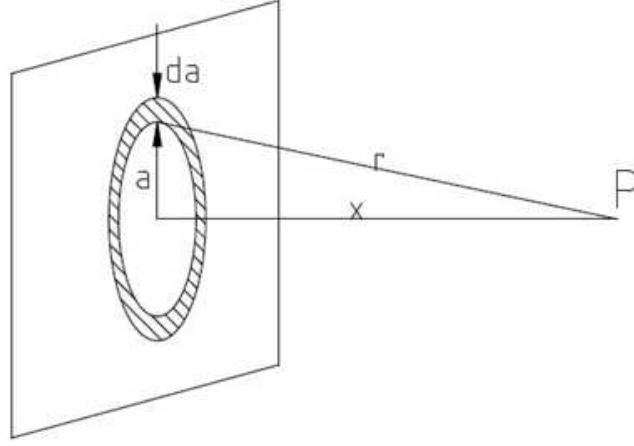


Figura 1.9: Una sorgente piana infinita può essere pensata come il continuo di infinite sorgenti puntiformi.

Integrando per $0 \leq a < +\infty$ si ottiene

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(\sqrt{x^2 + a^2}) 2\pi a \cdot da = \int_x^{+\infty} \Phi(r) 2\pi r \cdot da \quad (1.73)$$

Ricordiamo la (1.62):

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi D} \frac{e^{-\chi r}}{r}$$

Quindi sostituendo si ha:

$$\Phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{4\pi D} \frac{e^{-\chi r}}{r} 2\pi r \cdot da = \int_x^{+\infty} \frac{1}{2D} e^{-\chi r} da = \frac{e^{-\chi x}}{2D\chi}, \quad (1.74)$$

dove

$$\chi = \sqrt{\frac{\Sigma_a}{D}} \quad (1.75)$$

Esempio 3 – Stato non stazionario, mezzo infinito, sorgente piana infinita.

L'equazione di diffusione è

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \Sigma_a \Phi + \delta(x) \delta(t) \quad (1.76)$$

Per la sua integrazione ricorriamo alla trasformata di Laplace e alla trasformata di Fourier; ricordiamo che

$$L[f(t)] = g(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \text{dove } s = \alpha + i\beta \quad (1.77)$$

e per antitrasformare ricorderemo la formula di Riemann:

$$L^{-1}[g(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} g(s) ds \quad (1.78)$$

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0) \quad (1.79)$$

Per ciò che riguarda la trasformata di Fourier, ricordiamo che una funzione generalmente continua e assolutamente integrabile, i.e.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(x)| dx < +\infty$$

può essere posta nella forma

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (1.80)$$

in cui

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.81)$$

è la **trasformata di Fourier** di $V(x)$. Per una funzione $f(u)$ si ha:

$$g(s) = L[f(u)] = \int_0^{+\infty} f(u) e^{-su} du \quad \text{trasformata di Laplace} \quad (1.82)$$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \quad \text{trasformata di Fourier}$$

Tali trasformate divengono molto simili se si pone $s = i\omega$. La differenza sostanziale consiste nel percorso di integrazione: negli integrali di Fourier l'integrazione è eseguita lungo l'asse immaginario del piano complesso della variabile s della trasformata di Laplace. Il metodo di Fourier è più generale, perché la $f(u)$ non deve necessariamente soddisfare la condizione di essere nulla per $u < 0$ come richiesto dal metodo di Laplace. Nel caso in esame, il flusso neutronico è funzione dello spazio e del tempo: $0 \leq t < +\infty$, $-\infty < x < +\infty$. Trasformeremo secondo Laplace rispetto al tempo t e secondo Fourier rispetto allo spazio x .

$$\frac{1}{v} L \left[\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right] = DL \left[\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial^2 x} \right] - \Sigma_a L[\Phi(x, t)] + \delta(x) L[\delta(t)] \quad (1.83)$$

$$\frac{1}{v} \{sL[\Phi(x, t)] - \Phi(x, 0)\} = D \frac{\partial^2 \Phi_1(x, s)}{\partial^2 x} - \Sigma_a \Phi_1(x, s) + \delta(x) \quad (1.84)$$

Si abbia $\Phi(x, 0) = 0$

$$\frac{s}{v} \Phi_1(x, s) = D \frac{\partial^2 \Phi_1(x, s)}{\partial^2 x} - \Sigma_a \Phi_1(x, s) + \delta(x) \quad (1.85)$$

La trasformata di Fourier di $\Phi(x)$ è

$$f(\omega) = \Phi_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (1.86)$$

dove

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega f(\omega) e^{i\omega x} d\omega \implies \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 f(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.88)$$

e dunque trasformando la (1.85) secondo Fourier si ha:

$$\frac{s}{v}\Phi_2(\omega, s) = -D\omega^2\Phi_2(\omega, s) - \Sigma_a\Phi_2(\omega, s) + 1, \quad (1.89)$$

dalla quale si ottiene

$$\Phi_2(\omega, s) = \frac{1}{\frac{s}{v} + \omega^2 D + \Sigma_a} \quad (1.90)$$

Riscriviamo la (1.85) come segue:

$$D\frac{\partial^2\Phi_1(x, s)}{\partial x^2} - \left(\Sigma_a + \frac{s}{v}\right)\Phi_1(x, s) + \delta(x) = 0 \quad (1.91)$$

e perciò trasformando secondo Laplace si ottiene l'equazione di diffusione con sezione d'urto di assorbimento fittizia pari a $\Sigma_a + \frac{s}{v}$. Trasformando invece secondo Fourier si ottiene una sezione d'urto di assorbimento fittizia costante, ragion per cui il flusso è costante. *Questa è l'interpretazione fisica delle due trasformate.* Scriviamo

$$\Phi_2(\omega, s) = \frac{1}{\frac{s}{v} + \omega^2 D + \Sigma_a} = \frac{v}{s + v(\Sigma_a + \omega^2 D)} \implies c = \Sigma_a + \omega^2 D \quad (1.92)$$

$$L^{-1}\left[\frac{v}{s + vc}\right] = vL^{-1}\left[\frac{1}{s + vc}\right] = ve^{-vct} = v \exp[-v(\Sigma_a + \omega^2 D)t] = \Phi^{(1)}(\omega, t) \quad (1.93)$$

Antitrasformando secondo Fourier si ha:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(1)}(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega = \frac{ve^{-v\Sigma_a t}}{\sqrt{4\pi D_0 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_0 t}\right) \quad (1.94)$$

dove

$$D_0 = \frac{v}{3\Sigma_s}$$

Come si vede $\Phi(x, t)$ è una funzione pari in x fissato e $t > 0$. Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned} \Phi(-\infty, t) &= 0, & \Phi(+\infty, t) &= 0 \\ \Phi(x, 0) &= 0, & \Phi(x, t \rightarrow +\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (1.95)$$

Se l'assorbimento fosse nullo si avrebbe:

$$\Phi(x, t) = \frac{v}{\sqrt{4\pi D_0 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_0 t}\right) \quad (1.96)$$

Ad esempio, considerando il caso adimensionale con i coefficienti $\equiv 1$, abbiamo un andamento del tipo di quello riportato in fig.1.10.

1.5 Equazione di Boltzmann

Come abbiamo stabilito nei numeri precedenti, il flusso è in generale funzione del vettore posizione $\mathbf{x}$, del tempo t , dell'energia E , del versore velocità $\mathbf{\Omega}$: $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t)$.

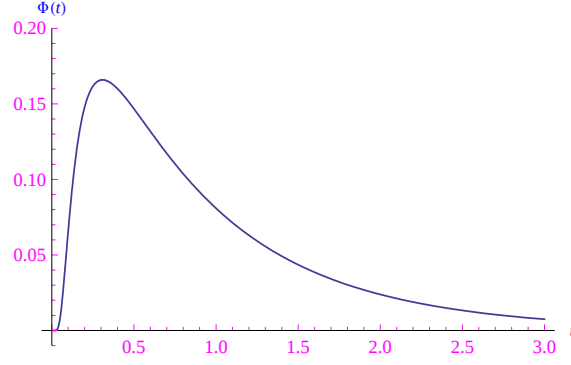


Figura 1.10: Andamento in funzione del tempo di $\Phi(x, t)$ della (1.94) per $x = 1$.

La variazione di densità neutronica nell'unità di tempo è

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{produzione} \begin{cases} \text{sorgente esterna } S(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \\ \text{collisioni di fissione} \end{cases} - \text{rimozione} \begin{cases} \text{perdite} \\ \text{assorbimento} \\ \text{collisioni} \end{cases} \quad (1.97)$$

$$\text{produzione} = \iint \Sigma_s(\mathbf{x}, E' \rightarrow E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}', t) dE' d\mathbf{\Omega}' \quad (1.98)$$

che si interpreta così: essa dà il flusso nella posizione $\mathbf{x}$ al tempo di neutroni, che per effetto dello scattering sono passati da un'energia E' con direzione di velocità $\mathbf{\Omega}'$ ad un'energia E con direzione di velocità $\mathbf{\Omega}$.

$$\text{perdite} = \text{div } \mathbf{J}(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) = \text{div} [\mathbf{\Omega} \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t)] = \mathbf{\Omega} \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \quad (1.99)$$

$$\text{assorbimento} = \Sigma_a(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \quad (1.100)$$

$$\text{collisioni} = \Sigma_s(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) \quad (1.101)$$

Allora l'equazione di Boltzmann è la seguente:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mathbf{\Omega} \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) - (\Sigma_s + \Sigma_a) \Phi + S(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}, t) + \iint \Sigma_s(\mathbf{x}, E' \rightarrow E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) \Phi(\mathbf{x}, E, \mathbf{\Omega}', t) dE' d\mathbf{\Omega}' \quad (1.102)$$

Le sezioni d'urto in un mezzo non omogeneo sono in generale funzioni della posizione.

Caso 1 - Stato stazionario, monodimensionale, neutroni monoenergetici.

Si ha allora :

$$-\cos \theta \frac{\partial \Phi(z, \mathbf{\Omega})}{\partial z} + \Sigma \Phi(z, \mathbf{\Omega}) = \int d\mathbf{\Omega}' \Sigma_s(\mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) \Phi(z, \mathbf{\Omega}') + S(z, \mathbf{\Omega}) \quad (1.103)$$

In coordinate sferiche ponendo $-\cos \theta = \mu$ si ha $d\mathbf{\Omega} = \sin \theta d\theta d\varphi = d\mu d\varphi$. Moltiplicando ambo i membri della (1.103) per $d\varphi$, si ottiene:

$$\int_0^{2\pi} \Omega_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} d\varphi + \int_0^{2\pi} \Sigma \Phi d\varphi = \int_0^{2\pi} S(z, \mathbf{\Omega}) d\varphi + \int_0^{2\pi} \int d\mathbf{\Omega}' \Sigma_s(\mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) \Phi(z, \mathbf{\Omega}') d\varphi \quad (1.104)$$

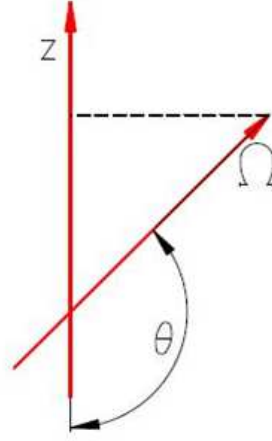


Figura 1.11: Analisi del caso 1: stato stazionario, monodimensionale, neutroni monoenergetici.

Il versore Ω è: $\Omega = \Omega(\theta, \varphi)$ oppure $-\cos \theta = \mu = \Omega_z$ (fig. 1.11); si ha: $\Omega = \Omega(\mu, \varphi)$.

Allora il flusso $\Phi(z, \Omega)$ diventa $\Phi(z, \mu, \varphi)$, una volta integrato in $d\varphi$ rimane $\Phi(z, \mu)$, cioè:

$$\Phi(z, \mu) = \int_0^{2\pi} \Phi(z, \Omega(\mu, \varphi)) d\varphi \quad (1.105)$$

Segue

$$\mu \frac{\partial \Phi(z, \mu)}{\partial z} + \Sigma \Phi(z, \mu) = S(z, \mu) + \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \Phi(z, \mu') d\mu' d\varphi$$

dove $d\mu' d\varphi = d\Omega'$. Ricordiamo cos'è la sezione trasversale di dispersione (scattering cross-section):

$$\frac{\text{Q.tà di reazioni osservate}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} = \sigma_s \frac{\text{Q.tà nuclei bersaglio}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{nv = \Phi \text{ di particelle incidenti}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \quad (1.106)$$

$$\text{sezione d'urto macroscopica} = \Sigma_s = N\sigma_s, \quad (1.107)$$

dove

$$N = \frac{\text{numero di atomi del nuclide}}{\text{cm}^3} \quad (1.108)$$

La σ_s dipende da $\begin{cases} \text{energia iniziale } E' \text{ (prima della collisione)} \\ \text{energia finale } E \text{ (dopo la collisione)} \\ \text{angolo di scattering } \theta_0 \text{ formato dalle direzioni dei versori } \Omega \text{ e } \Omega' \end{cases}$

In coordinate polari scriveremo

$$\cos \theta_0 = \Omega \cdot \Omega' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

Ponendo $\cos \theta_0 = \mu_0$ sarà

$$\sigma_s = \sigma_s(\mu_0)$$

che può essere espressa da una serie di armoniche sferiche (polinomi di Legendre, App. B):

$$\sigma_s(\mu_0) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_{sl} P_l(\mu_0) \quad (1.109)$$

Alcuni polinomi di Legendre:

$$\begin{aligned} P_0(\mu_0) &= 1 \\ P_1(\mu_0) &= \mu_0 \\ P_2(\mu_0) &= \frac{1}{2}(3\mu_0^2 - 1) \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.110)$$

Con le condizioni di ortogonalità dei polinomi di Legendre si calcolano i coefficienti σ_{sl} :

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu_0) \sigma_s(\mu_0) d\mu_0 = \int_{-1}^{+1} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_{sl} P_m(\mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0 \quad (1.111)$$

dove

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq l \\ \frac{2l+1}{2}, & \text{se } m = l \end{cases} \quad (1.112)$$

e per tali posizioni si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_m(\mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0 &= \sigma_l. \\ \left\{ \begin{array}{l} l = 0 \implies \sigma_{s0} = \int_{-1}^{+1} 1 \cdot P_l(\mu_0) d\mu_0 = \int_{-1}^{+1} P_l(\mu_0) d\mu_0 \text{ sezione d'urto totale} \\ l = 1 \implies \sigma_{s1} = \int_{-1}^{+1} \mu_0 P_l(\mu_0) d\mu_0 = \overline{\mu_0} \sigma_{s0} \quad \overline{\mu_0} = \text{coseno medio di scattering} \\ l \geq i = 2, 3, \dots \implies \text{si hanno i valori di sezione d'urto che rappresentano} \\ \text{i diversi gradi di anisotropia} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.113)$$

L'espressione generale di $P_l(\mu_0)$ è:

$$P_l(\mu_0) = P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos[m(\varphi - \varphi')]$$

Per quanto precede σ_s è funzione di μ_0 : $\sigma_s(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}') = \sigma_s(\cos \theta_0)$ in un range di $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Integriamo in $d\varphi$ la $\sigma_s(\Omega'(\theta', \varphi') \rightarrow \Omega(\theta, \varphi))$:

$$\int_0^{2\pi} \sigma_s(\Omega'(\theta', \varphi') \rightarrow \Omega(\theta, \varphi)) d\varphi = 2\pi \sigma_s(\Omega'(\theta', \varphi') \rightarrow \Omega(\theta, \varphi)) = \sigma_s(\mu_0) \quad (1.114)$$

Perciò si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_s(\Omega \rightarrow \Omega) &= \frac{1}{2\pi} \sigma_s(\mu_0) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_{sl} P_l(\mu_0) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_{sl} \left[P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos[m(\varphi - \varphi')] \right] \end{aligned} \quad (1.115)$$

che sostituita nell'equazione di Boltzmann e integrando rispetto a φ e φ' :

$$\mu \frac{\partial \Phi(z, \mu)}{\partial x} + \Sigma \Phi(z, \mu) = S(z, \mu) + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} N \sigma_{sl} P_l(\mu) \int_{-1}^{+1} P_l(\mu') \Phi(z, \mu') d\mu' \quad (1.116)$$

Per integrare questa equazione sviluppiamo in armoniche sferiche le funzioni $\Phi(z, \mu)$ e $S(z, \mu)$:

$$\begin{cases} \Phi(z, \mu) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} \Phi_l(z) P_l(\mu) \\ S(z, \mu) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} S_l(z) P_l(\mu) \end{cases} \quad (1.117)$$

Con le condizioni di ortogonalità dei polinomi di Legendre si ricavano i coefficienti $\Phi_l(z)$ e $S_l(z)$:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) \Phi(z, \mu) d\mu = \int_{-1}^{+1} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} \Phi_l(z) P_l(\mu) P_m(\mu) d\mu \\ \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) S(z, \mu) d\mu = \int_{-1}^{+1} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} S_l(z) P_l(\mu) P_m(\mu) d\mu \end{cases} \quad \text{con la posizione che} \quad (1.118)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\mu) P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq l \\ \frac{2l+1}{2}, & \text{se } m = l \end{cases} \quad \text{Allora quando } m = l \text{ si ha} \quad (1.119)$$

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} \Phi(z, \mu) P_l(\mu) d\mu = \Phi_l(z) \\ \int_{-1}^{+1} S(z, \mu) P_l(\mu) d\mu = S_l(z) \end{cases} \quad (1.120)$$

$$\begin{cases} \text{per } l = 0 \text{ si ha } \int_{-1}^{+1} \Phi(z, \mu) d\mu = \Phi_0(z) \text{ ossia il flusso è funzione della sola } z \\ \text{per } l = 1 \text{ si ha } \int_{-1}^{+1} \mu \Phi(z, \mu) d\mu = \Phi_1(z) = \bar{\mu} \Phi_0(z) \text{ dove } \bar{\mu} = M(\mu) \text{ valor medio} \end{cases} \quad (1.121)$$

Allora è

$$\Phi(z, \mu) = \frac{1}{2} \Phi_0(z) + \frac{3}{2} \Phi_1(z) \mu + \dots = \frac{1}{2} \Phi_0(z) + \frac{3}{2} \Phi_1(z) \bar{\mu} \quad (1.122)$$

1.6 Equazione di diffusione (parte 2)

Dimostriamo ora che se si sostituisce la (1.122) arrestata ai primi due termini dello sviluppo in polinomi di Legendre nell'equazione di Boltzmann si ottiene l'*equazione di diffusione*. A tale scopo integriamo rispetto a μ tutti i termini che figurano nella predetta equazione:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \mu \frac{\partial \Phi(z, \mu)}{\partial z} d\mu + \Sigma \int_{-1}^{+1} \mu \Phi(z, \mu) d\mu &= \int_{-1}^{+1} S(z, \mu) d\mu + \\ &+ \int_{-1}^{+1} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} N \sigma_{sl} P_l(\mu) \int_{-1}^{+1} P_l(\mu') \Phi(z, \mu') d\mu d\mu' \end{aligned} \quad (1.123)$$

Per le solite condizioni di ortogonalità dei polinomi di Legendre, la (1.123) si riduce a:

$$\frac{d\Phi_1(z)}{dz} + \Sigma \Phi_0(z) = N \sigma_{s0} \Phi_0(z) + S_0(z) \quad (1.124)$$

dove $\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_a$ e $\Sigma_s = N\sigma_{s0}$. Sostituendo si ha:

$$\frac{\Phi_1(z)}{dz} + \Sigma_a \Phi_0(z) - S_0(z) = 0 \quad (1.125)$$

Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione di Boltzmann per $P_l(\mu)$ e integriamo rispetto a μ :

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} P_l(\mu) \frac{\partial \Phi(z, \mu)}{\partial x} d\mu + \Sigma \int_{-1}^{+1} \mu \Phi(z, \mu) d\mu = \\ & = \int_{-1}^{+1} P_l(\mu) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} N\sigma_{sl} P_l(\mu) \int_{-1}^{+1} P_l(\mu') \Phi(z, \mu') d\mu d\mu' + \int_{-1}^{+1} P_l(\mu) S\Phi(z, \mu) d\mu \end{aligned} \quad (1.126)$$

da cui si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^{+1} \mu P_l(\mu) \Phi(z, \mu) d\mu + \Sigma \Phi_1(z) = N\sigma_{sl} \Phi_1(z) \quad (1.127)$$

Osserviamo il primo termine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^{+1} \mu P_l(\mu) \Phi(z, \mu) d\mu &= \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^{+1} \mu P_l(\mu) \left[\frac{1}{2} \Phi_0(z) P_0(\mu) + \frac{3}{2} \Phi_1(z) P_1(\mu) \right] d\mu \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^{+1} \mu^2 \frac{1}{2} \Phi_0(z) d\mu + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-1}^{+1} \mu^2 \frac{3}{2} \bar{\mu} \Phi_1(z) \mu d\mu \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial z} \int_{-1}^{+1} \mu^2 d\mu + \frac{3}{2} \frac{\partial \Phi_1(z)}{\partial z} \bar{\mu} \int_{-1}^{+1} \mu^3 d\mu = \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.128)$$

Allora ricordando che $\sigma_{sl} = \bar{\mu}_0 \sigma_{s0}$, la (1.127) diventa:

$$\frac{1}{3} \frac{d\Phi_0(z)}{dz} + (\Sigma - \bar{\mu}_0 \Sigma_s) \Phi_1(z) \implies \Phi_1(z) = -\frac{1}{3} \frac{1}{\Sigma - \bar{\mu}_0 \Sigma_s} \frac{d\Phi_0(z)}{dz} \quad (1.129)$$

Segue

$$\frac{1}{3} \frac{1}{\Sigma_a + \Sigma_s - \bar{\mu}_0 \Sigma_s} \frac{d^2 \Phi_0(z)}{dz^2} - \Sigma_a \Phi_0(z) + S_0(z) = 0 \quad (1.130)$$

con $\Sigma_a = \Sigma_s$ e $\frac{1}{\Sigma_s} = \lambda_s$ scriveremo:

$$\frac{1}{3} \frac{\lambda_s}{1 - \bar{\mu}_0} \frac{d^2 \Phi_0(z)}{dz^2} - \Sigma_a \Phi_0(z) + S_0(z) = 0 \quad (1.131)$$

dove

$$\frac{1}{3} \frac{\lambda_s}{(1 - \bar{\mu}_0)} = \frac{\lambda_{tr}}{3} = D = \text{coefficiente di diffusione} \quad (1.132)$$

Quindi l'equazione di diffusione

$$D \frac{d^2 \Phi_0(z)}{dz^2} - \Sigma_a \Phi_0(z) + S_0(z) = 0 \quad (1.133)$$

ritrovata come caso particolare dell'equazione di Boltzmann.

Caso 2 – Stato stazionario, neutroni monoenergetici, scattering isotropo.

Riprendiamo l'equazione di Boltzmann

$$-\cos \theta \frac{\partial \Phi(z, \Omega)}{\partial z} + \Sigma \Phi(z, \Omega) = \int d\Omega' \Sigma_s(\Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(z, \Omega') + S(z, \Omega) \quad (1.134)$$

Poiché $\Sigma_s = N\sigma_s(\mu_0)$ possiamo scrivere

$$\Sigma_s(\mu_0) = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{2l+1}{2} \Sigma_{sl} P_l(\mu_0) = 2\pi \Sigma_s(\Omega' \rightarrow \Omega) \quad (1.135)$$

Troncando lo sviluppo in serie al primo termine si ha:

$$\frac{1}{2} \Sigma_{s0} = 2\pi \Sigma_s(\Omega' \rightarrow \Omega) \implies \Sigma_s(\Omega' \rightarrow \Omega) = \frac{\Sigma_{s0}}{4\pi} \quad (1.136)$$

La variazione di Ω' cioè $d\Omega'$ definisce un angolo solido, il cui valore si ottiene subito ricorrendo:

$$\frac{\text{area}}{\text{raggio}^2} = \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{1^2}$$

Allora la (1.134) diventa:

$$-\cos \theta \frac{\partial \Phi(z, \Omega)}{\partial z} + \Sigma \Phi(z, \Omega) = S(z, \Omega) + \frac{\Sigma_{s0}}{4\pi} \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \Phi(z, \Omega') \quad (1.137)$$

Essendo $\Omega = \Omega(\theta, \varphi) = \Omega(\mu, \varphi)$ integrando ambo i membri per $d\varphi$ si ha:

$$-\mu \frac{\partial \Phi(z, \Omega)}{\partial z} + \Sigma \Phi(z, \Omega) = S(z, \Omega) + \frac{\Sigma_{s0}}{2} \int_{-1}^{+1} \Phi(z, \mu) d\mu \quad (1.138)$$

Supponiamo che la sorgente esterna si trovi su di un piano; ebbene la $S(z, \Omega)$ può essere rappresentata da

$$\frac{\delta(z)}{4\pi} \text{ in cui } \delta(z) \text{ è la funzione di Dirac}$$

Per la soluzione dell'equazione di Boltzmann (1.138) immaginiamo che $\Phi(z, \mu)$ possa scriversi nella forma

$$\Phi(z, \mu) = h(\mu) e^{-kz} \quad (1.139)$$

Per una successione di valori k_i dove $i = 0, 1, 2, \dots, n$ tali che $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$ si potrà scrivere:

$$\Phi(z, \mu) = \sum_{i=0}^n h_i(\mu) e^{-k_i z} \quad (1.140)$$

Sostituendo ed eseguendo le derivazioni per $z \neq 0$ si ha:

$$\begin{aligned} -\mu k h(\mu) e^{-kz} + \Sigma h(\mu) e^{-kz} &= \frac{\Sigma_{s0}}{2} e^{-kz} \int_{-1}^{+1} h(\mu) d\mu \implies \\ \implies (-\mu k + \Sigma) h(\mu) &= \frac{\Sigma_{s0}}{2} \int_{-1}^{+1} h(\mu) d\mu \end{aligned} \quad (1.141)$$

Osserviamo che il secondo membro è pari ad un certo numero, ovvero è una costante C , ragione per cui si avrà:

$$h(\mu) = \frac{C}{\Sigma - \mu k} \implies (-\mu k + \Sigma) \frac{C}{\Sigma - \mu k} = \frac{\Sigma_{s0}}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{C}{\Sigma - \mu k} d\mu \quad (1.142)$$

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{\Sigma_{s0}}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\Sigma - \mu k} \implies 1 = \frac{\Sigma_{s0}}{2k} \int_{-1}^{+1} \frac{d(\mu k)}{\Sigma - \mu k} = \frac{\Sigma_{s0}}{2k} [\ln(\Sigma - \mu k)]_{\mu=-1}^{\mu=+1} \\
 &\implies \frac{\Sigma_{s0}}{2k} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} = 1 \implies \frac{\Sigma_{s0}}{k} \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{k}{\Sigma}}{1 - \frac{k}{\Sigma}} = 1
 \end{aligned} \tag{1.143}$$

con $1 + \frac{k}{\Sigma} > 0$ e si potrà scrivere:

$$\frac{\Sigma_{s0}}{\frac{k}{\Sigma}} \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{k}{\Sigma}}{1 - \frac{k}{\Sigma}} = 1 \implies \frac{\Sigma_{s0}}{\Sigma} \tanh^{-1} \frac{k}{\Sigma} = 1 \tag{1.144}$$

Sviluppiamo in serie di Mac-Laurin il primo membro:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Sigma_{s0}}{\Sigma} \left[\frac{k}{\Sigma} + \frac{1}{3} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^7 + \dots \right] &= 1 \\
 \implies \frac{\Sigma_{s0}}{\Sigma} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^{2n+1} &= 1
 \end{aligned} \tag{1.145}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Sigma_{s0}}{\Sigma} \frac{k}{\Sigma} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^6 + \dots \right] &= 1 \\
 \implies 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^6 + \dots &= \frac{\Sigma}{\Sigma_{s0}} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{s0}} + \frac{\Sigma_s}{\Sigma_{s0}}
 \end{aligned} \tag{1.146}$$

Quindi

$$\frac{1}{3} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^6 + \dots = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{s0}} \tag{1.147}$$

e posto $\chi = \left(\frac{k}{\Sigma} \right)^2$ scriveremo:

$$\frac{1}{3} \chi + \frac{1}{5} \chi^2 + \frac{1}{7} \chi^3 + \dots = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_{s0}} \tag{1.148}$$

Siamo quindi giunti ad un'espressione del tipo

$$\left(a = \frac{1}{3} \right) x + \left(b = \frac{1}{5} \right) x^2 + \left(c = \frac{1}{7} \right) x^3 + \dots = y$$

e si vuole determinare la x

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + \dots \implies \tag{1.149}$$

$$\implies y = a(Ay + By^2 + Cy^3 + \dots) + b(Ay + By^2 + Cy^3 + \dots)^2 + c(Ay + By^2 + Cy^3 + \dots)^3 + \dots$$

uguagliamo i coefficienti delle potenze di y :

$$\begin{cases} y(aA) = 1 & A = \frac{1}{a} = \frac{1}{1/3} = 3 \\ y^2(aB + bA^2) = 0 & B = -\frac{bA^2}{a} = -\frac{3^3}{5} \\ y^3(aC + cA^3 + 2AB) = 0 & C = -\frac{cA^3 + 2AB}{a} = \frac{47}{5} \cdot \frac{3^4}{7} \\ \dots & \\ y^n = \dots & \end{cases} \tag{1.150}$$

Scriveremo allora per x

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + \dots = 3y - \frac{3^3}{5}y^2 + \frac{47}{5} \cdot \frac{3^4}{7}y^3 + \dots \quad (1.151)$$

e ricordando che $y = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}$ si può scrivere

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{\Sigma}\right)^2 &= 3 \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right) - \frac{3^3}{5} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^2 + \frac{47}{5} \cdot \frac{3^4}{7} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^3 + \dots \\ \implies k^2 &= 3\Sigma^2 \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right) \left[1 - \frac{9}{5} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right) + \frac{47}{5} \cdot \frac{27}{7} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^2 + \dots\right] \end{aligned} \quad (1.152)$$

Poniamo $L^2 = k^{-2}$

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{1}{3\Sigma^2 \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right) \left[1 - \frac{9}{5} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right) + \frac{47}{5} \cdot \frac{27}{7} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^2 + \dots\right]} \\ &= \frac{1}{3\Sigma^2 \Sigma \left(1 + \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right) \left[1 - \frac{9}{5} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right) + \frac{47}{5} \cdot \frac{27}{7} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^2 + \dots\right]} \end{aligned} \quad (1.153)$$

Sempre per $\Sigma_a = \Sigma_s$ scriveremo

$$k^2 = 3\Sigma_a^2 \Sigma \left[1 - \frac{9}{5} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right) + \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right] \implies k^2 = 3\Sigma_a^2 \Sigma \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right) \quad (1.154)$$

Perciò con le correzioni apportate la lunghezza di diffusione del trasporto diventa:

$$L = \frac{1}{\sqrt{3\Sigma\Sigma} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3\Sigma\Sigma} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s}\right)} \quad (1.155)$$

La soluzione dell'equazione omogenea è

$$\Phi(z, \mu) = \frac{C e^{-kz}}{\Sigma - k\mu}, \quad (1.156)$$

in cui C è una costante (cfr. eq. (1.142)).

1.7 Equazione non omogenea

L'equazione omogenea esaminata nel numero precedente presenta un'altra soluzione, in cui le variabili z, μ sono sostituite da $-z, -\mu$, oppure k è sostituito da $-k$.

Ritorniamo all'equazione non omogenea, in cui è $\delta(z)/4\pi \neq 0$ e operiamo ambo i membri per trasformata di Fourier. Per una funzione $\Phi(z, \mu)$, potremo scrivere:

$$\varphi(\omega, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z, \mu) e^{-i\omega z} dz \quad (1.157)$$

Si ottiene allora

$$(\Sigma + i\omega\mu) \varphi(\omega, \mu) = \frac{1}{2}\Sigma_s \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z, \mu) e^{-i\omega z} d\mu + \frac{1}{4\pi} \quad (1.158)$$

Ma il secondo membro non dipende da μ , così è

$$\varphi(\omega, \mu) = \frac{\varphi_0(\omega)}{\Sigma + i\omega\mu} \quad (1.159)$$

Sostituendo nella (1.158) si ottiene per $\varphi_0(\omega)$ il valore:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\omega) &= \frac{1}{2}\Sigma_s \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_0(\omega)}{\Sigma + i\omega\mu} d\mu + \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2}\Sigma_s \varphi_0(\omega) \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\Sigma + i\omega\mu} + \frac{1}{4\pi} \\ &= \frac{1}{2}\Sigma_s \varphi_0(\omega) \frac{1}{i\omega} \ln \frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega} + \frac{1}{4\pi} \end{aligned} \quad (1.160)$$

da cui si ha:

$$\varphi_0(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma_s}{2i\omega} \ln \frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega}} \quad (1.161)$$

e dunque è

$$\varphi(\omega, \mu) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\Sigma + i\omega} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma_s}{2i\omega} \ln \frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega}} \quad (1.162)$$

Antitrasformando si ha:

$$\Phi(z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega, \mu) e^{i\omega z} d\omega = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega z}}{\Sigma + i\omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Sigma_s}{2i\omega} \ln \frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega}} d\omega \quad (1.163)$$

Il flusso totale $\Phi_{tot}(z)$ diventa:

$$\Phi_{tot}(z) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \Phi(z, \mu) d\mu = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega z} d\omega}{i\omega} \left[\ln \frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega} \right] \cdot \left[1 - \frac{\Sigma_s}{2i\omega} \ln \frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega} \right]^{-1} \quad (1.164)$$

Osserviamo che l'espressione $\frac{1}{i\omega} \left[\ln \frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega} \right]$ è reale. Infatti per il numero complesso $\frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega}$ si ha:

$$\left| \frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega} \right| = \frac{|\Sigma + i\omega|}{|\Sigma - i\omega|} = \frac{\sqrt{\Sigma^2 + \omega^2}}{\sqrt{\Sigma^2 + \omega^2}} = 1 \quad \text{il suo modulo} \quad (1.165)$$

Il suo argomento:

$$\arg \frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega} = \arg(\Sigma + i\omega) - \arg(\Sigma - i\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{\Sigma}\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{\Sigma}\right) = 2 \arctan\left(\frac{\omega}{\Sigma}\right) \quad (1.166)$$

Allora possiamo scrivere:

$$\frac{\Sigma + i\omega}{\Sigma - i\omega} = 1 \cdot \exp \left[i 2 \arctan \left(\frac{\omega}{\Sigma} \right) \right] = \frac{1}{i\omega} 2i \arctan \left(\frac{\omega}{\Sigma} \right) = \frac{2}{\omega} \arctan \left(\frac{\omega}{\Sigma} \right)$$

che è un numero reale. Posto $p = i\omega$ la (1.164) diventa:

$$\Phi_{tot}(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pz}}{p} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p} \frac{dp}{1 - \frac{\Sigma_s}{2p} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p}} \quad (1.167)$$

La funzione integranda contiene delle singolarità. Ricordiamo dall'Analisi complessa che le singolarità si dividono in:

1. **poli.** Sono punti nei quali pur non essendo regolare $f(p)$, esiste un indice n che rende regolare il prodotto $(p - p_0)^n f(p)$. Il punto p_0 è in tal caso un *polo di ordine n* .
2. **Singularità essenziali.** Sono punti nei quali non esiste un indice n che rende regolare il prodotto suddetto.

In relazione alla natura delle loro singolarità le funzioni di variabile complessa si distinguono in:

- **Funzioni olomorfe.** Si tratta di funzioni di variabili complessa in cui l'unica singolarità è il punto improprio ($p = \infty$), ove se la singolarità è polare la funzione è razionale intera. Altrimenti la funzione è trascendente.
- **Funzioni meromorfe.** Sono caratterizzate da singolarità polari al finito, oltre che da una singolarità essenziale per $p = \infty$.

Nel caso in esame, si ha un *polo semplice* per

$$\frac{\Sigma_s}{2p} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p} = 1$$

che confrontata con quella già incontrata

$$\frac{\Sigma_{s0}}{2k} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} = 1 \text{ si ha } p = k = i\omega$$

Si ha una singolarità essenziale per $p = \pm \Sigma$. Il comportamento del flusso come funzione di z può essere chiarito più facilmente se si trasforma l'integrale (1.164) modificando il percorso di integrazione, per quanto possibile, in modo tale che la parte immaginaria di integrazione diventi il più grande possibile. Ciò fatto, $\exp(i\omega z)$ per $z > 0$ diventa molto piccolo e si possono trascurare le parti dell'integrale in cui la parte immaginaria ω può essere resa arbitrariamente grande.

Se $z < 0$ il percorso di integrazione si modificherà nella direzione opposta, ma noi non siamo interessati a questo caso, poiché $\Phi_{tot}(-z) = \Phi_{tot}(z)$, così che è sufficiente calcolare $\Phi_{tot}(z)$ per $z > 0$.

Il percorso di integrazione non può essere sostituito arbitrariamente, perchè l'integrando, come funzione di ω , ha singolarità. In accordo con la teoria delle variabili complesse, il percorso di integrazione non può essere sostituito affatto attraverso singolarità essenziali, e il cambiamento attraverso i poli darebbe un finto contributo all'integrale.

Allora il flusso $\Phi(z)$ si può considerare la somma di due contributi: un flusso $\Phi_{As}(z)$ asintotico dovuto al polo e un $\Phi_{tr}(z)$ transiente dovuto alla singolarità essenziale, che ha valori considerevoli per z piccoli ed è trascurabile per z grandi.

1.7.1 Flusso asintotico

Per quanto visto nel numero precedente, la funzione integranda che compare nell'espressione del flusso totale è

$$F(p) = \frac{1}{4\pi i} \frac{e^{pz}}{p} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma_s}{2p} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p}} \quad (1.168)$$

ove $p = i\omega$. Poniamo

$$P(p) = \frac{1}{4\pi i} e^{pz} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p}, \quad Q(p) = 1 - \frac{\Sigma_s}{2p} \ln \frac{\Sigma + p}{\Sigma - p}, \quad (1.169)$$

quindi

$$F(p) = \frac{P(p)}{qQ(p)} \quad (1.170)$$

Calcoliamo il flusso asintotico $\Phi_{As}(z)$: il valore dell'integrale è per $p = -k$

$$\Phi_{As}(z) = 2\pi i \left[\frac{P(p)}{qQ(p)} \right] \quad (1.171)$$

Procedendo con i calcoli si trova:

$$\Phi_{As}(z) = \frac{1}{2} e^{-kz} \ln \frac{\Sigma - k}{\Sigma + k} \frac{1}{1 - \frac{\Sigma_s \Sigma}{\Sigma^2 - k^2}} = \frac{1}{2} e^{-kz} \ln \frac{\Sigma - k}{\Sigma + k} \frac{\Sigma^2 - k^2}{-\Sigma^2 + k^2 + \Sigma_s \Sigma} \quad (1.172)$$

Ricordando che si ha un polo semplice per

$$\frac{\Sigma_s}{2p} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} = 1$$

e per $p = k$ si ha

$$\Phi_{As}(z) = \frac{e^{-kz}}{2kD} \cdot \frac{2\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{\Sigma^2 - k^2}{-\Sigma^2 + k^2 + \Sigma_s \Sigma} = \frac{1}{2} e^{-kz} \frac{2k^2 \Sigma_a}{k \Sigma_s \Sigma_a} \cdot \frac{\Sigma^2 - k^2}{k^2 - \Sigma_a \Sigma} \quad (1.173)$$

dove $\frac{k^2}{\Sigma_a} = \frac{1}{D}$.

$$\Phi_{As}(z) = \frac{e^{-kz}}{2kD} \cdot \frac{2\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{\Sigma^2 - k^2}{k^2 - \Sigma_a \Sigma} = \beta \frac{e^{-kz}}{2kD} \quad (1.174)$$

essendo

$$\beta = \frac{2\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{\Sigma^2 - k^2}{k^2 - \Sigma_a \Sigma} \quad (1.175)$$

Ricordiamo la soluzione ottenuta per l'equazione

$$D \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \Sigma_a \Phi(x) + \delta(x) = 0 \implies \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - k^2 \Phi(x) + \frac{\delta(x)}{D} = 0 \quad (1.176)$$

dove $k^2 = \frac{\Sigma_a}{D}$. Avevamo trovato:

$$\Phi(x) = \frac{e^{-kx}}{2kD} \quad (1.177)$$

con sorgente infinita e mezzo isotropo. Si nota che tra questa e $\Phi_{As}(z)$ c'è una proporzionalità dovuta alla presenza del coefficiente β . Nella diffusione si era trattato quale primo valore di D : $D = \frac{1}{3\Sigma_s}$ e $\beta = 1$. Qui invece è $D = \frac{\Sigma_a}{k^2}$. Sostituendo β a k^2 l'espressione trovata nell'ipotesi di Σ_a piccolo si ha:

$$\beta = \frac{2\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{\Sigma^2 - 2\Sigma_a \Sigma \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)}{-\Sigma_a \Sigma + 3\Sigma_a \Sigma \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)} = \frac{2\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{1 - 3 \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right) - \frac{12}{5} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)^2}{2 \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right) - \frac{12}{5} \left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)^2} \quad (1.178)$$

Essendo $\frac{\Sigma_a}{\Sigma} = 1$ sviluppando in serie dopo aver eseguito la divisione dei polinomi in $\frac{\Sigma_a}{\Sigma}$ si ha:

$$\beta = \left(1 + \frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right) \left(1 - \frac{9}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma} + \dots\right) \quad (1.179)$$

Troncando al primo ordine in $\frac{\Sigma_a}{\Sigma}$

$$\beta = 1 - \frac{4}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma} \quad (1.180)$$

Poichè è $k^2 = 3\Sigma_a\Sigma \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma}\right)$ si può scrivere:

$$k^2 = 3\Sigma_a\Sigma\beta \quad (1.181)$$

Nel caso di acqua come mezzo moderatore si ha

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma} \simeq 10^{-2}$$

Nel caso di grafite come mezzo moderatore:

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma} \simeq 10^{-2}$$

In entrambi i casi è $\beta \simeq 1$. Quindi per tali moderatori il k della diffusione coincide con il k relativo a $\Phi_{As}(z)$. Dunque il $\Phi_{As}(z)$ è la soluzione dell'equazione

$$D \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \Sigma_a \Phi(x) + \beta \delta(x) = 0 \quad (1.182)$$

1.7.2 Flusso transiente

Calcoliamo ora il flusso transiente $\Phi_{Tr}(z)$:

$$\Phi_{Tr}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{e^{-\Sigma \eta z}}{\eta} \frac{\tanh^{-1} \eta}{1 - \frac{\Sigma_s}{\Sigma} \frac{\tanh^{-1} \eta}{\eta}} d\eta \quad \text{dove} \quad -\eta = \frac{i\omega}{\Sigma} \quad (1.183)$$

Si ha una singolarità essenziale per $\eta = 1$. Infatti:

$$\begin{aligned} \tanh^{-1} 1 = \varphi &\implies \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}} = 1 \implies e^\varphi - e^{-\varphi} = e^\varphi + e^{-\varphi} \\ &\implies -e^{-\varphi} = e^\varphi \text{ soddisfatta per } \varphi = \infty \end{aligned} \quad (1.184)$$

Ricordiamo un teorema sull'integrazione di funzioni analitiche:

Teorema 5 *Se $F(p)$ è una funzione analitica della variabile complessa p in un campo moltiplicemente connesso, e sul contorno c del campo e sui contorni $c_1, c_2, \dots, c_n$ delle zone non connesse, si ha:*

$$\oint_c F(p) dp = \oint_{c_1} F(p) dp + \oint_{c_2} F(p) dp + \dots + \oint_{c_n} F(p) dp, \quad (1.185)$$

allora è

$$\oint_{c_1} F(p) dp + \oint_{c_2} F(p) dp + \dots + \oint_{c_n} F(p) dp = 0$$

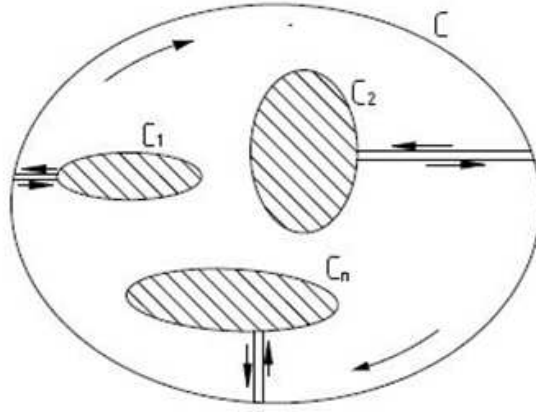


Figura 1.12: Illustrazione dell'artificio che rende semplicemente connesso un campo molteplicemente connesso.

Si congiungano come indicato in fig. 1.12, con delle linee non connesse al contorno c , in modo da poter eseguire l'integrale secondo il contorno indicato dalle frecce, escludendo le zone non connesse.

Questo per le ipotesi fatte, e cioè per la funzione analitica e monodroma definita in un campo semplicemente connesso, è (**primo teorema di Cauchy**)

$$\oint_c F(p) dp = 0 \quad (1.186)$$

Infatti con l'artificio delle linee di congiunzione il campo si è reso semplicemente connesso. Nel nostro caso è 1.13:

$$\oint_c \varphi(\eta) \exp(-\Sigma z \eta) d\eta = 0 \quad (1.187)$$

ossia

$$\int_L \varphi(\eta) \exp(-\Sigma z \eta) d\eta + \int_{\Gamma_1} (...) d\eta + \int_{AB} (...) d\eta + \int_{\Gamma_2} (...) d\eta + \int_{CD} (...) d\eta + \int_{\Gamma_3} (...) d\eta = 0 \quad (1.188)$$

dove si ha:

$$\begin{aligned} \int_L \varphi(\eta) \exp(-\Sigma z \eta) d\eta \quad \alpha \rightarrow \infty &= \int_{-i\alpha}^{i\alpha} \varphi(\eta) \exp(-\Sigma z \eta) d\eta \quad (1.189) \\ \int_{\Gamma_1 + \Gamma_3} \varphi(\eta) \exp(-\Sigma z \eta) d\eta \quad R \rightarrow \infty &= 0 \\ \int_{\Gamma_2} \varphi(\eta) \exp(-\Sigma z \eta) d\eta \quad r \rightarrow 0 &= 0 \\ \int_{AB} \varphi(\eta) \exp(-\Sigma z \eta) d\eta \quad \begin{matrix} r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty \end{matrix} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \exp(-\Sigma z \eta) \cdot \frac{\frac{\pi}{2}i + \tanh^{-1} \frac{1}{\eta}}{\eta} \cdot \frac{d\eta}{1 - \frac{\Sigma_s}{\Sigma} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}i + \tanh^{-1} \frac{1}{\eta}}{\eta}} \end{aligned}$$

Raccogliendo risulta:

$$\Phi_{Tr}(z) = \int_1^\infty \frac{2\Sigma^2 \eta - \exp(-\Sigma^2 z \eta)}{\left[2\Sigma \eta - 2\Sigma_s \tanh^{-1} \frac{1}{\eta}\right]^2 + \pi^2 \Sigma_s^2} d\eta \quad (1.190)$$

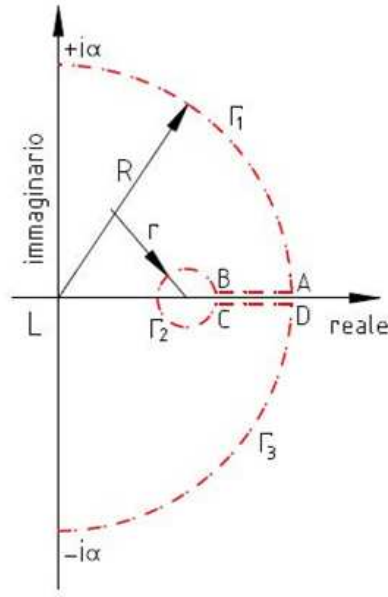


Figura 1.13: Cammino di integrazione nel caso in esame.

e ricordando l'espressione

$$\Phi_{As}(z) = \beta \frac{e^{-kz}}{2kD}$$

si conclude che il $\Phi_{Tr}(z)$ è valido per z piccoli e trascurabile per z grandi; viceversa invece per $\Phi_{Tr}(z)$. Naturalmente la divisione del flusso tra parte asintotica e parte transiente è solo un artificio matematico per ottenere un'espressione relativamente semplice per il flusso totale.

1.7.3 Dispersione o scattering anisotropo

Riprendiamo l'equazione di Boltzmann:

$$\mu \frac{\partial \Phi(z, \mu)}{\partial z} + \Sigma \Phi(z, \mu) = \frac{1}{2} N_s \sigma_{s0} \int_{-1}^{+1} \Phi(z, \mu') d\mu' + \frac{3}{2} \mu N_s \sigma_{s1} \int_{-1}^{+1} \mu' \Phi(z, \mu') d\mu' \quad (1.191)$$

dove come già si è visto è

$$\sigma_{s0} = \int_{-1}^{+1} \sigma_s(\mu_0) d\mu_0, \quad \sigma_{s1} = \int_{-1}^{+1} \mu_0 \sigma_s(\mu_0) d\mu_0 = \bar{\mu}_0 \sigma_{s0} \quad (1.192)$$

Si può allora scrivere:

$$\mu \frac{\partial \Phi(z, \mu)}{\partial z} + \Sigma \Phi(z, \mu) = \Sigma_s \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \Phi(z, \mu') d\mu' + \frac{3}{2} \mu \bar{\mu}_0 \int_{-1}^{+1} \mu' \Phi(z, \mu') d\mu' \right] \quad (1.193)$$

Supponiamo che sia:

$$\Phi(z, \mu) = h(\mu) e^{\pm kz} \quad (1.194)$$

Sostituendo si ha:

$$(\Sigma \pm k\mu) h(\mu) = \Sigma_s \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} h(\mu') d\mu' + \frac{3}{2} \mu \bar{\mu}_0 \int_{-1}^{+1} \mu' h(\mu') d\mu' \right] \quad (1.195)$$

che potremo sempre scrivere così:

$$(\Sigma \pm k\mu) h(\mu) = \text{costante} \cdot (A + \mu\bar{\mu}_0) \quad (1.196)$$

Le incognite sono dunque A e k . La (1.195) allora diventa:

$$A + \mu\bar{\mu}_0 = \Sigma_s \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{A + \mu'\bar{\mu}_0}{\Sigma \pm k\mu'} d\mu' + \frac{3}{2} \mu\bar{\mu}_0 \int_{-1}^{+1} \mu' \frac{A + \mu'\bar{\mu}_0}{\Sigma \pm k\mu'} d\mu' \right] \quad (1.197)$$

Segue

$$\begin{aligned} A + \mu\bar{\mu}_0 = & A \frac{\Sigma_s}{2k} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} d\mu' \pm \Sigma_s \frac{\bar{\mu}_0}{2} \left(\frac{2}{k} - \frac{\Sigma}{k^2} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} \right) \pm \\ & \pm A \frac{3\Sigma_s \mu\bar{\mu}_0}{2} \left(\frac{2}{k} - \frac{\Sigma}{k^2} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} \right) + \frac{3\Sigma_s \mu\bar{\mu}_0}{2} \left(-2\frac{\Sigma}{k^2} - \frac{\Sigma}{k^2} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} \right) \end{aligned} \quad (1.198)$$

Uguagliano i termini con le stesse potenze in μ si ottiene:

$$A = A \frac{\Sigma_s}{2k} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} \pm \Sigma_s \frac{\bar{\mu}_0}{2} \left(\frac{2}{k} - \frac{\Sigma}{k^2} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} \right) \quad (1.199)$$

$$\mu\bar{\mu}_0 = \pm A \frac{3\Sigma_s \mu\bar{\mu}_0}{2} \left(\frac{2}{k} - \frac{\Sigma}{k^2} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} \right) + \frac{3\Sigma_s \mu\bar{\mu}_0}{2} \left(-2\frac{\Sigma}{k^2} - \frac{\Sigma}{k^2} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} \right) \quad (1.200)$$

Il valore di A risulta:

$$A = \frac{\frac{\Sigma_s \bar{\mu}_0}{2} \left(\frac{2}{k} - \frac{\Sigma_s}{k^2} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} \right)}{1 - \frac{\Sigma_s}{k^2} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k}} \implies \frac{\Sigma_s}{k^2} \ln \frac{\Sigma + k}{\Sigma - k} = \frac{1 + 3 \frac{\Sigma_a \Sigma_s}{k^2} \bar{\mu}_0}{1 + 3 \frac{\Sigma \Sigma_s}{k^2} \bar{\mu}_0} \quad (1.201)$$

da cui ricaviamo

$$k^2 = 3\Sigma_a \Sigma_s (1 - \bar{\mu}_0) \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\Sigma_a}{\Sigma} + \frac{\Sigma_a}{\Sigma} \frac{\bar{\mu}_0}{1 - \bar{\mu}_0} + \dots \right) \quad (1.202)$$

Con ciò si è completato lo studio delle correzioni da apportare al coefficiente di diffusione D della legge di Flick:

$$\mathbf{J} = -D \text{grad } \Phi \quad (1.203)$$

Riassumendo:

$$\text{dalla **diffusione semplice** } \begin{cases} D = \frac{1}{3\Sigma_s} & \text{con scattering isotropo} \\ D = \frac{1}{3\Sigma_s(1-\mu_0)} & \text{con scattering anisotropo} \end{cases}$$

$$\text{dalla **equazione di Boltzmann** } \begin{cases} D = \frac{1}{3\Sigma(1-\frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma}+\dots)} & \text{con scattering isotropo} \\ D = \frac{1}{3\Sigma(1-\mu_0)(1-\frac{4}{5}\frac{\Sigma_a}{\Sigma}+\dots)} & \text{con scattering anisotropo} \end{cases}$$

Ricordiamo che tali risultati si sono ottenuti per neutroni monoenergetici.

Capitolo 2

Meccanica delle collisioni elastiche

2.1 Classificazione dei reattori a fissione nucleare

I reattori a fissione nucleare si dividono in due grandi categorie: **reattori veloci** e **reattori lenti**. Si definiscono *reattori veloci* i reattori in cui la fissione nucleare è provocata dalla collisione contro nuclei di isotopi di Uranio o Plutonio, di neutroni ad elevata energia cinetica, dell'ordine dei MeV.

Si definiscono *reattori lenti* i reattori in cui la fissione nucleare è provocata dalla collisione contro nuclei di isotopi di Uranio o Plutonio, di neutroni a bassa energia cinetica, dell'ordine degli eV – simile a quella di atomi o molecole di un gas che si trovi a temperatura ambiente. Per questo motivo tali reattori si chiamano anche *reattori termici*.

Il rallentamento di neutroni veloci è dovuto quasi interamente alla dispersione o diffusione (*scattering*) elastica subita dai neutroni per effetto di collisioni con i nuclei di un mezzo moderatore (acqua, grafite, acqua pesante).

Applicheremo i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

Siano:

A = numero di massa del nucleo del moderatore = protoni + neutroni

Z = numero atomico del nucleo del moderatore = protoni

Ad esempio: moderatore = grafite = $C_Z^A = C_6^{12}$

$n = 1$ = massa del neutrone

$p = 1$ = massa del protone.

Nel sistema del baricentro o del centro di massa si ha:

$$n(V_1 - V_m) = AV_m \implies V_m = \frac{V_1}{A+1} = V_b \quad (2.1)$$

$$V_1 - V_m = \frac{A}{A+1}V_1 = V_a \quad (2.2)$$

Nel sistema del laboratorio (figg: 2.1-2.2) si ha:

$$V_2^2 = V_a^2 + V_m^2 + 2V_aV_m \cos 2\psi = V_a^2 + V_m^2 - 2V_aV_m \cos(\pi - \theta) \quad (2.3)$$

Sostituendo i valori di V_a e V_m

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{A^2 + 1 + 2A \cos \theta}{(A+1)^2} = \frac{E_2}{E_1} \quad (2.4)$$

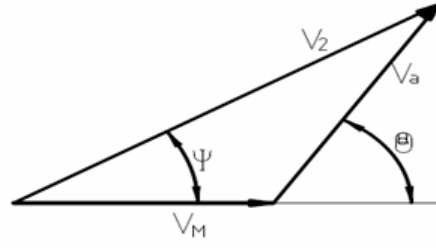


Figura 2.1: Sistema del laboratorio.

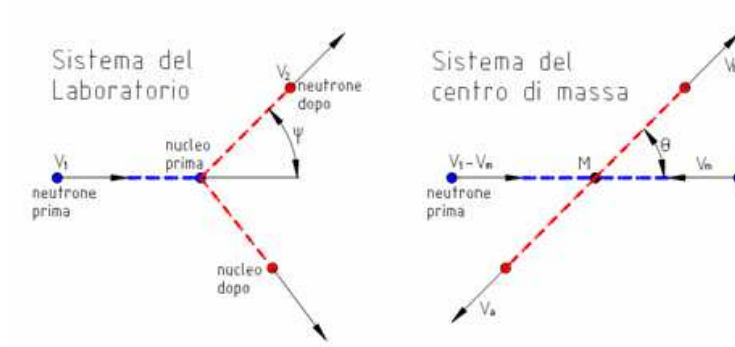


Figura 2.2: Sistema del laboratorio e sistema del baricentro.

Dunque è $E_2 \geq E_1$ valendo il segno di $=$ per $\theta = 0$. Poniamo

$$\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2} \quad (2.5)$$

Possiamo scrivere

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{2} [(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta] \implies E_A = E_1 - E_2 = \frac{2A}{(A+1)^2} (1-\cos\theta) E_1 \quad (2.6)$$

Il campo di variabilità di θ è: $0 \leq \theta \leq \pi$, e il campo di variabilità dell'energia risulta $E_1, \dots, \alpha E_1$, con $\alpha < 1$. Infatti per $\theta = 0$ si ha $E_1 = E_2$ e per $\theta = \pi$ si ha $E_2 = \alpha E_1$.

Considerando l'idrogeno H_1^1 come moderatore si ha $A = 1$ e $\alpha = 0$. Conseguentemente è possibile per un neutrone perdere tutta l'energia cinetica in una collisione con un nucleo di idrogeno. Ma ciò si intuisce facilmente perché la massa del neutrone è pressoché uguale a quella del protone.

Possiamo riscrivere α :

$$\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{A}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{A}\right)^2} \quad (2.7)$$

e sviluppiamo in serie di Mac-Laurin nell'intorno di $\frac{1}{A} = 0$:

$$\alpha = 1 - \frac{4}{A} + \frac{8}{A^2} - \dots \quad (2.8)$$

Per $A > 50$ possiamo ritenere che sia $\alpha = 1 - \frac{4}{A}$.

2.2 Legge di dispersione

Il rapporto dell'energia neutronica dopo l'urto $-E_2-$ a quella prima dell'urto $-E_1-$ è stato ottenuto (§ 2.1) come funzione della massa A del nucleo e dell'angolo di dispersione θ nel sistema del centro di massa, ipotizzando collisioni perfettamente elastiche.

Se una legge empirica di dispersione è specificata in termini di una distribuzione di probabilità per dispersione come una funzione dell'omonimo angolo, una distribuzione corrispondente di energia cinetica neutronica può essere ottenuta per mezzo di questa equazione.

Sperimentalmente si trova che la dispersione di neutroni con energia inferiore a qualche MeV è isotropa nel sistema del centro di massa. Questa è la legge empirica di dispersione che sarà postulata nel complesso della discussione seguente.

Assumendo la dispersione isotropa e restando nel sistema del baricentro la probabilità che un neutrone sia disperso entro un elemento di angolo solido $d\Omega$ corrispondente ad un elemento conico situato tra gli angoli Ω e $\Omega + d\Omega$, è

$$p(\theta) d\theta = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} = 2 \sin \theta d\theta \quad (2.9)$$

La probabilità che dopo la dispersione un neutrone con energia iniziale E_1 abbia energia nell'intervallo $E_2, \dots, E_2 + dE_2$ è

$$p(E_2) dE_2 = p(\theta) \frac{dE_2}{d\theta} d\theta \quad (2.10)$$

Ricordando che (eq. 2.6)

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{2} [(1 + \alpha) + (1 - \alpha) \cos \theta] \implies p(E_2) dE_2 = -\frac{dE_2}{E_1 (1 - \alpha)} \quad (2.11)$$

La distribuzione di probabilità

$$p(E_2) = -\frac{1}{E_1 (1 - \alpha)} \quad (2.12)$$

è indipendente da E_2 e si rappresenta in un piano come in fig. 2.3.

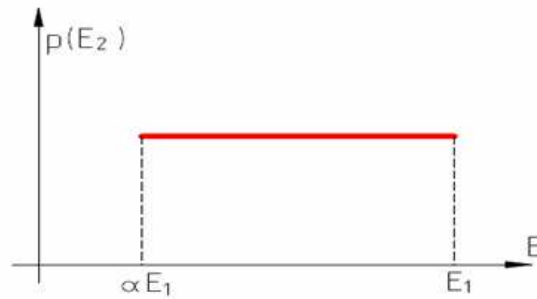


Figura 2.3: Andamento della distribuzione (2.12).

È facile verificare che

$$\int_{E_1}^{\alpha E_1} p(E_2) dE_2 = 1 \quad (2.13)$$

Sebbene la dispersione sia isotropa nel sistema del baricentro, non è così nel sistema del laboratorio, a meno che la massa A del nucleo sia grande in confronto a quella del neutrone. In tal caso si può supporre il centro di massa coincidente con il nucleo. Dalle composizioni vettoriali delle velocità si vede che (fig. 2.4)

$$V_2 \cos \psi = V_a \cos \theta + V_M = \frac{AV_1}{A+1} \cos \theta + \frac{V_1}{A+1} \quad (2.14)$$

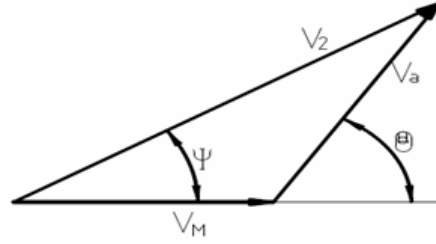


Figura 2.4: Sistema del laboratorio.

Poiché è

$$V_2 = \frac{V_1}{A+1} \sqrt{A^2 + 2A \cos \theta + 1} \quad (2.15)$$

si ha che

$$\cos \psi = \frac{A \cos \theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A \cos \theta + 1}} \quad (2.16)$$

Per un nucleo pesante $A \gg 1 \Rightarrow \cos \psi \simeq \cos \theta$. Dunque se la dispersione è isotropa nel sistema del laboratorio lo è anche nel sistema del baricentro. Il coseno medio di dispersione vale allora:

$$\overline{\cos \psi} = \frac{\int_0^\pi \cos \psi p(\theta) d\theta}{\int_0^\pi p(\theta) d\theta} = \frac{\int_0^\pi \frac{A \cos \theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A \cos \theta + 1}} \frac{1}{2} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin \theta d\theta} = \frac{2}{3} A \quad (2.17)$$

Definizione 6 Definiamo **decremento medio logaritmico**, la grandezza

$$\xi = \overline{\ln \frac{E_1}{E_2}} = \frac{\int_{E_1}^{\alpha E_1} \ln \frac{E_1}{E_2} p(E_2) dE_2}{\int_{E_1}^{\alpha E_1} p(E_2) dE_2} = \int_{E_1}^{\alpha E_1} \ln \frac{E_1}{E_2} p(E_2) dE_2, \quad (2.18)$$

Tenendo conto della condizione di normalizzazione (2.13), si ha:

$$\xi = \int_{E_1}^{\alpha E_1} \ln \frac{E_1}{E_2} p(E_2) dE_2 \quad (2.19)$$

Posto $x = E_2/E_1$ si può scrivere:

$$\xi = \frac{1}{1-\alpha} \int_1^\alpha \ln x dx \Rightarrow \xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1} \quad (2.20)$$

Per $A > 10$ si può scrivere:

$$\xi = \frac{2}{A + 2/3} \quad (2.21)$$

La grandezza ξ è molto utile perché dipende solo da A del moderatore che una volta scelto, si può affermare che un neutrone in ogni collisione, perde sempre la stessa quantità di energia. Questa frazione di perdita decresce con l'aumentare del numero di massa A del moderatore.

Il numero di collisioni necessarie per passare dall'energia di fissione di 2 MeV a ca. 0.025 eV è

$$\text{numero di collisioni} = n = \frac{\ln \frac{2 \cdot 10^6}{0.025}}{\xi} = \frac{18.2}{\xi} \quad (2.22)$$

2.3 Potere di rallentamento e rapporto di moderazione

In accordo con la $n = 18.2/\xi$ ricavata nel numero precedente, il valore di ξ è inversamente proporzionale al numero di collisioni di dispersione richiesto per rallentare un neutrone dall'energia di fissione all'energia termica. Conseguentemente ξ è una misura della capacità moderante del materiale di dispersione. Un buon moderatore è quello che presenta una considerevole riduzione di energia per ogni collisione, e dunque deve esibire il più grande valore possibile per ξ . In presenza di idrogeno $\xi = 1$ ed è ovviamente il massimo valore che ξ può assumere.

Definizione 7 Il **potere di rallentamento** è il prodotto $\xi \Sigma_s$

Ricordiamo che

$$\Sigma_s = \frac{N_A \rho \sigma_s}{A}, \quad (2.23)$$

dove N_A è il numero di Avogadro, ρ è la densità del moderatore, σ_s è la sezione d'urto microscopica del moderatore, A è il numero di massa del moderatore. Quindi il potere di rallentamento è

$$\xi \frac{N_A \rho \sigma_s}{A} \quad (2.24)$$

Definizione 8 Si dice **rapporto di moderazione** il rapporto tra il potere di rallentamento e la sezione d'urto di assorbimento:

$$\frac{\xi \Sigma_s}{\Sigma_a} \quad (2.25)$$

Moderatore	Potere di rallentamento	Rapporto di moderazione
Acqua H ₂ O	1.53	72
Acqua pesante D ₂ O	0.170	12000
Elio He ^{nota}	$1.6 \cdot 10^{-5}$	83
Berilio Be	0.176	159
Carbonio C	0.64	170

nota: alla pressione e temperatura d'atmosfera

Il criterio che si segue nella scelta del moderatore è il seguente: $\max \xi \Sigma_s$ e $\min \Sigma_a$.

2.3.1 Letargia

Per quanto vedremo più avanti è utile esprimere l'energia di un neutrone attraverso la seguente formula chiamata *letargia*:

$$u = \ln \frac{E_0}{E}, \quad (2.26)$$

dove E_0 è l'energia iniziale dei neutroni di sorgente prodotti da fissione. Si può allora scrivere

$$E = E_0 e^{-u} \quad (2.27)$$

Il decadimento dell'energia è funzione del tempo. Teoricamente la curva è continua, ma in realtà si passa da un valore all'altro dell'energia con salti proporzionali alla costante ξ ; si è visto che per ogni collisione la frazione persa di energia è costante. Il tempo medio tra una collisione e l'altra è $t = \lambda_s/v$ dove λ_s e v sono rispettivamente il libero cammino medio di dispersione e la velocità. Rispetto al tempo i salti sono così piccoli che con buona approssimazione la curva può considerarsi un'esponenziale continua (fig. 2.5).

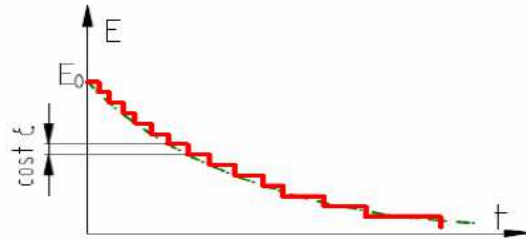


Figura 2.5: Decadimento dell'energia in funzione del tempo. La curva continua rappresenta l'andamento teorico. L'andamento discontinuo (curva in rosso) rappresenta, invece, l'andamento reale.

2.3.2 Rallentamento in un mezzo infinito, stato stazionario

Nell'ipotesi di dispersione isotropa il flusso è $\Phi(E, x)$; pertanto:

$$\int \Phi(E, x) dx = \Phi(E) \quad (2.28)$$

Generalmente è: produzione – rimozione = $\frac{\partial n}{\partial t}$. Nel caso stazionario si ha produzione = rimozione.

$$\text{produzione} = \text{termine di sorgente } S(E) + Q(E),$$

dove $Q = \frac{\text{q.tà di neutroni}}{\text{cm}^3 \text{s}}$ aventi energia E' con probabilità $\Pi(E' \rightarrow E)$ di passare a energia E ; quindi:

$$Q(E) = \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E') \Phi(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE'$$

Segue

$$\text{produzione} = S(E) + \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E') \Phi(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' \quad (2.29)$$

$$\text{rimozione} = [\Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)] \Phi(E) \quad (2.30)$$

Il bilancio si esprime dunque con

$$S(E) + \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E') \Phi(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' = \Sigma(E) \Phi(E) \quad (2.31)$$

Per collisioni elastiche e dispersione isotropa si ha

$$\Pi(E' \rightarrow E) dE = \frac{dE}{E'(1-\alpha)} \quad (2.32)$$

Il flusso

$$\Phi(E) = \Phi_V(E) + \Psi(E) \quad (2.33)$$

dove $\Phi_V(E)$ è il flusso vergine di neutroni che non hanno subito collisioni; $\Psi(E)$ è il flusso vero di neutroni. La sorgente $S(E)$ è supposta uniformemente distribuita e sarà uguale a

$$S(E) = \Sigma(E) \Phi_V(E)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} S(E) + \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E') \Phi(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' &= \Sigma(E) \Phi_V(E) + \Sigma(E) \Psi(E) \\ \implies \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E') \Phi(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' &= \Sigma(E) \Psi(E) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Posto

$$\Sigma(E) \Psi(E) = F(E) = \text{densità dicollisione totale/unità di energia}$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E') [\Phi_V(E') + \Psi(E')] \Pi(E' \rightarrow E) dE' &= F(E) \\ \implies \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E') \Phi_V(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' + \int_0^{+\infty} \Sigma_s(E') \Psi(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' &= F(E) \\ \implies \int_0^{+\infty} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')} S(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' + \int_0^{+\infty} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')} \Sigma(E') \Psi(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' &= F(E) \end{aligned}$$

Poniamo come

$$\text{probabilità di dispersione} = h(E) = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a}$$

$$\int_0^{+\infty} h(E') S(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' + \int_0^{+\infty} h(E') F(E') \Psi(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' = F(E) \quad (2.35)$$

Supponendo che la sorgente emetta neutroni di energia costante sarà:

$$S(E) = \delta(E_0 - E) \quad (2.36)$$

Ricordiamo che la definizione della funzione delta di Dirac è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (2.37)$$

si scriverà allora

$$F(E) = h(E_0) \Pi(E_0 \rightarrow E) + \int_0^{+\infty} h(E') F(E') \Pi(E' \rightarrow E) dE' \quad (2.38)$$

dove $\alpha E_0 < E < E_0$.

$$F(E) = \frac{h(E_0)}{E_0(1-\alpha)} + \int_E^{E_0} h(E') F(E') \frac{dE'}{E'(1-\alpha)} \quad (2.39)$$

Supponiamo ora che l'energia sia $E < \alpha E_0$. Ciò implica che i neutroni hanno già subito una dispersione. Infatti dopo la prima collisione bisogna considerare quale energia iniziale αE_0 e quale energia finale $\alpha \cdot \alpha E_0 = \alpha^2 E_0$, e così via. Allora la densità di collisione è

$$F(E) = \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{E/\alpha} h(E') F(E') \frac{dE'}{E'} \quad (2.40)$$

Infatti primo integrale si annulla essendo nulla la probabilità di passare per effetto di una collisione da E_0 a $E < \alpha E_0$. I limiti di integrazione nel secondo integrale si giustificano immediatamente ricordando che un neutrone avente energia iniziale E/α (con $\alpha < 1$) rallenta fino ad una energia E . Supposto che $\Sigma_a = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} F(E) &= \frac{1}{(1-\alpha)E_0} + \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{E_0} F(E') \frac{dE'}{E'} \\ \Rightarrow F(E) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_E^{E/\alpha} F(E') \frac{dE'}{E'} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Introduciamo la letargia relativa x

$$x = \frac{\ln \frac{E_0}{E}}{\ln \frac{E_0}{\alpha E_0}} \Rightarrow x = \frac{\ln u}{\ln \frac{1}{\alpha}}$$

per cui $E = E_0 \alpha^x$. Il motivo per cui si è introdotta la letargia relativa appare evidente considerando che:

$$\begin{aligned} &\text{a energia } E_0 \text{ corrisponde } u = 0 \text{ e } x = 0 \\ &\text{a energia } \alpha E_0 \text{ corrisponde } u = \ln \frac{1}{\alpha} \text{ e } x = 1 \\ &\text{a energia } \alpha^2 E_0 \text{ corrisponde } u = 2 \ln \frac{1}{\alpha} \text{ e } x = 2 \\ &\dots \\ &\text{a energia } \alpha^n E_0 \text{ corrisponde } u = n \ln \frac{1}{\alpha} \text{ e } x = n \end{aligned}$$

cioè da una scala di energie che segue una successione geometrica

$$E_0 > \alpha E_0 > \alpha^2 E_0 > \dots > \alpha^n E_0,$$

con intervalli che via via infittiscono al crescere del numero di collisioni, si è passati alla scala delle letargie relative con intervalli uguali, rappresentando i numeri $1, 2, \dots, n$, essenzialmente il numero di collisioni. Allora se $F(E) dE = \text{q.t.à di collisioni}/(\text{cm}^3 \text{ s})$ lo sarà anche $N(x) dx$

$$F(E) dE = -N(x) dx \quad (2.42)$$

Il segno indica che x cresce al diminuire di E . Si verifica che

$$N(x) = E \cdot F(E) \ln \frac{1}{\alpha} \quad (2.43)$$

Posto

$$q = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \frac{1}{\alpha} \quad (2.44)$$

si trova che

$$N(x) = q\alpha^x + q \int_0^x \alpha^{x-y} N(y) dy \quad (2.45)$$

con $0 \leq x \leq 1$ ($\alpha E_0 < E < E_0$).

$$N(x) = q \int_0^x \alpha^{x-y} N(y) dy$$

con $x > 1$ ($E < \alpha E_0$). Il fenomeno fisico è già stato illustrato: i neutroni emessi con E_0 possono dopo la prima collisione rallentare fino a αE_0 ; questi dopo la seconda fino a $\alpha^2 E_0$ e così via. Perciò viene spontaneo pensare che ogni intervallo $\alpha^i E_0 \dots \alpha^{i+1} E_0$ ($i = 1, 2, \dots$) sia una sorgente neutronica per il successivo.

Relativamente al primo intervallo l'espressione di $N(x)$ è:

$$\begin{aligned} N_0(x) &= q\alpha^x + q \int_0^x \alpha^{x-y} N_0(y) dy \implies \frac{dN_0(x)}{dx} = \left(q - \ln \frac{1}{\alpha} \right) N_0(x) \\ \implies \int_0^x \frac{dN_0(x)}{N_0(x)} &= \int_0^x \left(q - \ln \frac{1}{\alpha} \right) dx \implies N_0(x) = q \exp \left[\left(q - \ln \frac{1}{\alpha} \right) x \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Per la posizione (2.44):

$$N_0(x) = qe^{\alpha q x}$$

che è la densità di collisioni per l'intervallo $(0 \dots 1)$ di letargia relativa. Consideriamo l'intervallo per x ($n \leq x \leq n+1$) (fig. 2.6).



Figura 2.6: Intervallo per x ($n \leq x \leq n+1$)

$$N_n(x) = q \int_{x-1}^n \alpha^{x-y} N_{n-1}(y) dy + q \int_n^x \alpha^{x-y} N_n(y) dy \quad (2.47)$$

Il termine α^{x-y} è manifestamente un kernel; esso rappresenta la probabilità che neutroni di letargia y acquistino una letargia x . Si può immediatamente verificare che la (2.47) è esatta. Poniamo $n = 1$

$$N_1(x) = q \int_{x-1}^1 \alpha^{x-y} N_{n-1}(y) dy + q \int_1^x \alpha^{x-y} N_1(y) dy \quad (2.48)$$

Per $x = 1$ si ottiene

$$N_1(1) = q \int_0^1 \alpha^{x-y} N_0(y) dy \quad (2.49)$$

Trovandoci nel 1° intervallo usiamo la $N_0(1)$

$$N_0(1) = q\alpha + q \int_0^1 \alpha^{1-y} N_0(y) dy = q\alpha + N_1(1) \quad (2.50)$$

Deriviamo ambo i membri della (2.47) si ottiene l'equazione alle differenze finite

$$N'_n(x) = \left(q - \ln \frac{1}{\alpha}\right) N_n(x) - \alpha q N_{n-1}(x-1) \quad (2.51)$$

dove

$$q - \ln \frac{1}{\alpha} = \frac{N'_0(x)}{N_0(x)} \quad (2.52)$$

Dividendo ambo i membri della (2.51) per $N_0(x)$

$$\frac{N'_n(x)}{N_0(x)} = \frac{N'_0(x)}{N_0^2(x)} N_n(x) - \alpha q \frac{N_{n-1}(x)}{N_0(x)} \implies \frac{N'_n N_0}{N_0^2} - \frac{N'_0 N_n}{N_0^2} = -\alpha q \frac{N_{n-1}(x-1)}{N_0(x)} \quad (2.53)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{N_n}{N_0} \right) = -\alpha q \frac{N_{n-1}(x-1)}{N_0(x)} \frac{N_0(x-1)}{N_0(x-1)} \implies \frac{d}{dx} \left(\frac{N_n}{N_0} \right) = -\alpha q \frac{N_0(x-1)}{N_0(x)} \frac{N_{n-1}(x-1)}{N_0(x-1)}$$

Posto

$$P_n(x) = \frac{N_n(x)}{N_0(x)}$$

si ha

$$P'_n(x) = -\alpha q \frac{N_0(x-1)}{N_0(x)} P_{n-1}(x) \quad (2.54)$$

dove

$$N_0(x) = q \exp(\alpha q x), \quad N_0(x-1) = N_0(x) \exp(-\alpha q) \quad (2.55)$$

$$P'_n(x) = -\alpha q \exp(-\alpha q) P_{n-1}(x-1) \quad (2.56)$$

Ricordiamo che

$$q = \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{1}{\alpha},$$

quindi la (2.56) diventa

$$P'_n(x) = -q e^{-q} P_{n-1}(x-1) \quad (2.57)$$

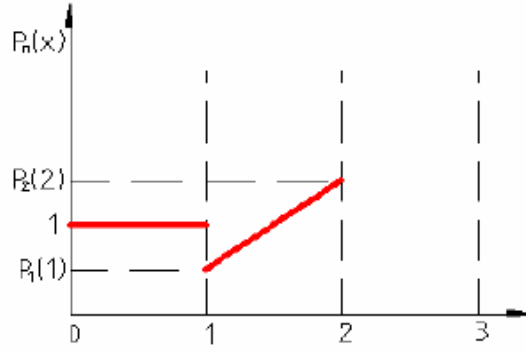
Poniamo $n=1 \implies P_0(x-1) = 1$ essendo $P_0(x) = \frac{N_0(x)}{N_0(x)}$. Si ottiene così

$$P'_1(x) = -q e^{-q} \implies \int dP_1(x) = - \int q e^{-q} dx \implies P_1(x) = -q e^{-q} (x-1) + \text{cost} \quad (2.58)$$

perché la variabile è nel 1° intervallo. Determiniamo la costante d'integrazione

$$P_1(1) = \frac{N_1(1)}{N_0(1)} = \frac{N_1(1)}{\alpha q + N_1(1)} = \text{cost} \implies P_1(x) = -q e^{-q} (x-1) + (1 - e^{-q}) \quad (2.59)$$

In generale $P_n(x)$ sono polinomi di grado n e argomento $(x-n)$ (fig. 2.3.2).



Possiamo ora dimostrare che dopo due o tre intervalli x la densità di collisione $N(x)$ è una costante. Per $x > 1$ si ha

$$N(x) = q \int_{x-1}^x \alpha^{x-y} N(y) dy \quad (2.60)$$

Posto $N(x) = \text{costante}$, nel secondo membro è $N(y) = 1$

$$q \int_{x-1}^x \alpha^{x-y} N(y) dy = q \alpha^x \int_{x-1}^x \alpha^{-y} dy = q \alpha^x \int_{x-1}^x e^{\ln \alpha^{-y}} dy = -q \frac{1}{\ln \alpha} (1 - \alpha) = 1 \quad (2.61)$$

Allora la costante rappresenta una soluzione asintotica, la quale è il valor medio $\overline{N(x)}$. Tale grandezza è il numero medio di collisioni necessarie per passare da E a αE e quindi per passare da $(x-1)$ a x .

$$n = \frac{\ln \frac{E}{\alpha E}}{\xi} = \frac{\ln \frac{1}{\alpha}}{\xi} = \overline{N(x)} \quad (2.62)$$

Numero medio di collisioni per intervallo unitario di letargia $u = x \ln \frac{1}{\xi}$ (si veda il grafico di fig. 2.7).

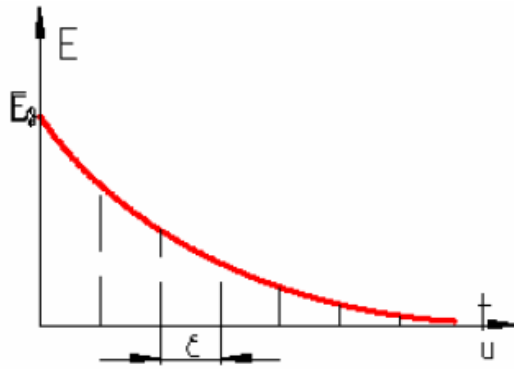


Figura 2.7: Andamento dell'energia in funzione della variabile $u = x \ln \frac{1}{\xi}$.

$$E = E_0 e^{-u} \implies E - \Delta E = E_0 e^{-(u+1)} \implies E - \Delta E = E_0 e^{-u} e^{-1} = E e^{-1} \quad (2.63)$$

$$n = \frac{\ln \frac{E}{E - \Delta E}}{\xi} = \frac{\ln \frac{E}{E e^{-1}}}{\xi} = \frac{1}{\xi} = \overline{N(u)} \quad (2.64)$$

Allora ricordando che

$$N(x) = EF(E) \ln \frac{1}{\alpha} \implies F(E) = \frac{1}{\xi E} = \Sigma(E) \Psi(E) \quad (2.65)$$

$$\Psi(E) = \frac{1}{\xi E \Sigma(E)} \quad (2.66)$$

cioè la densità di collisione totale per intervallo unitario di energia varia con legge $1/E$.

Capitolo 3

Reattori termici. Caso ideale: reattore esteso all'infinito

3.1 Reattore termico omogeneo, spoglio, ed esteso all'infinito

Nel caso in esame eviteremo il problema della perdita di neutroni da leakage. Siano

N = neutroni termici catturati dal combustibile nucleare, ma non tutti causeranno fissione.

η = q.tà media di neutroni veloci emessi dal combustibile per ogni neutrone termico catturato.

$\nu = 2.5 \pm 0.1$ è il numero medio di neutroni veloci rilasciati da ogni fissione del nucleo del combustibile.

Non tutti i neutroni termici catturati dal combustibile provocheranno fissione, quindi il valore di η differisce in generale dal valore di ν . Sarà dunque:

$$\eta = \nu \frac{\text{sezione d'urto macroscopica di fissione con neutroni lenti}}{\text{sezione d'urto totale per fissione e processi di non fissione}} = \nu \frac{\Sigma_f}{\Sigma_{\text{combustibile}}} \quad (3.1)$$

Per l'uranio le sezioni d'urto – unità di misura $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ – di neutroni termici sono:

	fissione	cattura radioattiva	dispersione
U^{235}	549	101	8.2
U^{238}	0	2.8	8.2
U_{nat}	3.92	3.5	8.2

Allora per U^{235} avremo:

$$\eta = (2.5 \pm 0.1) \frac{549}{549 + 101} = 2.1 \pm 0.1 \quad (3.2)$$

Prima che $N\eta$ neutroni veloci siano stati rallentati apprezzabilmente, essi saranno catturati da nuclei di U^{235} e da U^{238} causando fissione. Poiché ogni fissione produce più di un neutrone veloce, vi sarà una crescita nella quantità di neutroni disponibile. Chiameremo **fattore di fissione veloce** ε :

$$\varepsilon = \frac{\text{totale di neutroni veloci prodotti da fissione con neutroni di tutte le energie}}{\text{totale di neutroni veloci prodotti da fissione con neutroni termici}} \quad (3.3)$$

Conseguentemente saranno formati $N\eta\varepsilon$ neutroni veloci. Per U_{nat} si ha $\varepsilon = 1.03$ avendo come moderatore la grafite (C) oppure l'acqua pesante (D_2O). Durante il rallentamento alcuni neutroni sono catturati in processi di non fissione, cosicché non tutti i neutroni $N\eta\varepsilon$ raggiungono energie termiche.

La frazione di neutroni veloci che sfugge alla cattura è chiamata **probabilità di fuga alla risonanza** e si denota con p . Dunque la quantità di neutroni che viene termalizzata è $N\eta\varepsilon p$. Quando i neutroni saranno ridotti a energia termica, diffonderanno per un certo tempo, rimanendo la distribuzione di energia pressoché costante, quindi saranno assorbiti dal combustibile, dal moderatore e da altre sostanze presenti.

Chiameremo **fattore di utilizzazione termica** la seguente grandezza:

$$f = \frac{\text{totale di neutroni termici assorbiti nel combustibile}}{\text{totale di neutroni termici assorbiti nel combustibile+moderatore+altre sostanze}} \quad (3.4)$$

Allora la q.tà di neutroni termici catturati dal combustibile è $N\eta\varepsilon pf$. Definiamo il seguente rapporto di fondamentale importanza nella conduzione degli impianti nucleari; **fattore di moltiplicazione** K_∞ :

$$K_\infty = \frac{\text{q.tà totale media di neutroni assorbiti in una generazione}}{\text{q.tà totale media di neutroni assorbiti nella generazione precedente}} = \frac{N\eta\varepsilon pf}{N} = \eta\varepsilon pf \quad (3.5)$$

La condizione di autosostentamento di una reazione a catena in un sistema di dimensioni infinite è $K_\infty = 1$.

In un reattore omogeneo si può porre $\varepsilon = 1$ poiché, data la bassa densità del combustibile nel moderatore, si può pensare che ogni fissione sia dovuta a neutroni lenti.

Nel caso che il combustibile sia costituito da una miscela – per esempio U naturale – la formula di η cambia. Saranno:

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \quad \Sigma_{f_1}, \Sigma_{f_2}, \dots, \Sigma_{f_n} \quad \Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2}, \dots, \Sigma_{t_n}$$

In cui $\Sigma_{t_i} = \Sigma_{f_i} + \Sigma_{c_i}$, e dunque per ciascun componente avremo $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$

$$\eta = \frac{\eta_1 \Sigma_{t_1} + \eta_2 \Sigma_{t_2} + \dots + \eta_n \Sigma_{t_n}}{\Sigma_{t_1} + \Sigma_{t_2} + \dots + \Sigma_{t_n}} \quad (3.6)$$

Esempio 9 (combustibile fissile = U naturale)

La composizione isotopica dell'Uranio naturale è la seguente

Numero di massa A	%	Unità di massa atomica (amu)
234	0.006	234.11
235	0.712	235.11
238	99.282	238.12

Per il nostro scopo possiamo ignorare l'isotopo U^{234} . Quindi scriveremo:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\eta^{235} \sigma_t^{235} N_{235} + \eta^{238} \sigma_t^{238} N_{238}}{\sigma_t^{235} N_{235} + \sigma_t^{238} N_{238}} = \frac{\eta^{235} (\sigma_f^{235} + \sigma_c^{235}) N_{235} + \eta^{238} (\sigma_f^{238} + \sigma_c^{238}) N_{238}}{(\sigma_f^{235} + \sigma_c^{235}) N_{235} + (\sigma_f^{238} + \sigma_c^{238}) N_{238}} \quad (3.7) \\ &= \frac{\nu^{235} \sigma_f^{235}}{(\sigma_f^{235} + \sigma_c^{235}) + \sigma_c^{238} \frac{N_{238}}{N_{235}}} = \frac{2.5 \cdot 549}{(549 + 101) + 2.8 \frac{N_{238}}{N_{235}}} = 1.32 \end{aligned}$$

N_{238} e N_{235} indicano il numero di atomi per ogni cm^3 . V_{238} e V_{235} indicano il volume occupato e si esprime in cm^3 . Vista la % di U^{238} ci occupiamo solo di questo isotopo.

$$V_{238} = \frac{\text{massa}}{\text{densità}} = \frac{238}{18.9} = 12.6 \frac{\text{cm}^3}{\text{grammo - atomo}}$$

$$N_{238} = \frac{6.023 \cdot 10^{23} \text{atomi/grammo - atomo}}{12.6 \text{ cm}^3 / \text{grammo - atomo}} = 4.78 \cdot 10^{22}$$

Quindi da $\eta = 2.1$ per il 100% di U^{235} si è passati a $\eta = 1.32$ per U_{nat} . Indicando con μ la % di U^{235} e con $(1 - \mu)$ la % di U^{238} si può scrivere

$$\eta = \frac{2.1 \cdot \sigma_t^{235} \cdot \mu}{\mu \sigma_t^{235} + (1 - \mu) \sigma_c^{238}} = \frac{2.1 \cdot (549 + 101) \mu}{\mu (549 + 101) + (1 - \mu) \cdot 2.8} = \frac{1365\mu}{647.2\mu + 2.8} \Rightarrow \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\eta} = \frac{647.2\mu + 2.8}{1365\mu} \Rightarrow \eta = \frac{\mu}{0.474\mu + 0.0021} \quad \text{dove } 0 \leq \mu \leq 1$$

Basta un piccolo arricchimento di U^{235} per produrre forti variazioni di η (fig. 3.1); ma oltre un certo limite non è più conveniente.

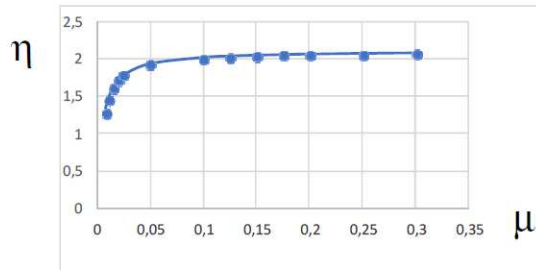


Figura 3.1: Esempio 9.

Calcolo del fattore di utilizzazione termica

Ricordiamo che

$$f = \frac{\text{totale di neutroni termici assorbiti nel combustibile}}{\text{totale di neutroni termici assorbiti nel combustibile+moderatore+altre sostanze}} \quad (3.9)$$

Segue

$$f = \frac{\Sigma_{\text{Uranio}}}{\Sigma_{\text{Uranio}} + \Sigma_{\text{a-moderatore}} + \Sigma_{\text{a-parassiti}}} \quad (3.10)$$

è ovvio che si farà il possibile per ridurre a valori trascurabili l'assorbimento di sostanze parassite. Quindi sarà:

$$f = \frac{\Sigma_{\text{Uranio}}}{\Sigma_{\text{Uranio}} + \Sigma_{\text{a-moderatore}}} = \frac{N_{\text{uranio}} \cdot \sigma_t}{N_{\text{uranio}} \cdot \sigma_t + N_{\text{a-moderatore}} \cdot \sigma_{\text{a-moderatore}}} \quad (3.11)$$

$$= \frac{\sigma_t}{\sigma_t + \frac{1}{m} \sigma_{\text{a-moderatore}}}$$

Calcolo della probabilità di fuga alla risonanza

Metodo 1

In generale può essere assunto che nel sistema moderatore-combustibile la Σ_a del moderatore sia trascurabile rispetto a quella del combustibile, e dunque la probabilità di dispersione è

$$\frac{\Sigma_s(u)}{\Sigma_s(u) + \Sigma_a(u)}, \quad (3.12)$$

dove $\Sigma_s(u)$ è la sezione d'urto macroscopica del moderatore, $\Sigma_a(u)$ la sezione d'urto del moderatore, e u la letargia. Il range di energia è:

$$E_0 = 2 \text{ MeV} < E < E_{th} = 0.025 \text{ eV}$$

Il range di letargia è

$$u_0 = 0 < u < u_{th} = 18.2$$

Dividiamo il range di letargia in intervalli Δu . Il numero di collisioni in un intervallo unitario di letargia è

$$\frac{18.2}{\xi \cdot |u_0 - u_{th}|} = \frac{1}{\xi} \quad (3.13)$$

essendo $u_{th} - u_0 = 18.2$ e il numero di collisioni in Δu è $\Delta u/\xi$. Supposta costante la probabilità di dispersione in Δu , la probabilità che un neutrone passi da u a $u + du$ senza essere assorbito, ossia continuamente disperso, è la probabilità composta

$$\left[\frac{\Sigma_s(u)}{\Sigma_s(u) + \Sigma_a(u)} \right]^{\frac{\Delta u}{\xi}}, \quad (3.14)$$

avendo sottinteso l'ipotesi che ogni collisione di dispersione sia indipendente dalle altre. Si può anche scrivere

$$\left[1 - \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma_s(u) + \Sigma_a(u)} \right]^{\frac{\Delta u}{\xi}} \quad (3.15)$$

Ricordando lo sviluppo in serie $e^{-x} = 1 - x + \dots$

$$1 - \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma_s(u) + \Sigma_a(u)} \simeq \exp\left(-\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a}\right) \Rightarrow \left[\exp\left(-\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a}\right) \right]^{\frac{\Delta u}{\xi}} \simeq \exp\left(-\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \cdot \frac{\Delta u}{\xi}\right) \quad (3.16)$$

La probabilità totale in tutto l'intervallo $(0, \dots, 18.2)$ è

$$\prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \cdot \frac{\Delta u_i}{\xi}\right) = \exp \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \cdot \frac{\Delta u_i}{\xi}\right) \quad (3.17)$$

e passando dalla sommatoria all'integrale

$$\exp\left(-\frac{1}{\xi} \int_0^{18.2} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} du\right) \quad (3.18)$$

Ricordando che $E = E_0 e^{-u}$ si ha

$$p = \exp\left(-\frac{1}{\xi} \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_s(E') + \Sigma_a(E')} \frac{dE'}{E'}\right) \quad (3.19)$$

Riscriviamo l'integrando:

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} \cdot \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s} \cdot \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a} = \frac{N_{238} \sigma_{a238}}{\Sigma_s} \cdot \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a} \quad (3.20)$$

Sostituendo in p si ha:

$$p = \exp \left(-\frac{1}{\xi} \frac{N_{238}}{\Sigma_s} \int_{E_{th}}^{E_0} \frac{\sigma_{a238}}{1 + \frac{N_{238} \sigma_{a238}}{\Sigma_s}} \frac{dE'}{E'} \right) \quad (3.21)$$

Nella regione $E \sim 7 \text{ eV}$ il U^{238} presenta il picco più alto di sezione d'urto di assorbimento: 4000 barns, chiamato picco di risonanza. Ciò significa che la Σ_s è indipendente dall'energia, essendo la densità di collisione $N(x)$ costante dopo 3...4 valori di x dal valore iniziale corrispondente a 2 eV.

Dunque in corrispondenza a 7 eV la $N(x)$ è costante; pertanto risulta indipendente dall'energia la $F(E)$ e di conseguenza anche la probabilità di dispersione $h(E)$. Posto

$$S = \frac{\Sigma_s}{N_{238}},$$

possiamo scrivere:

$$p = \exp \left(-\frac{1}{\xi S} \int_{E_{th}}^{E_0} (\sigma_{a238})_{eff} \frac{dE'}{E'} \right) \quad (3.22)$$

dove

$$\int_{E_{th}}^{E_0} (\sigma_{a238})_{eff} \frac{dE'}{E'} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}(S) \quad (3.23)$$

è l'**integrale effettivo di risonanza**. Segue

$$p = \exp \left(-\frac{\mathcal{I}(S)}{\xi S} \right), \quad (3.24)$$

e risulta

$$\mathcal{I}(S) = 3.9 S^{0.415} \quad (3.25)$$

Metodo 2

The collision density $N(x)$ in the case of zero absorption is

$$N(x) = q \int_{x-1}^x \alpha^{x-y} N(y) dy, \quad \text{where } h(y) = 1 \quad (3.26)$$

With non-negligible absorption

$$N(x) = q \int_{x-1}^x \alpha^{x-y} h(y) N(y) dy \quad \text{where } h(y) = \frac{\Sigma_s(y)}{\Sigma_s(y) + \Sigma_a(y)} \quad (3.27)$$

As seen in previous lessons

$$N(x) = [\Sigma_s(x) + \Sigma_a(x)] \Phi(x) \quad (3.28)$$

It follows

$$\begin{aligned} h(x) [\Sigma_s(x) + \Sigma_a(x)] &= \Sigma_s(x) \implies h(x) N(x) = \\ &= h(x) [\Sigma_s(x) + \Sigma_a(x)] \Phi(x) \\ &= \Sigma_s(x) \Phi(x) = R(x) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$R(x) = qh(x) \int_{x-1}^x \alpha^{x-y} h(y) N(y) dy = qh(x) \int_{x-1}^x \alpha^{x-y} R(y) dy \quad (3.30)$$

Let's say $y = x + \eta$. So that

$$R(x) = qh(x) \int_{-1}^0 \alpha^{-\eta} R(x + \eta) d\eta \implies R(x + \eta) = R(x) + \eta R'(x) + \eta^2 \frac{R''(x)}{2!} \quad (3.31)$$

By replacing

$$R(x) = qh(x) \int_{-1}^0 \alpha^{-\eta} R(x + \eta) d\eta + qh(x) \int_{-1}^0 \alpha^{-\eta} \eta R'(x) d\eta + qh(x) \int_{-1}^0 \alpha^{-\eta} \eta^2 \frac{R''(x)}{2} d\eta \quad (3.32)$$

Place

$$M_0 = \int_{-1}^0 \alpha^{-\eta} d\eta, \quad M_1 = \int_{-1}^0 \alpha^{-\eta} \eta d\eta, \quad M_2 = \int_{-1}^0 \alpha^{-\eta} \eta^2 d\eta \quad (3.33)$$

we will write

$$R(x) = qh(x) [M_0 R(x) + M_1 R'(x) + M_2 R''(x)] \quad (3.34)$$

Calculating the integrals (3.33):

$$M_0 = \frac{1 - \alpha}{\ln \frac{1}{\alpha}}, \quad M_1 = \frac{a \ln \frac{1}{\alpha} - (1 - \alpha)}{(\ln \frac{1}{\alpha})^2}, \quad M_2 = \frac{2(1 - \alpha) - \alpha \left[(\ln \frac{1}{\alpha})^2 + 2 \ln \frac{1}{\alpha} \right]}{\left((\ln \frac{1}{\alpha})^2 \right)^3} \quad (3.35)$$

It immediately occurs that

$$qM_0 = 1, \quad qM_1 = -\frac{\xi}{\ln \frac{1}{\alpha}} \quad (3.36)$$

Let's imagine for now it is $R''(x) = 0$. Then:

$$R(x) = h(x) \left[R(x) - \frac{\xi}{\ln \frac{1}{\alpha}} R'(x) \right] \implies \frac{R'(x)}{R(x)} = -\frac{\xi}{\ln \frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1 - h(x)}{h(x)} \quad (3.37)$$

Integrating

$$\ln \frac{R(x)}{R(0)} = -\frac{\ln \frac{1}{\alpha}}{\xi} \int_0^x \frac{1 - h(y)}{h(y)} dy \implies \frac{R(x)}{R(0)} = \exp \left[-\frac{\ln \frac{1}{\alpha}}{\xi} \int_0^x \frac{1 - h(y)}{h(y)} dy \right] = \frac{\Phi(x)}{\Phi(0)} \quad (3.38)$$

Moving on from relative lethargy $x = \frac{\ln(E_0/E)}{\ln(1/\alpha)}$ to the energy:

$$\frac{\Phi(E)}{\Phi(E_0)} = \exp \left[-\frac{1}{\xi} \int_{E_0}^E \frac{1 - h(E')}{h(E')} dE' \right] = \exp \left[-\frac{1}{\xi} \int_{E_0}^E \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma_s(E')} dE' \right] \quad (3.39)$$

Now let's imagine it is $R''(x) \neq 0$. By the (3.37), deriving both members

$$R'(x) = h'(x) R(x) + h(x) R'(x) - \frac{\xi}{\ln \frac{1}{\alpha}} R''(x) h(x) - \frac{\xi}{\ln \frac{1}{\alpha}} R'(x) h'(x) \quad (3.40)$$

Being $\Sigma_a \sim 1$ it can be assumed that

$$h(x) = \frac{\Sigma_s(x)}{\Sigma_s(x) + \Sigma_a(x)} \sim \text{constant}$$

Therefore $h'(x) = 0$ and we will write

$$R''(x) = R'(x) \frac{1 - h(x)}{qM_1 h(x)} \implies R''(x) = f(R'(x)) \quad (3.41)$$

We substitute in the (3.34) $R''(x) = f(R'(x))$

$$R(x) = h(x) R(x) - \frac{\xi}{\ln(1/\alpha)} h(x) R'(x) + \frac{M_2}{2} R'(x) \frac{1 - h(x)}{M_1} \quad (3.42)$$

Let's say

$$\frac{M_2}{2M_1} = -\frac{\gamma}{\ln(1/\alpha)}$$

where $\gamma = \gamma(\alpha)$ and replacing it is easy to get

$$R(x) \Sigma_a(x) = -\frac{R'(x)}{\ln(1/\alpha)} [\xi \Sigma_s(x) + \gamma \Sigma_a(x)] \quad (3.43)$$

By integrating we have

$$\frac{R(x)}{R(0)} = \exp \left[-\ln \frac{1}{\alpha} \int_0^x \frac{\Sigma_a(y)}{\xi \Sigma_s(y) + \gamma \Sigma_a(y)} dy \right] \quad (3.44)$$

Or

$$\frac{R(E)}{R(E_0)} = \exp \left[-\int_{E_0}^E \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_s(E') + \gamma \Sigma_a(E')} dE' \right] \quad (3.45)$$

Let's look at the case of hydrogen H_1^1 . We remember that

$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1} \implies \xi = \gamma_1(\alpha) = 1 \quad (3.46)$$

The collision density per unit energy interval is:

$$F(E) = \frac{h(E_0)}{E_0(1-\alpha)} \int_{E_0}^E h(E') F(E') \frac{dE'}{E'} \quad \text{where } \alpha E_0 < E < E_0 \quad (3.47)$$

With $\alpha = 0$ becomes valid the first expression of $F(E)$ because the range $0 < E < E_0$ is real; while the second makes no sense because $E < 0$. Noting that $\frac{h(E_0)}{E_0} = F(E_0)$ we have:

$$\begin{aligned} -F(E_0) + F(E) &= \int_{E_0}^E h(E') F(E') \frac{dE'}{E'} \\ \implies dF(E) &= h(E) \frac{F(E)}{E} dE \\ \implies \int_{E_0}^E \frac{dF(E')}{F(E')} &= -\int_{E_0}^E h(E') \frac{dE'}{E'} \\ \implies \ln \frac{F(E)}{F(E_0)} &= -\int_{E_0}^E h(E') \frac{dE'}{E'} \\ \implies F(E) &= \frac{h(E_0)}{E_0} \exp \left[-\int_{E_0}^E \frac{h(E')}{E'} dE' \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Remembering the hypothesis $\Sigma_a(E) \sim 1$ it can be assumed that $h(E) \sim 1$. It follows

$$F(E) \sim \frac{1}{E} \quad (3.49)$$

3.2 Reattore termico omogeneo con uranio-235

Essendo omogeneo il reattore e date le proporzioni del combustibile fissile e del moderatore tutti i neutroni veloci prodotti da fissione vengono termalizzati. Per ora dunque i neutroni veloci sono trascurati. Ne segue $\varepsilon \simeq 1$. Per quanto visto in una sezione precedente possiamo scrivere:

$$\eta = 2.5 \cdot \frac{549}{549 + 101} = 2.1$$

La probabilità di fuga per risonanza è $p = 1$. Rimane allora $2.1 \cdot f = 1$. Ricordiamo il coefficiente f

$$f = \frac{N_{235}\sigma_t}{N_{235}\sigma_t + N_{\text{mod}}\sigma_a^{\text{mod}}} = \frac{\sigma_t}{\sigma_t + \frac{N_{\text{mod}}}{N_{235}}\sigma_a^{\text{mod}}} = \frac{\sigma_t}{\sigma_t + \frac{1}{m}\sigma_a^{\text{mod}}} \quad (3.50)$$

dove

$$m = \frac{N_{235}}{N_{\text{mod}}} = \frac{\text{q.tà di atomi/cm}^3 \text{ del fissile}}{\text{q.tà di atomi/cm}^3 \text{ del moderatore}} \quad (3.51)$$

Alcune caratteristiche di moderatori

	H ₂ O	D ₂ O	C
σ_a^{mod} [barn]	0.66	$0.92 \cdot 10^{-3}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
m	$0.87 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} = 2.1 &= \frac{\sigma_t + \frac{1}{m}\sigma_a^{\text{mod}}}{\sigma_t} = 1 + \frac{\sigma_a^{\text{mod}}}{\sigma_t} \frac{1}{m} = 1 + \frac{\sigma_a^{\text{mod}}}{(549 + 101)} \frac{1}{m} \implies \\ 2.1 &= 1 + \frac{\sigma_a^{\text{mod}}}{650m} \implies m = \frac{\sigma_a^{\text{mod}}}{715} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ricordiamo

$$K_{\infty} = \varepsilon \eta p f \implies 1 = 1 \cdot 2.1 \cdot 1 \cdot f$$

Si può sempre realizzare un $f \geq 0.5$. Dunque questo reattore diventa **critico**.

Reattore termico omogeneo. Supponiamo di usare U_{nat} e moderatore C. In tal caso i coefficienti della criticità sono:

$$\varepsilon = 1, \quad \eta = 1.32, \quad (p \cdot f)_{\text{max}} = 0.6 \quad (3.53)$$

$$K_{\infty} = \varepsilon \eta p f = 1 \cdot 1.32 \cdot 0.6 = 0.792 < 1 \quad (3.54)$$

Dunque questo reattore **non diventa critico**.

3.3 Reattore termico eterogeneo

Faremo dapprima alcune considerazioni di carattere qualitativo sui fattori della formula di K_{∞} .

A parte il fattore η che dipende unicamente dal combustibile, si può osservare anzitutto che il fattore di fissione veloce $\varepsilon > 1$. Infatti neutroni veloci prodotti da fissione all'interno di una barra di combustibile possono dare origine ad altre fissioni prima ancora di essere totalmente termalizzati.

Fattore p

Supponiamo di usare U_{nat} . All'interno di una barra di combustibile si muovono neutroni di tutte le energie. Abbiamo visto che le zone di risonanza per U^{238} si estendono su un range che va da 200 eV a 1 eV.

I neutroni che hanno energie comprese in tali valori vengono in buona parte assorbiti all'interno di una barra (filtrati). Dunque all'interno di una barra il flusso neutronico diminuisce.

Però da questo punto di vista si può pensare che la probabilità di fuga alle risonanze sia aumentata essendo stati filtrati i neutroni nel range 200 eV ÷ 1 eV.

Fattore f

Il fattore di utilizzazione termica diminuisce essendo diminuito il flusso all'interno della barra. Complessivamente però si manifesta un aumento di pf rispetto ai reattori omogenei.

Calcolo di ε

Il rallentamento di neutroni di fissione all'interno di una barra di U^{238} può porsi in due modi.

Il primo, da collisioni anelastiche con nuclei di U; l'energia del neutrone viene ridotta al di sotto della soglia di fissione: ~ 1.1 MeV. Il secondo, dalla fuga di neutroni veloci nel moderatore; può essere assunto con buona approssimazione che nessuno dei neutroni interagenti con il moderatore ritorni alla barra di U^{238} con energia eccedente la soglia di fissione. La dispersione elastica entro la barra non cambia sostanzialmente l'energia del neutrone.

Sia P la probabilità che un neutrone primario di fissione collida internamente al combustibile in cui è stato prodotto. Se N sono i neutroni primari allora scriveremo

$$PN = \text{collisioni nella barra} \implies (1 - P)N = \text{non-collisioni nella barra}$$

$$PNv \frac{\sigma_f}{\sigma_t} = \text{neutroni veloci di fissione prodotti} \implies \sigma_f = \text{sezione d'urto di fissione}$$

$$PN \frac{\sigma_e}{\sigma_t} = \text{collisioni elastiche nella sbarra} \implies \sigma_e = \text{sezione d'urto di dispersione elastica}$$

$$PN \frac{\sigma_i}{\sigma_t} = \text{collisioni inelastiche nella sbarra} \implies \begin{array}{l} \sigma_i = \text{sezione d'urto di dispersione inelastica} \\ \sigma_t = \text{sezione d'urto totale} \end{array}$$

Dopo la prima collisione la q.tà totale di neutroni veloci disponibili nella barra è:

$$PNv \frac{\sigma_f}{\sigma_t} + PN \frac{\sigma_e}{\sigma_t} = PN \frac{v\sigma_f + \sigma_e}{\sigma_t} = PN\Xi, \quad \text{dove} \quad \frac{v\sigma_f + \sigma_e}{\sigma_t} \stackrel{\text{def}}{=} \Xi \quad (3.55)$$

I neutroni che sono stati dispersi entro il combustibile sono distribuiti pressoché uniformemente nella barra. Ma i neutroni primari di fissione sono distribuiti come il flusso termico, che presenta una depressione al centro della barra (ved. fig. 3.2).

Poiché la maggior parte dei neutroni primari sono prodotti negli strati esterni, la probabilità P' che i neutroni secondari di fissione portino collisioni nella barra è maggiore della probabilità dei neutroni primari. Le condizioni per la seconda collisione sono:

$$P'PN\Xi = \text{collisioni nella barra} \quad (1 - P')PN\Xi = \text{non-collisioni nella barra}$$

$$P'PN\Xi v \frac{\sigma_f}{\sigma_t} = \text{neutroni veloci di fissione} \quad P'PN\Xi v \frac{\sigma_e}{\sigma_t} = \text{collisioni elastiche nella barra}$$

$$P'PN\Xi \frac{\sigma_i}{\sigma_t} = \text{collisioni inelastiche nella barra}$$

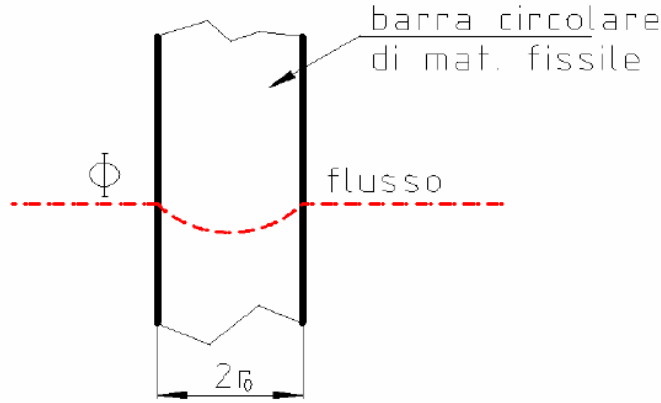


Figura 3.2: Depressione del flusso di neutroni primari di fissione.

La q.tà di neutroni disponibili nella barra *dopo la seconda collisione* è:

$$PP'N\Xi^2 \quad (3.56)$$

La q.tà di neutroni rallentati dopo la soglia di fissione per neutrone primario di fissione, che è uguale a ε , e sommando quelli di collisioni inelastiche e quelli di non-collisioni nella barra è:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (1 - P) + P \frac{\sigma_i}{\sigma_t} + (1 - P') P \Xi + PP' \Xi \frac{\sigma_i}{\sigma_t} + PP' \left(1 - P' + P' \frac{\sigma_i}{\sigma_t} \right) \Xi^2 + \dots = \quad (3.57) \\ &= 1 + P \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_t} - 1 \right) + \frac{P}{P'} \left[1 + P' \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_t} - 1 \right) \right] \sum_{n=1}^{+\infty} (P \Xi)^n \\ &= 1 + P \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_t} - 1 \right) + \frac{P}{P'} \left[1 + P' \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_t} - 1 \right) \right] \left[\frac{1}{1 - P' \Xi} - 1 \right] \end{aligned}$$

Si noti che: $\sigma_t = \sigma_f + \sigma_i + \sigma_e + \sigma_c$ dove σ_c è la sezione d'urto di cattura radiattiva (non - fissione)

$$\varepsilon = 1 + \frac{\left[v - 1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_f} \right] P \frac{\sigma_f}{\sigma_t}}{1 - P' \frac{v \sigma_f + \sigma_e}{\sigma_t}} \quad (3.58)$$

La probabilità che un neutrone nascente in $\mathbf{r}_1$ subisca una collisione nell'elemento di volume $d\mathbf{r}_2$ in $\mathbf{r}_2$ nel combustibile, è

$$\frac{\Sigma_t \exp(-\Sigma_t \cdot |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{4\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} d\mathbf{r}_2 \quad (3.59)$$

dove Σ_t è la sezione d'urto macroscopica del combustibile. Se indichiamo con

$$n(\mathbf{r}_1) = \frac{\text{neutroni prodotti in } \mathbf{r}_1}{\text{cm}^3 \cdot \text{s}} \quad (3.60)$$

allora la probabilità si scrive

$$P = \frac{\Sigma_t \int_{\mathbf{r}_1} \int_{\mathbf{r}_2} \frac{n(\mathbf{r}_1) e^{-\Sigma_t \cdot |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{4\pi \int_{\mathbf{r}_1} n(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1} \quad (3.61)$$

Il valore di P' può essere ottenuto ammettendo che $n(\mathbf{r}_1)$ sia costante. E' interessante notare che dove $P' \sim 1$ una reazione a catena divergente di neutroni veloci sarebbe possibile se

$$v\sigma_f + \sigma_e = \sigma_t \quad (3.62)$$

Sperimentalmente è stato trovato che nell'Uranio si ha $\varepsilon_{\max} \cong 1.2$.

Con i valori espressi in barns (10^{-24} cm^2) e ritenendo $P = P'$

σ_f	σ_i	σ_e	σ_c	σ_t
0.29	2.47	1.5	0.04	4.3

Si ottiene la relazione

$$\varepsilon - 1 = \frac{0.0952 \cdot P}{1 - 0.521 \cdot P} \quad (3.63)$$

Riprendiamo il calcolo del *fattore* f .

$$f = \frac{\text{neutroni assorbiti dal combustibile}}{\text{neutroni assorbiti dal combustibile} + \text{neutroni assorbiti dal moderatore}} \quad (3.64)$$

$$f = \frac{\Sigma_{tU} \Phi_{thU} V_U}{\Sigma_{tU} \Phi_{thU} V_U + \Sigma_{a\text{mod}} \Phi_{th\text{mod}} V_{\text{mod}}} = \frac{1}{1 + \frac{\Sigma_{a\text{mod}}}{\Sigma_{tU}} \frac{V_{\text{mod}}}{V_U} \frac{\Phi_{th\text{mod}}}{\Phi_{thU}}} \quad (3.65)$$

Così il calcolo di f si riconduce al calcolo del rapporto di svantaggio $\frac{\Phi_{th\text{mod}}}{\Phi_{thU}}$ il cui ordine di grandezza è 1.5 (fig. 3.3).

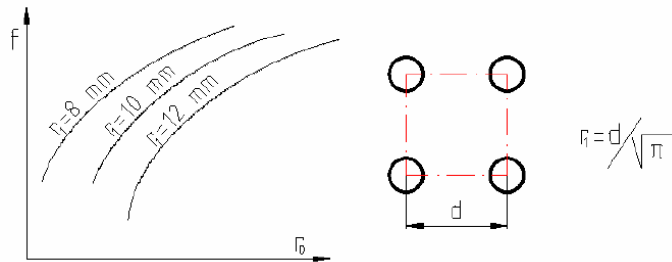


Figura 3.3: Fattore f .

Calcolo di p

$$p = \exp \left[-\frac{\mathcal{I}(s)}{\xi s} \frac{V_U}{V_{\text{mod}}} \frac{\Phi_{rU}}{\Phi_{r\text{mod}}} \right] \quad (3.66)$$

dove $\frac{\Phi_{rU}}{\Phi_{r\text{mod}}} < 1$ flussi di risonanza (fig. 3.4).

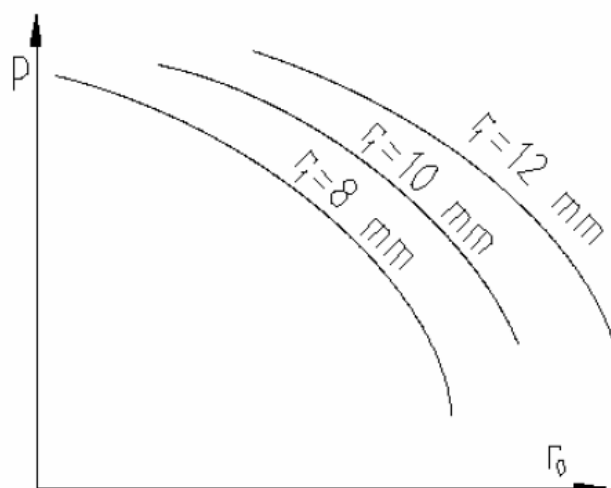


Figura 3.4: Fattore p .

Capitolo 4

Distribuzione di velocità dei neutroni

4.1 Calcolo della distribuzione marginale maxwelliana

Siano u, v, w , le componenti della velocità $\mathbf{c}$ secondo gli assi x, y, z . La probabilità infinitesima $d\pi$ di trovare un neutrone la cui velocità ha componenti comprese tra $[u, u + du], [v, v + dv], [w, w + dw]$ si può esprimere attraverso una densità di probabilità $P(u, v, w)$

$$d\pi = P(u, v, w) du dv dw \quad (4.1)$$

Consideriamo poi il caso in cui la densità di probabilità $P(u, v, w)$ si fattorizza nel prodotto delle *distribuzioni marginali*:

$$P(u, v, w) = f(u) f(v) f(w) \quad (4.2)$$

Supponiamo che $|\mathbf{c}| = |\mathbf{c} + d\mathbf{c}|$. Allora essendo $|c| = \text{costante} = c$ si potrà scrivere

$$c^2 = u^2 + v^2 + w^2 \implies 2cd\mathbf{c} = 2udu + 2v dv + 2w dw = 0$$

La densità di probabilità $P(u, v, w) = \text{costante}$ supponendo che la direzione di $\mathbf{c}$ non abbia alcuna influenza.

$$dP = f'(u) f(v) f(w) du + f(u) f'(v) f(w) dv + f(u) f(v) f'(w) dw = 0 \quad (4.3)$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} \frac{f'(u)}{f(u)} du + \frac{f'(v)}{f(v)} dv + \frac{f'(w)}{f(w)} dw = 0 \\ u du + v dv + w dw = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Possiamo scrivere che i coefficienti dei differenziali sono tra loro proporzionali ad una quantità $2x$

$$\frac{\frac{f'(u)}{f(u)}}{u} \propto \frac{\frac{f'(v)}{f(v)}}{v} \propto \frac{\frac{f'(w)}{f(w)}}{w} \quad (4.5)$$

Integrando si ottiene

$$f(u) = Ae^{xu^2}, \quad f(v) = Be^{xv^2}, \quad f(w) = Ce^{xw^2} \quad (4.6)$$

Applicando le *condizioni di normalizzazione* illustrate in [statistica](#) e ponendo $x = -\frac{1}{\alpha^2}$ si scriverà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{xu^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} du = 1 \quad (4.7)$$

e con analoga applicazione per le variabili v e w

$$A = B = C = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \quad (4.8)$$

e potremo quindi riscrivere la (4.2)

$$P(u, v, w) dudvdw = \frac{1}{\alpha^3\pi^{3/2}} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} dudvdw \quad (4.9)$$

e in coordinate polari

$$P(c, \theta, \varphi) dcd\theta d\varphi = \frac{1}{\alpha^3\pi^{3/2}} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} c^2 \sin\theta dcd\theta d\varphi \quad (4.10)$$

per $0 \leq c < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. La distribuzione maxwelliana $M(c)$ è dunque

$$M(c) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\alpha^3\pi^{3/2}} e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} c^2 \sin\theta = \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}} c^2 e^{-\frac{c^2}{\alpha^2}} \quad (4.11)$$

Il valor medio di c^2 o varianza, è

$$\overline{c^2} = \int_0^{+\infty} c^2 M(c) dc = \frac{3}{2}\alpha^2 \implies \alpha^2 = \frac{2}{3}\overline{c^2} \quad (4.12)$$

Il valor medio dell'energia cinetica è

$$\bar{E} = \frac{1}{2}m\overline{c^2} = \frac{3}{2}KT,$$

dove K è la costante di Boltzmann. Dunque sarà $\alpha^2 = \frac{2KT}{m}$ e la maxwelliana sarà così espressa:

$$M(c) = 4 \left(\frac{m}{2KT} \right) \frac{c^2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{mc^2}{2KT}\right) \quad (4.13)$$

La velocità più probabile è quella per cui $M(c)$ è massima e si ricava dall'equazione $\frac{dM}{dc} = 0$. Si ottiene

$$c_p = \sqrt{\frac{2KT}{m}} \implies E_p = \frac{1}{2}mc_p^2 = KT \quad (4.14)$$

$$\bar{c} = \int_0^{+\infty} c M(c) dc = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}} \implies E(c) = \frac{1}{2}m\bar{c}^2 = \frac{4KT}{\pi} \quad (4.15)$$

Capitolo 5

Reattori termici. Caso reale: reattore di dimensione finite

5.1 Calcolo di K_{eff} . Età di Fermi

Finora abbiamo considerato solo reattori di dimensioni infinite per i quali è stato calcolato il fattore di moltiplicazione K_{∞} . Il K_{eff} relativo a reattori di dimensioni finite sarà ovviamente maggiore di K_{∞} . Si potrà scrivere la relazione

$$K_{eff} = PK_{\infty}, \quad \text{dove } 0 \leq P \leq 1 \quad (5.1)$$

Il significato fisico del fattore P è: probabilità dei neutroni di *non fuggire* quando il reattore ha dimensioni infinite. Il neutrone può fuggire durante il rallentamento e durante la diffusione. Il P pertanto è il risultato di

$$P = P_{rall}P_{diff} = P_rP_d \quad (5.2)$$

In una sezione precedente abbiamo visto che il neutrone percorre

$$\overline{r_r^2} = 6\tau \quad \text{e} \quad \overline{r_d^2} = 6L \implies h^2 = 6\tau + 6L^2 = 6M^2 \quad (5.3)$$

dove M^2 = area di migrazione. Il calcolo di P si può fare solo se si conosce l'andamento del flusso nel reattore. Ricorderemo allora l'equazione di diffusione

$$D \cdot \nabla^2 \Phi_{th}(\mathbf{x}) - \Sigma_a \Phi_{th}(\mathbf{x}) + S = 0 \quad (5.4)$$

Immaginando di trovarci in un reattore termico omogeneo, la sorgente S è distribuita uniformemente, e, poiché il flusso si riferisce a neutroni termici che diffondono, il termine S rappresenta la quantità di neutroni che diventano termici nell'unità di tempo e in ogni cm^3 . Sarà allora $S = q(u, \mathbf{x})$ dove u è la letargia. Il termine S può essere inteso come *densità di rallentamento*.

Ricordiamo che ξ = decremento medio logaritmico indipendente dall'energia, ma dipendente dal numero di massa A del moderatore. Il tempo impiegato da un neutrone per subire lo ξ vale λ_s/v in cui v = velocità.

Fissato un certo valore della letargia u la velocità che il neutrone ha in corrispondenza a tale valore è

$$\frac{\xi}{(\lambda_s/v)} \implies \frac{\xi v}{\lambda_s} \quad (5.5)$$

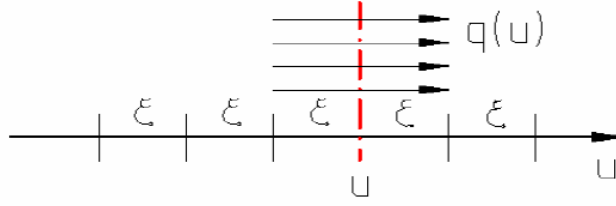


Figura 5.1: Velocità del neutrone e parametro ξ .

La velocità del neutrone a compiere uno ξ è $\frac{du}{dt}$ (fig. 5.1).

Denotando con $n(u)$ la densità neutronica si ha:

$$\frac{\text{q.tà neutroni}}{u^2 \text{ s}} = \frac{\text{q.tà neutroni}}{u^3} \cdot \frac{u}{\text{s}} \quad (5.6)$$

intendendo con u^2 una superficie immaginaria attraversata dal flusso di neutroni. Allora è:

$$q(u) = n(u) \frac{v\xi}{\lambda_s} = \Phi(u) \frac{\xi}{\lambda_s} \quad (5.7)$$

Un analogo risultato s'era già incontrato:

$$F(E) = \frac{1}{\xi E} \implies \Phi(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_s(E) E} \implies \Phi(u) du = -\Phi(E) dE \quad (5.8)$$

Tenendo conto dell'assorbimento neutronico la (5.7) può essere così scritta:

$$q(u) = \Phi(u) \frac{\xi}{\lambda_s(u) + \lambda_a(u)} = \Phi(u) \frac{\xi}{\lambda(u)} \quad (5.9)$$

Osserviamo che

$$q(u) - q(u + du) = -\frac{\partial q}{\partial u} du \quad (5.10)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, u) - \Phi(\mathbf{x}, u + du) = \Phi(\mathbf{x}, u) du \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} D \cdot \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, u) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{x}, u) + q(\mathbf{x}, u) = 0 \\ D \cdot \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, u + du) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{x}, u + du) + q(\mathbf{x}, u + du) = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Sottraendo la seconda dalla prima

$$D \cdot \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, u) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{x}, u) - \frac{\partial q}{\partial u} du = 0 \quad (5.13)$$

in cui, sostituendo la (5.9) si ottiene:

$$D \cdot \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, u) \frac{\lambda(u)}{\xi} - \Sigma_a \Phi(\mathbf{x}, u) \frac{\lambda(u)}{\xi} - \frac{\partial q(\mathbf{x}, u)}{\partial u} du = 0 \quad (5.14)$$

Ricordiamo che

$$D = \frac{\lambda_{tr}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{\Sigma_a}{D} = \frac{1}{L^2} = \frac{3}{\lambda_{tr}(u) \lambda(u)} \quad (5.15)$$

La (5.14) diventa:

$$\nabla^2 q(\mathbf{x}, u) - \frac{3}{\lambda_{tr}(u) \lambda(u)} q(\mathbf{x}, u) - \frac{3\xi}{\lambda_{tr}(u) \lambda(u)} \frac{\partial q(\mathbf{x}, u)}{\partial u} du = 0 \quad (5.16)$$

Per integrare questa equazione introduciamo una funzione $\tau = \tau(u)$ con le dimensioni tale che sia

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{3\xi}{\lambda_{tr}(u) \lambda(u)} \frac{\partial q}{\partial u} \quad (5.17)$$

Allora si ha:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{3\xi}{\lambda_{tr}(u) \lambda(u)} \Rightarrow \frac{d\tau}{du} = \frac{\lambda_{tr}(u) \lambda(u)}{3\xi} \quad (5.18)$$

Segue

$$\tau = \frac{1}{3\xi} \int_0^u \lambda_{tr}(u') \lambda(u') du' \quad (5.19)$$

Tale grandezza si chiama **età di Fermi** e si misura in cm^2 . La (5.16) diventa:

$$\nabla^2 q(\mathbf{x}, \tau) - \frac{3}{\lambda_{tr}(u) \lambda_a(u)} q(\mathbf{x}, \tau) - \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \quad (5.20)$$

nota come **equazione dell'età di Fermi**.

5.1.1 Integrazione dell'equazione di Fermi. Probabilità di fuga alle risonanze

Riscriviamo l'equazione di Fermi (5.20):

$$\nabla^2 q(\mathbf{x}, \tau) - \frac{3}{\lambda_{tr}(u) \lambda_a(u)} q(\mathbf{x}, \tau) - \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \quad (5.21)$$

Se poniamo

$$q(\mathbf{x}, \tau) = q^*(\mathbf{x}, \tau) p(\tau), \quad (5.22)$$

la predetta equazione si riscrive:

$$p(\tau) \nabla^2 q^*(\mathbf{x}, \tau) - q^* \left[\frac{3}{\lambda_{tr} \lambda_a} p(\tau) + \frac{dp}{d\tau} \right] - p(\tau) \frac{\partial q^*}{\partial \tau} = 0 \quad (5.23)$$

Annuliamo il secondo termine:

$$\frac{3}{\lambda_{tr} \lambda_a} p(\tau) + \frac{dp}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{d\tau} = -\frac{3}{\lambda_{tr} \lambda_a} p(\tau) \Rightarrow \frac{dp}{p(\tau)} = \frac{3d\tau}{\lambda_{tr} \lambda_a} \quad (5.24)$$

Integrando

$$p(\tau) = \text{const} \cdot \exp \left(-3 \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\lambda_{tr} \lambda_a} \right) \quad (5.25)$$

Quindi scelto questo $p(\tau)$, l'eq. 5.23 diventa:

$$\nabla^2 q^* - \frac{\partial q^*}{\partial \tau} = 0 \quad (5.26)$$

Ricordando la posizione (5.22) possiamo scrivere:

$$q = q^* \exp \left(-3 \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\lambda_{tr} \lambda_a} \right) \quad (5.27)$$

Se $\lambda_a = 0$ è $q = q^*$; dunque q^* è la densità di rallentamento in assenza di assorbimento. Vediamo ora cosa fisicamente rappresenta $p(\tau)$. Si ha:

$$d\tau = \frac{1}{3\xi} \lambda_{tr}(u) \lambda_a(u) du \quad (5.28)$$

che sostituito nella (5.25) restituisce:

$$p(\tau) \equiv p(u) = \text{const} \cdot \exp \left(-\frac{1}{\xi} \int_0^u \frac{du'}{\Sigma_a + \Sigma_s} \right) \quad (5.29)$$

dove Σ_a si riferisce all'uranio e Σ_s al moderatore. Allora $p(\tau)$ rappresenta la *probabilità di fuga alle risonanze*. Vediamo come si integra l'equazione (5.26). Procediamo per separazione di variabili, i.e. ricerchiamo soluzioni del tipo:

$$q^*(\mathbf{x}, \tau) = Q(\mathbf{x}) \Theta(\tau) \quad (5.30)$$

Segue

$$\nabla^2 [Q(\mathbf{x}) \Theta(\tau)] = Q(\mathbf{x}) \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} \implies \frac{\nabla^2 Q(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})} = \frac{1}{\Theta(\tau)} \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} \quad (5.31)$$

Due funzioni uguali di diversa variabile non possono che essere delle costanti. Poniamo allora

$$\frac{\nabla^2 Q(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})} = -B^2, \quad \frac{1}{\Theta(\tau)} \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} = -B^2 \quad (5.32)$$

Integrando la seconda:

$$\Theta(\tau) = \text{const} \cdot e^{-B^2 \tau} \quad (5.33)$$

e dunque scriveremo

$$q^*(\mathbf{x}, \tau) = Q(\mathbf{x}) \cdot e^{-B^2 \tau} \quad (5.34)$$

Quando $\tau = 0$ è anche $u = 0$ cioè $E = E_0$. Quindi $q^*(\mathbf{x}, 0) = Q(\mathbf{x})$ e rappresenta la sorgente di neutroni veloci per i quali appunto la $u = 0$. È chiaro che $p(0) = 1$ e allora avremo:

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{\text{q.tà neutroni veloci prodotti}}{\text{cm}^3 \text{ s}} = \varepsilon \eta \Sigma_a \Phi_{th} = \frac{K}{p} \Sigma_a \Phi_{th} \quad (5.35)$$

dove

$$\Sigma_a = \Sigma_{Uranio} + \Sigma_{mod} + \Sigma_{parassite} \quad (5.36)$$

La prima delle (5.32), in cui si sostituisce a $Q(\mathbf{x})$ il valore della (5.35), diventa:

$$\nabla^2 \Phi_{th} + B^2 \Phi_{th} = 0 \quad (5.37)$$

Dunque vediamo che in un reattore nucleare il flusso termico, in funzione di coordinate spaziali, è assai simile all'equazione di diffusione senza il termine di sorgente, cioè:

$$D \cdot \nabla^2 \Phi - \Sigma_a \Phi = 0 \implies \nabla^2 \Phi - K^2 \Phi = 0 \quad (5.38)$$

Ricordiamo ancora che è $q = q^*p(\tau)$, per cui

$$q(\mathbf{x}, \tau) = p(\tau) Q(\mathbf{x}) e^{-B^2\tau} \quad (5.39)$$

Se poniamo $\tau = \tau_{th}$ corrispondente a $u_{th} = \ln \frac{E_0}{E}$ è chiaro il significato fisico dei termini

$$\left\{ \begin{array}{l} p(\tau_{th}) = \text{probabilità di fuga alle risonanze, come già visto} \\ Q(\mathbf{x}) = \text{sorgente di neutroni / cm}^3 \text{ s a letargia nulla} \\ \exp(-B^2\tau_{th}) = \text{probabilità di } \textit{non fuggire} \text{ durante il rallentamento} \\ \quad \text{e quindi probabilità di pervenire all'età termica } \tau_{th} \\ q(\mathbf{x}, \tau) = \text{q.tà di neutroni / cm}^3 \text{ che pervengono all'età termica } \tau_{th} \end{array} \right.$$

Risolviamo l'equazione (5.37) immaginando che le condizioni al contorno siano l'annullamento del flusso sulla superficie di un parallelepipedo di lati a, b, c .

$$\nabla^2 \Phi_{th}(x, y, z) + B^2 \Phi_{th}(x, y, z) = 0 \quad (5.40)$$

Condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \Phi_{th}(\pm \frac{a}{2}, y, z) + B^2 \Phi_{th}(\pm \frac{a}{2}, y, z) = 0 \\ \nabla^2 \Phi_{th}(x, \pm \frac{b}{2}, z) + B^2 \Phi_{th}(x, \pm \frac{b}{2}, z) = 0 \\ \nabla^2 \Phi_{th}(x, y, \pm \frac{c}{2}) + B^2 \Phi_{th}(x, y, \pm \frac{c}{2}) = 0 \end{array} \right. \quad (5.41)$$

Anche in questo procediamo per separazione di variabili, ovvero ricerchiamo soluzioni che si fattorizzano nel prodotto di tre funzioni:

$$\Phi_{th}(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (5.42)$$

Si può scrivere allora

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Y Z + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} Z X + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} X Y + B^2 X Y Z = 0 \quad (5.43)$$

Dal momento che stiamo cercando soluzioni non banali ($XYZ \neq 0$):

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + B^2 = 0 \quad (5.44)$$

Poniamo

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\alpha^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\chi^2 \quad (5.45)$$

Cioè

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \alpha^2 X = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \beta^2 Y = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \chi^2 Z = 0 \quad (5.46)$$

L'integrale generale della prima è:

$$X(x) = K_1 e^{i\alpha x} + K_2 e^{-i\alpha x} \quad (5.47)$$

Per α reale o α complesso si hanno rispettivamente

$$X(x) = A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x), \quad X(x) = B_1 \cosh(\alpha x) + B_2 \sinh(\alpha x) \quad (5.48)$$

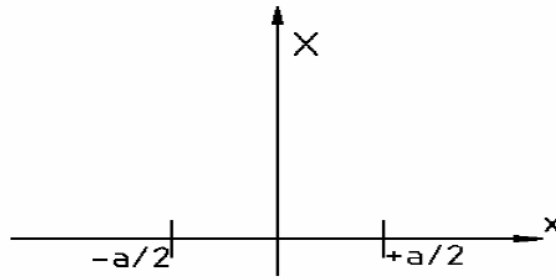


Figura 5.2: Il flusso si annulla nei punti $\pm a/2$.

Il flusso è una funzione pari, e dunque non possono figurare le funzioni dispari. Perciò $A_2 = \overline{A_2} = 0$. Dovendo poi il flusso annullarsi nei punti $-a/2$ e $a/2$ dovrà essere $\overline{A_1} = 0$ (fig. 5.2). Infatti:

$$\overline{A_1} \cosh(\alpha x)|_{x=\frac{a}{2}} = \overline{A_1} \frac{e^{\alpha \frac{a}{2}} + e^{-\alpha \frac{a}{2}}}{2} \quad (5.49)$$

e non potendo essere nullo il numeratore sarà $\overline{A_1} = 0$.

Allora il flusso diventa

$$X(x) = A_1 \cos(\alpha x), \quad Y(y) = B_1 \cos(\beta y), \quad Z(z) = C_1 \cos(\chi z) \quad (5.50)$$

Dovendo poi essere

$$X\left(\pm \frac{a}{2}\right) = Y\left(\pm \frac{b}{2}\right) = Z\left(\pm \frac{c}{2}\right) = 0 \quad (5.51)$$

I valori di α, β, χ saranno

$$\alpha = l \frac{\pi}{a}, \quad \beta = m \frac{\pi}{b}, \quad \chi = n \frac{\pi}{c}, \quad \text{con } l, m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.52)$$

Potremo scrivere allora:

$$\Phi_{th}(x, y, z) = \sum_{l, m, n} A_{lmn} \cos\left(l \frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(m \frac{\pi}{b} y\right) \cos\left(n \frac{\pi}{c} z\right) \quad (5.53)$$

Essendo $B^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \chi^2$ somma di tre numeri reali è un numero reale. Più in generale si scriverà

$$B_{lmn} = \alpha_l^2 + \beta_m^2 + \chi_n^2 \quad (5.54)$$

Poniamo:

$$B_g^2 = B_{111} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \quad (5.55)$$

legato alle dimensioni fisiche del reattore. Esempio: il parallelepipedo preso in esame per le condizioni al contorno sia un cubo. Allora:

$$B_g^2 = B_{111} = 3\pi^2 \frac{1}{a^2} \implies B_g = \frac{\pi}{a} \sqrt{3} \quad (5.56)$$

e quindi il volume

$$V = a^3 = \left(\frac{\pi}{B_g} \sqrt{3} \right)^3 = \frac{161}{B_g^3} \quad (5.57)$$

5.1.2 Equazione critica di un reattore omogeneo e spoglio

Si proietti il $\Phi_{111}(x, y, z)$ su un piano tale che sia:

$$\Phi(x) = A \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (5.58)$$

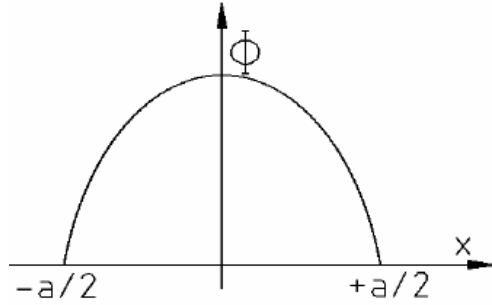


Figura 5.3: Grafico della funzione (5.58).

Per avere un'idea di quanto piatto sia il flusso è utile il rapporto tra il flusso massimo e il flusso medio, cioè

$$\frac{\Phi_{\max}(x)}{\overline{\Phi(x)}} \Rightarrow \Phi_{\max}(x) = A \quad (5.59)$$

Calcoliamo il flusso medio:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(x)} &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} A \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = \frac{A}{a} \frac{1}{\frac{\pi}{a}} \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) d\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\ &= \frac{A}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right]_{x=-a/2}^{x=a/2} = \frac{A}{\pi} 2 \sin\left(\frac{\pi}{a} \frac{a}{2}\right) = \frac{2A}{\pi} \end{aligned} \quad (5.60)$$

e così per

$$\overline{\Phi(y)} = \overline{\Phi(z)} = \frac{2A}{\pi} \quad (5.61)$$

Dunque

$$\frac{\Phi_{\max}(x)}{\overline{\Phi(x)}} = \frac{\Phi_{\max}(y)}{\overline{\Phi(y)}} = \frac{\Phi_{\max}(z)}{\overline{\Phi(z)}} = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\frac{\text{flusso max}}{\text{flusso medio}} = \frac{\pi}{2} \quad (5.62)$$

La probabilità di *non fuggire* durante il rallentamento è $P_{rall} = \exp(-B_g^2 \tau)$. Calcoliamo ora la probabilità di *non fuggire* durante la diffusione.

$$D \cdot \nabla^2 \Phi_{th} - \Sigma_a \Phi_{th} - q(x, \tau_{th}) = 0$$

dei tre termini vediamo il significato fisico

$$\begin{cases} D \cdot \nabla^2 \Phi_{th} = n_u = \text{neutroni che sfuggono/cm}^3 \text{ s} \\ \Sigma_a \Phi_{th} = n_a = \text{neutroni che sono assorbiti/cm}^3 \text{ s} \\ q(x, \tau_{th}) = n_a - n_u = \text{neutroni che nascono/cm}^3 \text{ s} \end{cases}$$

Segue

$$-\frac{n_u}{n_a} = -\frac{\nabla^2 \Phi_{th}}{\Phi_{th}} L^2 = B^2 L^2 \quad (5.63)$$

In regime stazionario il rapporto (5.63) è indipendente da x . La q.tà di neutroni che viene prodotta ogni secondo è

$$N = N_a + N_u = n_a V + n_u V, \quad (5.64)$$

essendo V il volume. Allora la P_{diff} è

$$P_{diff} = \frac{N_a}{N} = \frac{N_a}{N_a - N_u} = \frac{1}{1 + B^2 L^2} = \frac{1}{1 + B_g^2 L^2} \quad (5.65)$$

e finalmente scriveremo

$$K_{eff} = K_\infty \frac{1}{1 + B_g^2 L^2} \exp(-B_g^2 \tau) \quad (5.66)$$

Ignoriamo per ora il significato di B_g^2 ; esaminiamo solo

$$K_{eff} = K_\infty \frac{1}{1 + B^2 L^2} \exp(-B^2 \tau) = 1 \quad (5.67)$$

Ne segue che la relazione seguente

$$K_\infty e^{-B^2 \tau} = 1 + B^2 L^2 \quad (5.68)$$

è l'equazione critica di un reattore omogeneo e spoglio.

5.1.3 Buckling di un reattore

E' stato trovato conveniente distinguere due specie di *buckling*: quello materiale e quello geometrico. Il buckling materiale B_m^2 è quel valore che soddisfa l'equazione

$$K_\infty e^{-B_m^2 \tau} = 1 + B_m^2 L^2 \quad (5.69)$$

cosicché nel reattore critico la distribuzione spaziale del flusso è governata dall'equazione d'onda:

$$\nabla^2 \Phi + B_m^2 \Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.70)$$

Si vede dunque che il B_m^2 dipende da K_∞ , τ^2 e L^2 i quali sono determinati dal materiale e composizione del mezzo moderatore. Il buckling geometrico. Il buckling geometrico B_g^2 entra nell'equazione d'onda

$$\nabla^2 \Phi + B_g^2 \Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.71)$$

con la condizione $\Phi(0) = 0$. La distinzione tra i due buckling apparirà dallo esame delle due equazioni d'onda (5.70)-(5.71). L'equazione (5.71) non rappresenta in generale la distribuzione del flusso con un singolo valore di B_g^2 . Se il sistema *non è critico*, il flusso termico è ottenuto dalla somma

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{lmn} A_{lmn} \cos\left(\frac{l\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{c}\right) \quad (5.72)$$

cui corrisponde B_{lmn} . Se il sistema è *critico*, il flusso termico si limita solo al primo termine della somma. Allora la (5.71) si può riscrivere con $B_g^2 = B_{111}$. Si ha dunque: $B_g^2 = B_m^2$. In

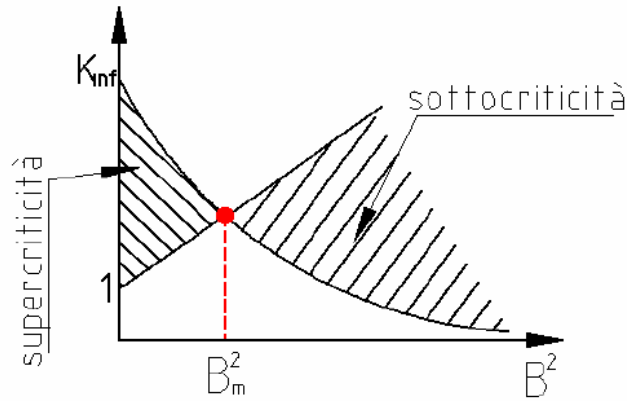


Figura 5.4: Grafico della funzione (5.58).

altre parole il B_g^2 del sistema critico di una specifica forma è uguale al B_m^2 per il dato mezzo moltiplicante.

Si è visto che il B_g^2 è inversamente proporzionale alle dimensioni del sistema. Quindi se $B_g^2 < B_m^2$ il reattore sarà più grande della dimensione critica e il sistema sarà supercritico. Viceversa se $B_g^2 > B_m^2$ (ved. fig. 5.4).

In conclusione fissate le dimensioni, restano determinate di conseguenza le caratteristiche del combustibile e del moderatore; e viceversa.

5.2 Avviamento di un reattore

Vediamo ora l'avviamento di un reattore termico, spoglio, dal suo innesco alla sua criticità $K = 1$.

$$D \cdot \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) + q(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (5.73)$$

dove q è il termine di sorgente:

$$q(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) = p(\tau_{th}) q^*(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) \quad (5.74)$$

essendo $q^*(\mathbf{r}, \tau_{th}, t)$ soluzione di

$$\nabla^2 q^*(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) - \frac{\partial q^*}{\partial \tau} = 0 \implies q^*(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) = Q(\mathbf{r}, t) e^{-B^2 \tau} \quad (5.75)$$

e per $Q(\mathbf{r}, t)$ s'era trovato

$$Q(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \eta f \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{K_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (5.76)$$

All'età di Fermi $\tau = 0$ scriveremo:

$$q^*(\mathbf{r}, \tau_{th} = 0, t) = \frac{K_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}) \quad (5.77)$$

dove $S(\mathbf{r})$ è la sorgente esterna necessaria per l'innesco.

Risolviamo la (5.75), ricercando soluzioni fattorizzate:

$$q^*(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) = R(\mathbf{r}) \Theta(\tau) T(t) \quad (5.78)$$

Cioè

$$\nabla^2 R(\mathbf{r}) \Theta(\tau) T(t) = \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} R(\mathbf{r}) T(t) \quad (5.79)$$

Ne segue

$$\frac{\nabla^2 R(\mathbf{r})}{R(\mathbf{r})} = \frac{1}{\Theta(\tau)} \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} \implies \frac{\nabla^2 R(\mathbf{r})}{R(\mathbf{r})} = \frac{1}{\Theta(\tau)} \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} = -B^2 \quad (5.80)$$

Integrando si ricava

$$\Theta(\tau) = e^{-B^2 \tau} \quad (5.81)$$

Supponiamo di avere una sorgente piana infinita in un reattore di spessore a , dove il range della variabile x è $-a/2 \leq x \leq +a/2$. Allora scriveremo:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + B^2 X = 0, \quad (5.82)$$

la cui soluzione generale, come già visto, è

$$X(x) = C_1 e^{iBx} + C_2 e^{-iBx} \quad (5.83)$$

In un numero precedente abbiamo visto che possiamo scrivere per la X le seguenti autofunzioni:

$$X_n = A_n \cos B_n x \quad (5.84)$$

corrispondenti agli autovalori

$$B_n = \frac{n\pi}{a} \quad (5.85)$$

Perciò la (5.78) diventa:

$$q^*(x, \tau, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-B_n^2 \tau} T(t) \quad (5.86)$$

Chiameremo impulso di ampiezza S una funzione $S\delta(x)$ tale che sia $S\delta(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S\delta(x) dx = S \quad (5.87)$$

Ricordiamo la trasformata di Fourier di $\delta(x)$:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx \quad (5.88)$$

In generale è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

e dunque

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = (e^{-i\omega x})_{x=0} = 1 \quad (5.89)$$

Una funzione del tempo t può così essere espressa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.90)$$

Ne deriva che

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega x) d\omega \quad (5.91)$$

giacché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega x) d\omega = 0 \quad (5.92)$$

Sostituendo l'integrale con una sommatoria:

$$S\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (5.93)$$

Ricordando la (5.77) scriviamo

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{p}{K_{\infty}\Sigma_a} [q^*(\mathbf{r}, \tau = 0, t) - S(\mathbf{r})] \quad (5.94)$$

Sostituendo qui la (5.86) troviamo:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{p}{K_{\infty}\Sigma_a} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} A_n T_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \quad (5.95)$$

che sostituito nell'equazione di diffusione dà:

$$-\frac{p}{K_{\infty}} \left(\frac{DB_n^2}{\Sigma_a} + 1 \right) [AT_n(t) - S_n] + pA_n e^{-B_n^2 \tau_{th}} T_n(t) = \frac{1}{v} \frac{p}{K_{\infty}\Sigma_a} A_n \frac{dT_n(t)}{dt} \quad (5.96)$$

Ricordando che $L^2 = D/\Sigma_a$ e chiamando con $l_0 = (v\Sigma_a)^{-1}$ la vita media di un neutrone, in un mezzo infinito, si ha

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{K_n - 1}{l_n} T_n(t) + \frac{S_n}{l_n A_n} \quad (5.97)$$

dove

$$K_n \stackrel{def}{=} \frac{K_{\infty} e^{-B_n^2 \tau_{th}}}{1 + L^2 B_n^2}, \quad l_n = \frac{l_0}{1 + L^2 B_n^2} \quad (5.98)$$

Risolvendo l'equazione differenziale (5.97) si trova:

$$T_n(t) = \exp\left(\frac{K_n - 1}{l_n} t\right) + \frac{S_n}{A_n(1 - K_n)} \quad (5.99)$$

che sostituito in (5.95) dà

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{p}{K_{\infty}\Sigma_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \exp\left(\frac{K_n - 1}{l_n} t\right) + \frac{K_{\infty} e^{-B_n^2 \tau_{th}}}{1 + L^2 B_n^2} \frac{S_n}{A_n(1 - K_n)} \right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (5.100)$$

Il primo termine in parentesi rappresenta il contributo del sistema moderatore-combustibile. Il secondo termine con S_n rappresenta il contributo delle sorgenti esterne. Il buckling B^2 è $B_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ con $n = 1, 3, 5, \dots$. Dunque ricordando il valore di K_n (5.98) si può scrivere la successione $K_1 > K_3 > K_5 > \dots$ corrispondente a $B_n < B_{n+3} < B_{n+5} < \dots$

Immaginiamo che sia $K_1 < 1$, ossia fissata la dimensione a del reattore B_1 è tale che $K_1 < 1$. Allora

$$\exp\left(\frac{K_n - 1}{l_n}t\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{per ogni } n \quad (5.101)$$

Quando a è tale per cui $K_1 = 1$ (a è dimensione critica) allora

$$A_1 \exp\left(\frac{K_1 - 1}{l_n}t\right) = A_1 \quad \text{e} \quad \frac{S_n}{A_n(1 - K_n)} = \infty$$

quindi si ha $S_1 = 0$ ossia non ci sono sorgenti. Il flusso allora è

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi(x, t) = \frac{p}{K_\infty \Sigma_a} A_1 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (5.102)$$

Un reattore è critico quando la distribuzione del flusso neutronico non dipende dal tempo t , cioè si è in regime stazionario.

L'esperienza con cui, date ad esempio le dimensioni del reattore, si vuole pervenire alla conoscenza della massa critica di materiale fissile è la seguente.

Nel caso in cui manca, per esempio, U^{235} il $K_n = 0$ e dunque il flusso Φ è proporzionale alla sorgente S_n . Si immette quindi U^{235} e si misura il flusso Φ proporzionale a $\frac{S}{1 - K_1}$ con $K_1 = K_{eff}$. Così facendo si trovano diversi punti del diagramma di fig. 5.5.

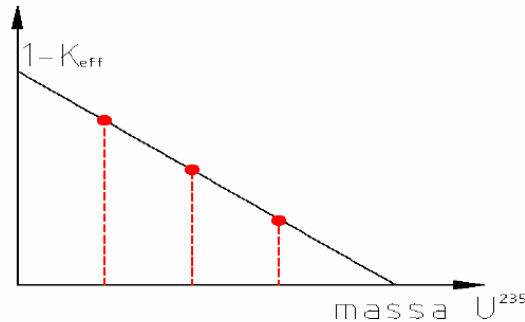


Figura 5.5: Determinazione della massa critica di U^{235} .

Quando $1 - K_{eff} = 0$ si ha la massa critica di U^{235} . Analoga esperienza si può fare ponendo $1 - K_{eff}$ in funzione delle dimensioni. Riassumiamo le equazioni cui siamo pervenuti.

$$\Phi(x) = \frac{p}{K_\infty \Sigma_a} A_1 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad q^*(x, \tau) = A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-B_n \tau_{th}} = \frac{K}{p} \Sigma_a \Phi(x) e^{-B_n \tau_{th}}$$

Riassumiamo alcune misure relative ad un reattore spoglio di forma cubica.

fuel	moderatore	refrigerante	B_g^2 [m^{-2}]	lato a [m]
U_{nat}	C	aria	0.56	7.25
U_{nat}	D ₂ O	D ₂ O	3.50	2.90
U arricchito	C	Na	5.60	2.30
U arricchito +	H ₂ O	H ₂ O	14	1.45
U arricchito ++	H ₂ O	H ₂ O	160	0.43
U arricchito +++	—	Na	350	0.29

5.3 Potenza sviluppata da un reattore

Sappiamo che ogni fissione nucleare è in grado di fornire mediamente una energia pari a 200 MeV. Siano:

n_0 = densità del numero di atomi di U^{235} ;

w_0 = energia per ogni fissione $\Rightarrow w_0 = 200 \text{ MeV} = 3.2 \cdot 10^{-11} \text{ J/fissione}$

σ_f = sezione d'urto di fissione $\Rightarrow \sigma_f = 549 \text{ barn} = 549 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$

M = massa di uranio. Ad esempio $M = 5 \text{ kg}$

$\bar{\Phi}$ = flusso neutronico medio $\Rightarrow \bar{\Phi} = 10^{13} \text{ neutroni/cm}^2 \text{ s}$

V = volume disponibile (in cm^3).

La potenza che si svilupperà sarà data da

$$W = n_0 \sigma_f w_0 \int_V \Phi(\mathbf{x}) dV = n_0 \sigma_f w_0 \bar{\Phi} V \quad (5.103)$$

La massa M è:

$$M = n_0 V \frac{A = 235 \text{ g/mol}}{N_{Av} = 6.023 \cdot 10^{23} \text{ atomi/mol}} \quad (5.104)$$

Introducendo i dati numerici, si ottiene:

$$W = \sigma_f w_0 \frac{N_{Av}}{A} M \bar{\Phi} = 4.5 \cdot 10^{-11} M \bar{\Phi} \quad (5.105)$$

Per una massa di 5000 g di U^{235} e $\bar{\Phi} = 10^{13} \text{ neutroni/cm}^2 \text{ s}$, si ha:

$$W = 4.5 \cdot 10^{-11} \cdot 5000 \cdot 10^{13} = 2.25 \text{ MW} \quad (5.106)$$

5.4 Reattori con riflettori

5.4.1 Introduzione

La massa critica di un reattore può essere diminuita circondando il core con materiale adatto alla dispersione (*scattering*) come il C, DO_2 , Be, il quale agisce come un riflettore, rimandando nel core i neutroni che altrimenti sarebbero andati perduti. Si intuisce pertanto che la riflessione, oltre alle perdite, riduce anche le dimensioni critiche del reattore. Ne consegue che, a parità di combustibile, la potenza media del reattore viene aumentata. Come già visto la potenza è proporzionale al flusso neutronico medio nel core. Il confronto tra il flusso di reattore spoglio e quello di reattore con riflettori è illustrato in fig. 5.6.

Con il riflettore il rapporto $\Phi/\Phi_{\max}$ aumenta e dunque aumenta anche la potenza disponibile. Le proprietà richieste da un riflettore si possono ottenere dalle seguenti considerazioni.

La probabilità che un neutrone ha di tornare nel core, partendo dal riflettore, è tanto maggiore quanto minore è il percorso medio che il neutrone compie entro il riflettore stesso. Ciò è in relazione con il cammino libero medio di dispersione e quindi con il coefficiente di diffusione. Più corto è il cammino libero medio di dispersione e più vicino al core un neutrone subirà la sua prima collisione. Ci sono allora due modi per accrescere la probabilità che un neutrone ritorni nel core.

Il primo. Assumendo approssimativamente la dispersione isotropa, la probabilità che un neutrone, dopo la sua prima collisione, sia disperso in una direzione tale che esso sia diretto verso il core, è proporzionale all'angolo solido sotteso dal core al punto in cui c'è stata la

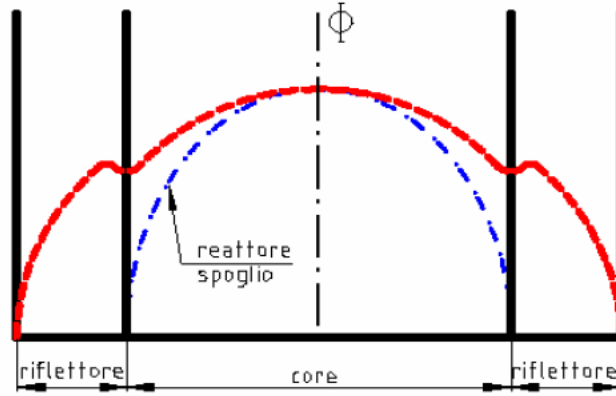


Figura 5.6: Confronto tra un reattore spoglio e un reattore con riflettori.

collisione. Più corto è il cammino libero medio di dispersione più grande sarà questo angolo solido, e dunque maggiore sarà la probabilità che un neutrone torni nel core.

Il secondo. La probabilità che un neutrone sia assorbito nell'intervallo $x \dots x + dx$ è $\Sigma_a dx$. Quindi la probabilità che un neutrone sia assorbito nel riflettore prima di tornare nel core è per unità di lunghezza.

Si è visto comunque che tanto più breve è il percorso di ritorno nel core tanto più piccola è la proporzione di neutroni assorbiti nel riflettore.

5.4.2 Gruppi di diffusione

La presenza di un riflettore cambia considerevolmente lo spettro di energia neutronica nelle vicinanze del confine core-riflettore rispetto a quello, quasi uniforme, di un reattore spoglio.

Un modo di semplificare l'analisi del rallentamento dei neutroni è suddividere in gruppi di energia l'intervallo da 2 MeV a 0,025 eV. Inizieremo però considerando che tutti i neutroni siano isoenergetici. In tal caso allora

$$K_\infty = \eta f \quad (5.107)$$

perché $p = 1$ e $\varepsilon = 1$. L'equazione di diffusione (pedice c = core e pedice r = riflettore) per il core è:

$$D_c \nabla^2 \Phi_c - \Sigma_a \Phi_c + k \Sigma_a \Phi_c = 0 \quad (5.108)$$

dove $k \Sigma_a \Phi_c$ è il termine di sorgente e

$$k = \frac{\text{neutroni prodotti}}{\text{neutroni assorbiti}}$$

Segue

$$\nabla^2 \Phi_c + (k - 1) \frac{\Sigma_a}{D_c} \Phi_c = 0 \implies \nabla^2 \Phi_c + B_c^2 \Phi_c = 0 \quad (5.109)$$

essendo

$$B_c^2 = (k - 1) \frac{\Sigma_a}{D_c} \quad (5.110)$$

il buckling critico, ovvero

$$B_c^2 = \frac{k - 1}{L_c^2} \quad (5.111)$$

in cui L_c è la lunghezza di diffusione nel core. L'espressione più generale del buckling critico è:

$$B_c^2 = \frac{k - 1}{M_c^2} \quad (5.112)$$

con

$$M_c^2 = L_c^2 + \tau$$

e $\tau = 0$ per neutroni isoenergetici. Assunto il riflettore non moltiplicante si ha e posto $L_r =$ lunghezza di diffusione nel core

$$D_r \nabla^2 \Phi_r - \Sigma_{a_r} \Phi_r = 0 \implies \nabla^2 \Phi_r - k_r^2 \Phi_r = 0 \quad \text{con } k_r = \frac{1}{L_r^2} = \frac{\Sigma_{a_r}}{D_r} \quad (5.113)$$

Supponiamo di ricondurci a geometrie unidimensionali. Ripetiamo l'equazione del flusso $\Phi_c(x)$

$$\Phi_c(x) = A \cos B_c x + C \sin B_c x \quad (5.114)$$

Poiché il flusso è simmetrico sarà $C = 0$. Quindi

$$\begin{cases} \Phi_c(x) = A \cos B_c x \\ \Phi_r(x) = A_1 \cosh k_r x + C_1 \sinh k_r x \end{cases}$$

le condizioni al contorno sono (fig. 5.7):

$$\Phi_r \left(\frac{H}{2} + T \right) = 0, \quad \Phi_r \left(\frac{H}{2} \right) = \Phi_c \left(\frac{H}{2} \right), \quad D_c \left(\frac{d\Phi_c}{dx} \right)_{H/2} = D_r \left(\frac{d\Phi_r}{dx} \right)_{H/2} \quad (5.115)$$

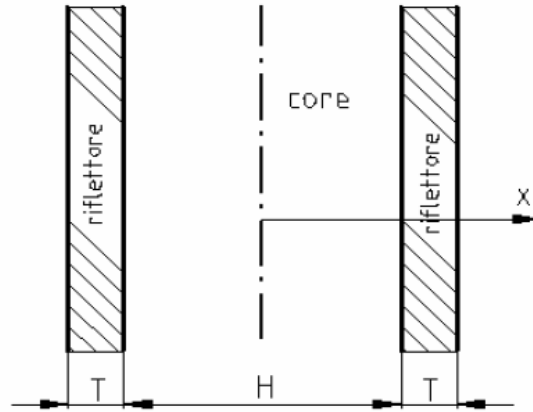


Figura 5.7: Caso unidimensionale.

Mediante la prima delle (5.115) si perviene a

$$\Phi_r(x) = C \sinh k_r \left(\frac{H}{2} + T - x \right) \quad (5.116)$$

dove C è una nuova costante arbitraria, e sfruttando le altre due si ha

$$D_c B_c \tan B_c \frac{H}{2} = D_r k_r \coth k_r T \quad (5.117)$$

Questa equazione trascendente è l'equazione critica per un reattore piano, infinito, con riflettore e per il gruppo neutronico isoenergetico (un solo valore d'energia). Poiché D_c , B_c , D_r , k_r possono essere noti dalle proprietà del combustibile, del riflettore e del moderatore la (5.117) fornisce la dimensione critica H per un spessore T del riflettore. Per $T = 0$ si ha:

$$\coth 0 = \infty \xRightarrow{\text{eq. (5.117)}} \tan B_c \frac{H}{2} = \infty \Rightarrow B_c \frac{H}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow H = \frac{\pi}{B_c}$$

5.4.3 Guadagno da riflettore (reflector saving)

Indichiamo con δ la riduzione della dimensione critica del reattore:

$$\delta = \frac{1}{2}H_0 - \frac{1}{2}H \text{ guadagno da riflettore} \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2B_c} - \frac{H}{2} \Rightarrow \frac{H}{2} = \frac{\pi}{2B_c} - \delta$$

e l'equazione critica (5.117) diventa:

$$D_c B_c \tan B_c \left(\frac{\pi}{2B_c} - \delta \right) = D_r k_r \coth k_r T \quad (5.118)$$

oppure

$$D_c B_c \cot B_c \delta = D_r k_r \coth k_r T \quad (5.119)$$

e dopo aver invertito

$$\tan B_c \delta = \frac{D_c B_c}{D_r k_r} \tanh k_r T \quad (5.120)$$

Ricaviamo δ

$$\delta = \frac{1}{B_c} \left[\arctan \left(\frac{D_c B_c}{D_r k_r} \tanh k_r T \right) \right] \text{ per un reattore a lastra} \quad (5.121)$$

Se lo spessore T è piccolo, così che δ è piccolo, ovvero che il core del reattore H è grande, così che il B_c è piccolo, sarà piccola la quantità $B_c \delta$, così che $\tan B_c \delta \simeq B_c \delta$ e quindi:

$$\delta \simeq \frac{D_c}{D_r} L_r \tanh \frac{T}{L_r} \quad (5.122)$$

Nel caso in cui fosse $D_c = D_r$ – per esempio moderatore e riflettore dello stesso materiale e la proporzione di combustibile nel core non fosse elevata – allora la (5.122) si riduce a

$$\delta \simeq L_r \tanh \frac{T}{L_r} \quad (5.123)$$

Se la lunghezza di diffusione L_r è considerevolmente maggiore dello spessore T , così che T/L_r è piccolo, si ha:

$$\delta \simeq \frac{D_c}{D_r} T \quad \text{oppure} \quad \delta \simeq T \text{ per } D_c = D_r \quad (5.124)$$

Nel limite opposto

$$\frac{T}{L_r} \rightarrow +\infty \Rightarrow \tanh \frac{T}{L_r} \rightarrow 1 \quad (5.125)$$

e quindi

$$\delta \simeq \frac{D_c}{D_r} L_r \quad \text{oppure} \quad \delta \simeq L_r \text{ per } D_c = D_r \quad (5.126)$$

Ricordiamo che

$$\frac{L_r}{D_r} = \sqrt{\frac{\lambda_{tr}^r \lambda_a^r}{3}} \cdot \frac{3}{v \lambda_{tr}^r} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{3 \lambda_a^r}{\lambda_{tr}^r}} \quad (5.127)$$

dove v è la velocità dei neutroni.

	H ₂ O	D ₂ O	C	BeO
λ_{tr}^r (cm)	0.426	2.40	2.71	1.65
Σ_a (cm ⁻¹)	0.021	$8.6 \cdot 10^{-5}$	$3.62 \cdot 10^{-4}$	$6.21 \cdot 10^{-4}$
$10^4 \cdot \lambda_{tr} / \lambda_a$	94	2.05	9.8	10.4
L	2.88	100	50	3
D	314	1760	2000	1210

5.4.4 Teoria dei due gruppi di neutroni: veloci e lenti (termici)

I calcoli fin qui ottenuti su un solo gruppo di neutroni – gruppo ad una sola velocità o isoenergetico – sono approssimati perché le proprietà del materiale nel core sono molto differenti per i neutroni veloci e per i neutroni lenti. Effettivamente i guadagni da riflettore ricavati si riscontrano essere troppo bassi; vediamone le ragioni.

In primo luogo la causa risiede nella assunzione di trattare tutti i neutroni della stessa velocità, cioè isotermici; si è pertanto ignorato il fatto che neutroni veloci entranti nel riflettore hanno probabilità maggiore dei neutroni termici di essere dispersi entro il core proprio per le extra-collisioni che essi subiscono nella fase di rallentamento. Inoltre i neutroni, che entrano nel riflettore con energie sopra il livello di risonanza, sono moderati nel riflettore; questi allora possono ritornare nel core come neutroni termici, avendo completamente evitato la cattura per risonanza alla quale sarebbero stati sottoposti se fossero pervenuti a energie termiche nel core prima di entrare nel riflettore. Entrambi questi fattori tendono a crescere l'efficacia del riflettore. Conseguentemente, se allarghiamo il range di energia, cioè dalla fissione a quella termica, si hanno valori più alti del guadagno da riflettore. In secondo luogo l'approssimazione sta proprio nel supporre che i neutroni possano essere divisi in due gruppi: lenti e veloci.

Consideriamo, prima, il core di un reattore, in cui non ci sono catture di risonanza. Nella trattazione seguente si assumeranno l'indice 1 e 2 rispettivamente per i neutroni veloci e lenti.

Il range di energia per i neutroni veloci è $E_0, \dots, E_{th}$; fuori di tale range i neutroni sono lenti.

La quantità di neutroni veloci prodotta da fissione è $k \Sigma_{2c} \Phi_{2c}$ dove Σ_{2c} è la sezione d'urto macroscopica di neutroni termici nel core; tale quantità può essere considerata la sorgente per neutroni veloci nell'equazione di diffusione del core. Nel regime stazionario questa equazione diventa:

$$D_{lc} \nabla^2 \Phi_{lc} - \Sigma_{lc} \Phi_{lc} + k \Sigma_{2c} \Phi_{2c} = 0 \quad (5.128)$$

La q.tà di dispersioni (scattering) subita dal gruppo dei neutroni veloci è

$$\int_{E_{th}}^{E_0} \Sigma_s(E) n(E) v dE, \quad (5.129)$$

dove $n(E)$ è densità neutronica per unità di energia, mentre v è la velocità. Il flusso totale dei neutroni veloci è:

$$\Phi_1 = \int_{E_{th}}^{E_0} n(E) v dE \quad (5.130)$$

La sezione d'urto media di un gruppo neutronico è data da:

$$\bar{\Sigma}_s = \frac{\int_{E_{th}}^{E_0} \Sigma_s(E) n(E) v dE}{\int_{E_{th}}^{E_0} n(E) v dE} \quad (5.131)$$

Segue

$$\text{numero di collisioni} / \text{cm}^3 \text{ s} = \bar{\Sigma}_s \Phi_1 \quad (5.132)$$

$$\text{numero di neutroni trasformati da lenti a veloci} / \text{cm}^3 \text{ s} = \frac{\bar{\Sigma}_s \Phi_1}{\frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E_{th}}} = \Sigma_1 \Phi_1, \quad (5.133)$$

dove

$$\Sigma_1 = \frac{\bar{\Sigma}_s}{\frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E_{th}}} \quad (5.134)$$

è la sezione d'urto di rallentamento per neutroni veloci.

Il coefficiente di diffusione del gruppo veloce è derivato da considerazioni sulla densità di corrente, la quale può così essere rappresentata

$$\mathbf{J} = - \int_{E_{th}}^{E_0} D(E) \text{grad } \Phi(r, E) dE \quad (5.135)$$

Quindi

$$\mathbf{J}_1 = -D_1 \text{grad } \Phi_1 \quad (5.136)$$

dove

$$D_1 = \frac{\int_{E_{th}}^{E_0} D(E) \text{grad } \Phi(r, E) dE}{\int_{E_{th}}^{E_0} \text{grad } \Phi(r, E) dE} \quad (5.137)$$

Si può vedere da questa equazione che D_1 è costante solo se $\Phi(r, E)$ può esprimersi come prodotto di due funzioni indipendenti: una di $\mathbf{r}$ e l'altra di E . Ciò equivarrebbe a pensare che la variazione di flusso da punto a punto nel mezzo è trascurabile. È questa un'assunzione che spesso viene fatta per semplicità; quindi sostituendo $D(E)$ con $\lambda_{th}/3$ si può scrivere

$$D_1 = \frac{\int_{E_{th}}^{E_0} \frac{\lambda_{th}}{3} \text{grad } \Phi(r, E) dE}{\int_{E_{th}}^{E_0} \text{grad } \Phi(r, E) dE} \quad (5.138)$$

Posto $\Phi(E) = E^{-1}$ si ha

$$D_1 = \frac{\frac{1}{3} \int_{E_{th}}^{E_0} \lambda_1(E) \frac{dE}{E}}{\ln(E_0/E_{th})} \quad (5.139)$$

Riprendendo l'equazione di diffusione per il gruppo veloce nel core

$$D_{lc} \nabla^2 \Phi_{lc} - \Sigma_{lc} \Phi_{lc} + k \Sigma_{2c} \Phi_{2c} = 0 \quad (5.140)$$

dove Σ_{lc} è una sezione d'urto di assorbimento fittizia, che è effettivamente una sezione d'urto di rallentamento, avente esattamente il significato scritto sopra.

$$\Sigma_{lc}\Phi_{lc} = \text{quantità di neutroni termici/cm}^3\text{s} \quad (5.141)$$

Se c'è una piccola cattura di risonanza, si includerà nel calcolo di k la probabilità p di fuga dalla risonanza. Per i neutroni termici nel core scriveremo

$$D_{2c}\nabla^2\Phi_{2c} - \Sigma_{2c}\Phi_{2c} + \Sigma_{lc}\Phi_{lc} = 0 \quad (5.142)$$

essendo $\Sigma_{lc}\Phi_{lc}$ il termine di sorgente. Nel riflettore, non essendo esso un mezzo moltiplicante, scriveremo un'equazione mancante della sorgente:

$$D_{lr}\nabla^2\Phi_{lr} - \Sigma_{lr}\Phi_{lr} = 0 \quad (5.143)$$

Per i neutroni lenti nel riflettore:

$$D_{2r}\nabla^2\Phi_{2r} - \Sigma_{2r}\Phi_{2r} + \Sigma_{lr}\Phi_{lr} = 0 \quad (5.144)$$

dove Σ_{2r} è la sezione d'urto d'assorbimento. Per i flussi valgono le solite condizioni al contorno: di simmetria, di continuità, ecc. Per semplicità supporremo che la distanza di extra-polazione sia la stessa per neutroni lenti e veloci. Le parti omogenee delle quattro equazioni differenziali (due in riflettore e core, ciascuna per neutroni lenti e veloci) sono equazioni d'onda, del tipo:

$$\nabla^2\Phi_{lc} + B^2\Phi_{lc} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2\Phi_{2c} + B^2\Phi_{2c} = 0 \quad (5.145)$$

Si noterà che la B^2 è la stessa per il gruppo termico e per quello veloce. Questo si dimostra ricavando dalla (5.142) Φ_{lc} in funzione di Φ_{2c} e ricavando dalla (5.140) Φ_{2c} in funzione di Φ_{lc} . Sostituendo in (5.140) e in (5.142) rispettivamente le espressioni di Φ_{2c} e Φ_{lc} si ottengono:

$$D_{2c}\nabla^2\Phi_{2c} - \Sigma_{2c}\Phi_{2c} + \Sigma_{lc}\Phi_{lc} = 0 \implies \Phi_{lc} = \frac{-D_{2c}\nabla^2\Phi_{2c} + \Sigma_{2c}\Phi_{2c}}{\Sigma_{lc}}$$

$$D_{lc}\nabla^2\Phi_{lc} - \Sigma_{lc}\Phi_{lc} + k\Sigma_{2c}\Phi_{2c} = 0 \implies \Phi_{2c} = \frac{-D_{lc}\nabla^2\Phi_{lc} + \Sigma_{lc}\Phi_{lc}}{k\Sigma_{2c}}$$

$$\begin{aligned} D_{lc}\nabla^2\left(\frac{-D_{2c}\nabla^2\Phi_{2c} + \Sigma_{2c}\Phi_{2c}}{\Sigma_{lc}}\right) - \Sigma_{lc}\Phi_{lc} + k\Sigma_{2c}\Phi_{2c} &= 0 \\ D_{2c}\nabla^2\left(\frac{-D_{lc}\nabla^2\Phi_{lc} + \Sigma_{lc}\Phi_{lc}}{k\Sigma_{2c}}\right) - \Sigma_{2c}\Phi_{2c} + \Sigma_{lc}\Phi_{lc} &= 0 \end{aligned}$$

due equazioni del tipo

$$\begin{cases} -\frac{D_1D_2}{\Sigma_2}\nabla^4\Phi_1 + \left(\frac{D_2\Sigma_1}{\Sigma_2} + D_1\right)\nabla^2\Phi_1 + (k-1)\Sigma_1\Phi_1 = 0 \\ -\frac{D_1D_2}{\Sigma_1}\nabla^4\Phi_2 + \left(\frac{D_1\Sigma_2}{\Sigma_1} + D_2\right)\nabla^2\Phi_2 + (k-1)\Sigma_2\Phi_2 = 0 \end{cases}$$

Dividendo una per $-\frac{D_1D_2}{\Sigma_2}$ e l'altra per $-\frac{D_1D_2}{\Sigma_1}$

$$\begin{cases} \nabla^4\Phi_1 + \hat{B}^2\nabla^2\Phi_1 + \hat{C}^2\Phi_1 = 0 \\ \nabla^4\Phi_2 + \hat{B}^2\nabla^2\Phi_2 + \hat{C}^2\Phi_2 = 0 \end{cases} \quad (5.146)$$

dove

$$\hat{B}^2 = -\frac{D_1 \Sigma_2 + D_2 \Sigma_1}{D_1 D_2}, \quad \hat{C}^2 = -\frac{(k-1) \Sigma_1 \Sigma_2}{D_1 D_2} \quad (5.147)$$

Posto

$$\nabla^2 \Phi_1 = F_1, \quad \nabla^2 \Phi_2 = F_2$$

le due equazioni omogenee sono

$$\begin{cases} \nabla^2 F_1 + \hat{B}^2 F_1 = 0 \\ \nabla^2 F_2 + \hat{B}^2 F_2 = 0 \end{cases} \quad (5.148)$$

i due buckling sono uguali. Allora visto che

$$\nabla^2 \Phi_{lc} = -B^2 \Phi_{lc}, \quad \nabla^2 \Phi_{2c} = -B^2 \Phi_{2c} \quad (5.149)$$

sostituendo nelle (5.140) e (5.142)

$$\begin{cases} -(D_{lc} B^2 + \Sigma_{lc}) \Phi_{lc} + k \Sigma_{2c} \Phi_{2c} = 0 \\ \Sigma_{lc} \Phi_{lc} - (D_{2c} B^2 + \Sigma_{2c}) \Phi_{2c} = 0 \end{cases} \implies \begin{vmatrix} -(D_{lc} B^2 + \Sigma_{lc}) & k \Sigma_{2c} \\ \Sigma_{lc} & -(D_{2c} B^2 + \Sigma_{2c}) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.150)$$

si può scrivere l'equazione critica per il core di un reattore riflesso ipotizzando due gruppi di energia

$$(D_{lc} B^2 + \Sigma_{lc}) (D_{2c} B^2 + \Sigma_{2c}) - k \Sigma_{2c} \Sigma_{lc} = 0 \quad (5.151)$$

Dividendo per $\Sigma_{2c} \Sigma_{lc}$

$$\left(\frac{D_{lc}}{\Sigma_{lc}} B^2 + 1 \right) \left(\frac{D_{2c}}{\Sigma_{2c}} B^2 + 1 \right) = k \quad (5.152)$$

$$(1 + L_{lc}^2 B^2) (1 + L_{2c}^2 B^2) = k \quad (5.153)$$

e ricordando $L_{lc}^2 = \tau_c$ età di Fermi, otteniamo l'equazione critica per un reattore spoglio

$$\frac{k}{(1 + \tau_c^2 B^2) (1 + L_{2c}^2 B^2)} = 1 \quad (5.154)$$

che è una forma quadratica in B^2 per risolvere la quale vi saranno due soluzioni da prendere in considerazione. Più specificatamente, ricaviamo:

$$B^4 + \left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{L_{2c}^2} \right) B^2 - \frac{k-1}{\tau_c L_{2c}^2} = 0 \quad (5.155)$$

Delle due soluzioni chiamiamo quella positiva con μ^2 e quella negativa con $-v^2$. In tal modo μ^2 e v^2 sono entrambe positive. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{cases} \mu^2 = \frac{1}{2} + \left[-\left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{L_{2c}^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{L_{2c}^2} \right)^2 + 4 \frac{k-1}{\tau_c L_{2c}^2}} \right] \\ -v^2 = \frac{1}{2} + \left[-\left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{L_{2c}^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{L_{2c}^2} \right)^2 + 4 \frac{k-1}{\tau_c L_{2c}^2}} \right] \end{cases} \quad (5.156)$$

Le soluzioni generali delle equazioni

$$D_{lc} \nabla^2 \Phi_{lc} - \Sigma_{lc} \Phi_{lc} + k \Sigma_{2c} \Phi_{2c} = 0, \quad D_{2c} \nabla^2 \Phi_{2c} - \Sigma_{2c} \Phi_{2c} + \Sigma_{lc} \Phi_{lc} = 0 \quad (5.157)$$

implicano combinazioni lineari di μ^2 e $-v^2$. Consideriamo la coppia di equazioni

$$\nabla^2 \Phi_{lc} + B^2 \Phi_{lc} = 0, \quad \nabla^2 \Phi_{2c} + B^2 \Phi_{2c} = 0 \quad (5.158)$$

e sostituiamo in esse le soluzioni di B^2 testè trovate. Otterremo dunque equazioni del tipo

$$\begin{cases} \nabla^2 X + \mu^2 X = 0 \\ \nabla^2 Y - v^2 Y = 0 \end{cases} \quad (5.159)$$

le cui soluzioni dipendono dalla geometria del reattore.

	X	Y
lastra infinita	$\cos \mu x$	$\cosh \mu x$
sfera	$\frac{\sin \mu r}{r}$	$\frac{\sinh \mu r}{r}$
cilindro infinito	$J_0(\mu r)$	$I_0(vr)$

Le soluzioni delle (5.157) sono combinazioni lineari di X e Y :

$$\begin{cases} \Phi_{lc} = AX + CY \\ \Phi_{2c} = A^*X + C^*Y \end{cases} \quad (5.160)$$

le cui soluzioni sembrano includere quattro costanti arbitrarie; in realtà solo due sono le soluzioni indipendenti. Precisamente si hanno $\Phi_{lc} = AX$, $\Phi_{2c} = A^*X$ e quindi dalle (5.159) $\nabla^2 \Phi_{lc} = -\mu^2 A^*X$ che sostituita in (5.157)

$$-D_{2c}\mu^2 A^*X - \Sigma_{2c}^2 A^*X + \Sigma_{2c}AX = 0 \quad (5.161)$$

Chiamiamo *coefficiente di accoppiamento* (da non confondersi con “sorgente”) il rapporto

$$\frac{A^*}{A} = S_1 = \frac{\Sigma_{lc}}{D_{2c}\mu^2 + \Sigma_{2c}} = \frac{D_{lc}}{\tau_c D_{2c}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L_{2c}^2} + \mu^2} \quad (5.162)$$

In modo simile sostituendo CY per Φ_{lc} , C^*Y per Φ_{2c} , $v^2 C^*Y$ per $\nabla^2 \Phi_{2c}$, la seconda delle (5.157) diventa

$$D_{2c}v^2 C^*Y - \Sigma_{2c}C^*Y + \Sigma_{lc}CY = 0 \quad (5.163)$$

e dunque potremo similmente scrivere

$$\frac{C^*}{C} = S_2 = \frac{D_{lc}}{\tau_c D_{2c}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L_{2c}^2} - v^2} \quad (5.164)$$

Le (5.160) allora diventano

$$\begin{cases} \Phi_{lc} = AX + CY \\ \Phi_{2c} = S_1 AX + S_2 CY \end{cases} \quad (5.165)$$

Integriamo ora quelle del riflettore.

$$\nabla^2 \Phi_{1r} - k_{1r}^2 \Phi_{1r} = 0, \quad \nabla^2 \Phi_{2r} - k_{2r}^2 \Phi_{2r} + \frac{\Sigma_{1r}}{D_{2r}} = 0 \quad (5.166)$$

Integrando la prima si ottiene

$$\Phi_{1r} = FZ_1, \quad (5.167)$$

dove F è una costante arbitraria, mentre

$$Z_1 = \begin{cases} \sinh k_r \left(\frac{1}{2}H + T - x \right), & \text{per una lastra} \\ \sinh \frac{k_r}{r} \left(\frac{1}{2}H + T - r \right), & \text{per una sfera} \end{cases} \quad (5.168)$$

integrando l'altra equazione

$$\Phi_{2r} = GZ_2 + S_2\Phi_{1r} = GZ_2 + S_3FZ_1 \quad (5.169)$$

dove G è una costante arbitraria e S_3 coefficiente d'accoppiamento del riflettore. Sostituendo nella (5.166)

$$S_3\nabla^2\Phi_{1r} - S_3k_{2r}^2\Phi_{1r} + \frac{\Sigma_{1r}}{D_{2r}} = 0 \quad (5.170)$$

Essendo dalla (5.166) $\nabla^2\Phi_{1r} = k_{1r}^2\Phi_{1r}$ si ha

$$S_3 = \frac{\Sigma_{1r}}{D_{2r}} \cdot \frac{1}{k_{2r}^2 - k_{1r}^2} \quad (5.171)$$

Riassumendo abbiamo:

$$\begin{cases} \Phi_{lc} = AX + CY & \text{e } \Phi_{2c} = S_1AX + S_2CY \\ \Phi_{1r} = FZ_1 & \text{e } \Phi_{2e} = GZ_2 + S_3FZ_1 \end{cases} \quad (5.172)$$

dove le incognite sono A, C, F, G , mentre

$$\Phi_{lc} = \Phi_{1r} \quad \text{e} \quad \Phi_{2c} = \Phi_{2r} \quad (5.173)$$

sono le condizioni al contorno, per cui sulla superficie di separazione avremo

$$\begin{cases} AX + CY = FZ_1 \\ S_1AX + S_2CY = S_3FZ_1 + GZ_2 \\ D_{lc}AX' + D_{lc}CY' = D_{1r}FZ_1' \\ D_{lc}S_1AX' + D_{lc}S_2CY' = D_{2r}S_3FZ_1' + D_{2r}GZ_2' \end{cases} \quad (5.174)$$

dove l'apice denota l'operazione di derivazione. Abbiamo un sistema omogeneo per le cui soluzioni è necessario e sufficiente che il determinante dei coefficienti sia nullo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & -Z_1 & 0 \\ S_1X & S_2Y & -S_3Z_1 & -Z_2 \\ D_{lc}X' & D_{lc}Y' & -D_{1r}Z_1' & 0 \\ D_{lc}S_1X' & D_{lc}S_2Y' & -D_{2r}S_3FZ_1' & -D_{2r}Z_2' \end{vmatrix} \quad (5.175)$$

Questa può essere riguardata come l'**equazione critica per il metodo due gruppi di un reattore riflesso**. Poiché X e Y includono $H/2$, o R , e Z_1 e Z_2 includono T , o $T - R$, una soluzione esplicita del determinante per trovare T come funzione di R (o di $H/2$), o viceversa, non è possibile. Bisogna allora procedere per tentativi. Un valore approssimato di R , attraverso il metodo di un gruppo d'energia, è stato stimato per lo spessore T . Questo viene inserito nel determinante Δ attraverso $S_1, S_2, S_3, k_{1r}, k_{1r}, \mu^2, v^2$ derivati dalle proprietà del materiale. Il risultato sarà $\Delta \neq 0$. Verrà allora considerato un altro valore di R per un dato spessore di T e di conseguenza calcolato un nuovo determinante. Se anche stavolta il $\Delta \neq 0$ i due Δ vengono riportati in ordinate di un diagramma avente come ascisse il valore di R . La figura 5.8 chiarisce come si riesce a trovare il $R_{critico}$.

Il calcolo può essere ripetuto per diverse composizioni dell'accoppiata combustibile-moderatore allo scopo di determinare il minimo volume critico o la minima massa critica di combustibile. In alternativa a tutto ciò, si possono fissare R e T e assumere come variabile la concentrazione di combustibile, per la quale il determinante Δ si annullerà; a questo punto sarà nota la massa critica del reattore.

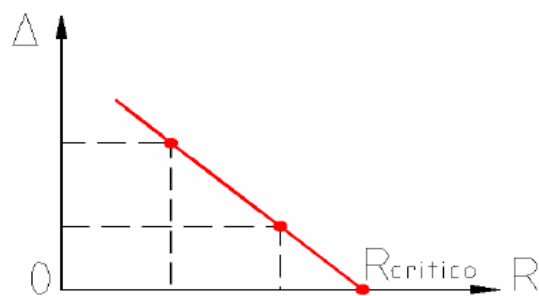
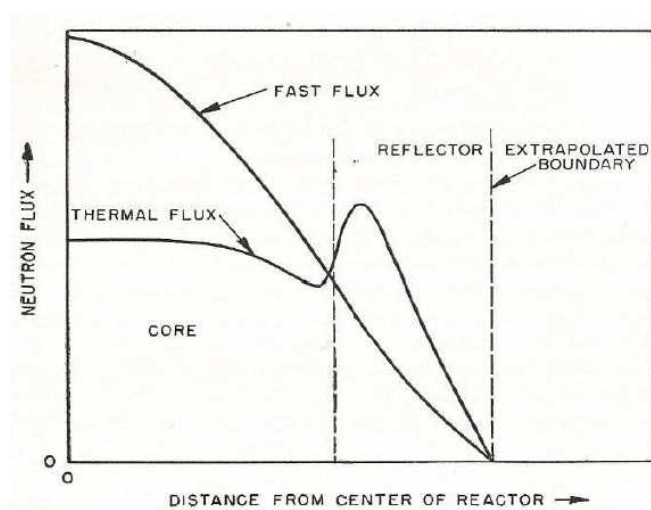


Figura 5.8: Il valore critico di R annulla il determinante Δ .



5.4.5 Teoria di n gruppi d'energia

Consideriamo n gruppi o intervalli d'energia $1, 2, \dots, n$ dove il gruppo $n = 1$ è quello ad energia più alta, ed n è quello ad energia più bassa (termica). L'equazione di diffusione per il 1° gruppo è

$$\begin{aligned} D_1 \nabla^2 \Phi_1 - \Sigma_1 \Phi_1 + k \Sigma_n \Phi_n &= 0 \quad \text{e per } i \neq 1 \\ D_i \nabla^2 \Phi_i - \Sigma_i \Phi_i + k \Sigma_{i-1} \Phi_{i-1} &= 0 \end{aligned} \quad (5.176)$$

dove Σ_i è la sezione d'urto di rallentamento in tutti i casi, fatta eccezione per $i = n$ (neutroni termici) dove è la vera sezione d'urto d'assorbimento.

Il termine di sorgente ossia q .tà di neutroni/cm³s è rappresentato da $k \Sigma_{i-1} \Phi_{i-1}$. Si noti che l'assorbimento di neutroni termici è la sorgente di neutroni veloci. Ripetendo quanto trovato nella teoria a due gruppi si ottiene

$$\frac{k}{(1 + L_1^2 B^2)(1 + L_2^2 B^2) \dots (1 + L_n^2 B^2)} = 1, \quad (5.177)$$

dove L_i è la lunghezza di diffusione del gruppo i -esimo. Per $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} L_i^2 = \tau, \quad (5.178)$$

dove τ è l'età di Fermi. La (5.177) può così diventare

$$\ln k = \sum_{i=1}^{n-1} \ln(1 + L_i^2 B^2) + \ln(1 + L_n^2 B^2) \quad (5.179)$$

Per $n \rightarrow +\infty$ il termine L_i^2 è trascurabilmente piccolo, e dunque

$$\ln(1 + L_i^2 B^2) = \ln 1 + L_i^2 B^2 \left(\frac{1}{1 + L_i^2 B^2} \right)_{L_i^2 B^2=0} + \dots \simeq L_i^2 B^2 \quad (5.180)$$

Allora la (5.179) diventa:

$$\ln k = B^2 \sum_{i=1}^{n-1} L_i^2 + \ln(1 + L_n^2 B^2) \implies \ln k = B^2 \tau + \ln(1 + L_n^2 B^2) \quad (5.181)$$

Cioè

$$\frac{k \exp(-B^2 \tau)}{1 + L_n^2 B^2} = 1 \quad (5.182)$$

che è l'**equazione critica del modello di Fermi**. Nel caso di un reattore grande, cioè B^2 trascurabilmente piccolo, la (5.177) può essere approssimata come

$$\frac{k}{1 + B^2 \sum_{i=1}^{n-1} L_i^2} = 1 \implies B^2 = \frac{k - 1}{\sum_{i=1}^{n-1} L_i^2} = \frac{k - 1}{M} \quad (5.183)$$

5.5 Attività temporale di un reattore termico spoglio

5.5.1 Neutroni pronti

Si supponrà in prima approssimazione che tutti i neutroni emessi nei processi di fissione appaiano entro un tempo di 10^{-15} s, cioè considereremo solo *neutroni pronti*. Congiuntamente al problema della moltiplicazione neutronica è importante il tempo di generazione, definito come tempo medio tra due generazioni di fissione termica. Scriviamo

$$\text{tempo di rallentamento} + \text{tempo di diffusione} = \text{tempo di generazione}$$

Si assumerà trascurabile il primo rispetto al secondo. Ciò vale in un reattore grafite-U naturale, ma non per reattori in cui una parte apprezzabile di neutroni è generata da neutroni con energia maggiore di quella termica.

$$l_0 = \frac{\lambda_a}{v} = \frac{1}{\Sigma_a v} = \text{vita media in un mezzo infinito} \quad (5.184)$$

$$l = \frac{l_0}{1 + L^2 B^2} = \text{vita media in un mezzo finito}$$

La trattazione riguarderà un reattore termico, spoglio e omogeneo, sebbene molte delle conclusioni generali siano estendibili a reattori con riflettori ed eterogenei. L'equazione di diffusione per lo stato non-stazionario è

$$D \nabla^2 \Phi - \Sigma_a \Phi + S = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.185)$$

Secondo la teoria dell'*età di Fermi* si ha:

$$S = q = pq^* = pQ(r, t) e^{-B^2 \tau} = K_\infty \Sigma_a \Phi e^{-B^2 \tau} \quad (5.186)$$

dove $K_\infty \Sigma_a \Phi$ = q.tà neutroni termici/cm³/s in un mezzo infinito senza perdite. $e^{-B^2 \tau}$ = probabilità di non fuggire e dunque probabilità di pervenire all'età di Fermi. Scriveremo allora:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \Sigma_a \Phi \left(K_\infty e^{-B^2 \tau} - 1 \right) &= \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \implies L^2 \nabla^2 \Phi + \left(K_\infty e^{-B^2 \tau} - 1 \right) \Phi = \frac{1}{\Sigma_a v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \implies L^2 \nabla^2 \Phi + \left(K_\infty e^{-B^2 \tau} - 1 \right) \Phi &= l_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.187)$$

Supponiamo che $\Phi(r, t) = \Phi(r) T(t)$. Scriveremo

$$\frac{L^2 \nabla^2 \Phi}{\Phi(r)} + \left(K_\infty e^{-B^2 \tau} - 1 \right) = \frac{l_0}{T(t)} \frac{dT}{dt} \quad (5.188)$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ il K subisca una brusca variazione e poi rimanga costante (funzione a scalino). Ricordando l'equazione d'onda

$$\nabla^2 \Phi + B^2 \Phi(r) = 0 \implies -B^2 = \frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi(r)} \text{ e sostituendo} \quad (5.189)$$

$$\frac{K_\infty e^{-B^2 \tau}}{1 + L^2 B^2} - 1 = \frac{l_0}{1 + L^2 B^2} \frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt} \quad (5.190)$$

dove

$$\frac{K_{\infty} e^{-B^2 \tau}}{1 + L^2 B^2} = K_{eff} \quad (5.191)$$

$$K_{ecc} = K_{eff} - 1 = \text{fattore di moltiplicazione d'eccesso} \quad (5.192)$$

$$\Rightarrow K_{ecc} = \frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt} \Rightarrow T(t) = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{K_{ecc}}{l} t\right)$$

Quindi

$$\Phi(r, t) = \Phi(r) \text{const} \cdot \exp\left(\frac{K_{ecc}}{l} t\right) \Rightarrow \Phi(r, 0) = \Phi(r) \text{const} = \Phi_0(r)$$

Cioè

$$\Phi(r, t) = \Phi_0(r) \exp\left(\frac{K_{ecc}}{l} t\right) \quad (5.193)$$

Il tempo richiesto per il flusso di cambiare di un fattore “e” è il **periodo del reattore**

$$T = \frac{1}{K_{ecc}} \quad (5.194)$$

5.5.2 Neutroni ritardati. Equazioni della cinetica

È necessario, prima di affrontare il comportamento e controllo di un reattore, conoscere i *neutroni ritardati*. Mentre l'espulsione dei neutroni pronti cessa entro un tempo molto breve, i neutroni ritardati sono emessi, con intensità gradualmente decrescente, per un periodo di minuti. I neutroni ritardati, che accompagnano una fissione, si identificano in cinque, e possibilmente, anche in più gruppi. Il tasso di decadimento dell'intensità neutronica in ogni gruppo è esponenziale, come in genere è per ogni cambiamento radioattivo. Osservando il decadimento dei neutroni ritardati, dopo che la fissione è cessata, è stato possibile associare una specifica mezza-vita a ciascun gruppo. Le proprietà caratteristiche di cinque gruppi sono riportate in tabella. Precisamente:

$$\text{mezza-vita } T_i, \quad \text{vita media } t_i = \frac{T_i}{\ln 2}, \quad \text{costante di decadimento } \lambda_i = \frac{1}{t_i} - \beta_i$$

dove β_i è la frazione del gruppo rispetto ai neutroni totali (pronti e ritardati).

mezza-vita	vita media	cost decadimento	frazione	energia
T_i (s)	t_i (s)	λ_i (s ⁻¹)	β_i	(MeV)
0.43	0.62	1.61	0.00084	0.42
1.52	2.19	0.457	0.0024	0.62
4.51	6.50	0.154	0.0021	0.43
22.0	31.7	0.0315	0.0017	0.56
55.6	80.2	0.0125	0.00026	0.25

In figura 5.9 un esempio di emissione di neutroni ritardati, originati dal prodotto di fissione Br precursore di una catena di decadimento radioattivo con particelle β^- .

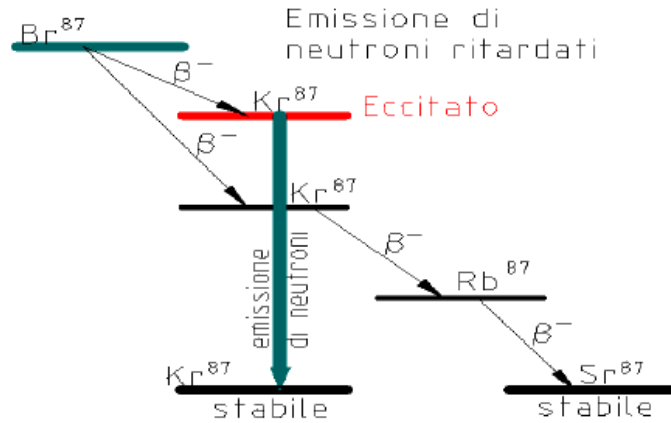


Figura 5.9: Emissione di neutroni ritardati originati dal prodotto di fissione Br.

Si è visto che il flusso non-stazionario cresce o decresce in maniera esponenziale, dipendendo l'andamento dal *periodo del reattore*. Poiché il tempo richiesto per rallentare i neutroni periodo del reattore T è stato assunto trascurabile, la vita media neutronica è essenzialmente la stessa del tempo di generazione. Si noterà che questo risultato è generale, ed è indipendente se i neutroni sono pronti o ritardati. Tuttavia è solo quando i neutroni sono tutti pronti che la vita media può identificarsi con il tempo di generazione. Vediamo un esempio.

$$K_{ecc} = 0.01 \text{ e } l = 10^{-3} \text{ s} \implies T = l/K_{ecc} = 10^{-1} \text{ s}$$

Quindi

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = e^{t/T} = e^{1/0.1} = e^{10} \simeq 2 \cdot 10^4$$

È evidente che con una crescita così rapida sarebbe impossibile controllare il reattore. Fortunatamente esistono i neutroni ritardati. È altresì evidente che per un dato K_{ecc} il periodo di un reattore è proporzionale al tempo medio digenerazione dei neutroni. Poiché alcuni neutroni sono ritardati, il tempo tra le generazioni è cresciuto e di conseguenza è cresciuto il periodo T del reattore. L'effetto dei neutroni ritardati può essere visto nel modo seguente. Il fatto che t_i sia la vita media dei neutroni ritardati del gruppo i -esimo è equivalente a pensare che ogni neutrone di questo gruppo ha un tempo t_i dopo la fissione. Se β_i è la frazione di neutroni di fissione nel gruppo ritardato i -esimo, il tempo medio di ritardo in tale gruppo è $\beta_i t_i$ e il tempo medio totale di ritardo è $\sum_i \beta_i t_i$. Sempre trascurando il tempo di rallentamento

$$\bar{l} = \sum_i \beta_i t_i + l \quad \text{vita media} \quad (5.195)$$

Calcolando la sommatoria dalla precedente tabella e assunto $l = 10^{-3} \text{ s}$ si ottiene $\bar{l} = 0.1 \text{ s}$. Per un $K_{ecc} = 0.01$ si ottiene $T = \bar{l}/K_{ecc} = 10 \text{ s}$. La q.tà di neutroni assorbiti/ $\text{cm}^3 \text{ s}$ è pari

a $\Sigma_a \Phi$.

$$\frac{k}{p} \Sigma_a \Phi = \text{produzione totale di neutroni di fissione, pronti + ritardati}$$

$$\beta \frac{k}{p} \Sigma_a \Phi = \text{produzione di neutroni ritardati, dove } \beta = \sum_i \beta_i$$

C_i = concentrazione di nuclei/ cm^3 del precursore i -esimo
che dà neutroni ritardati.

$\lambda_i C_i$ = nuclei che decadono/ $\text{cm}^3 \text{ s}$

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \frac{k}{p} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (5.196)$$

La frazione di neutroni pronti è $(1 - \beta)$; allora il termine di sorgente dei neutroni pronti è

$$p(1 - \beta) \frac{k}{p} \Sigma_a \Phi e^{-B^2 \tau} = (1 - \beta) k \Sigma_a \Phi e^{-B^2 \tau}$$

La percentuale totale dei neutroni ritardati è $\sum_i \lambda_i C_i / \text{cm}^3$ che moltiplicata per la probabilità di non fuggire durante il rallentamento o per la probabilità di fuga alla risonanza dà il termine di

$$p e^{-B^2 \tau} \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i = \text{termine di sorgente dovuto ai neutroni ritardati} \quad (5.197)$$

Si suppone per semplicità che lo spettro d'energia sia lo stesso per neutroni pronti e separati

$$S = (1 - \beta) \frac{k}{p} \Sigma_a \Phi e^{-B^2 \tau} + p e^{-B^2 \tau} \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i \quad (5.198)$$

Allora l'equazione di diffusione è

$$D \nabla^2 \Phi - \Sigma_a \Phi + (1 - \beta) \frac{k}{p} \Sigma_a \Phi e^{-B^2 \tau} + p e^{-B^2 \tau} \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.199)$$

Dividendo per Σ_a

$$\begin{cases} L^2 \nabla^2 \Phi + \left[(1 - \beta) k e^{-B^2 \tau} - 1 \right] \Phi + \frac{p}{\Sigma_a} e^{-B^2 \tau} \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i = l_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \frac{\partial C_i}{\partial t} = -\lambda_i C_i + \beta_i \frac{k}{p} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (5.200)$$

Queste equazioni sono note come **equazioni della cinetica**.

5.5.3 Equazioni della cinetica e reattività

Supponiamo che sia

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}) T(t) \quad \text{e} \quad C_i(\mathbf{r}, t) = C_i(\mathbf{r}) H_i(t) \quad (5.201)$$

Riscriviamo le equazioni della cinetica:

$$\begin{cases} L^2 \nabla^2 \Phi + \left[(1 - \beta) k e^{-B^2 \tau} - 1 \right] \Phi + \frac{p}{\Sigma_a} e^{-B^2 \tau} \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i = l_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \frac{\partial C_i}{\partial t} = -\lambda_i C_i + \beta_i \frac{k}{p} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (5.202)$$

Con la posizione (5.201), si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) &= -\lambda_i C_i(\mathbf{r}) H_i(t) + \beta_i \frac{k}{p} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) T(t) \\ \implies C_i(\mathbf{r}) \frac{dH_i(t)}{dt} &= -\lambda_i C_i(\mathbf{r}) H_i(t) + \beta_i \frac{k}{p} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) T(t) \end{aligned} \quad (5.203)$$

Cioè

$$\frac{C_i(\mathbf{r})}{\Phi(\mathbf{r})} \frac{dH_i(t)}{dt} = -\lambda_i \frac{C_i(\mathbf{r})}{\Phi(\mathbf{r})} H_i(t) + \beta_i \frac{k}{p} \Sigma_a T(t) \quad (5.204)$$

dove $\frac{C_i(\mathbf{r})}{\Phi(\mathbf{r})}$ è indipendente da $\mathbf{r}$. Così dalla (5.202) si ha:

$$L^2 \frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi(\mathbf{r})} + \left[(1 - \beta) k e^{-B^2 \tau} - 1 \right] \Phi + \frac{p}{\Sigma_a} e^{-B^2 \tau} \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{C_i(\mathbf{r})}{\Phi(\mathbf{r})} H_i(t) = \frac{l_0}{T} \frac{dT}{dt} \quad (5.205)$$

Per l'ipotesi fatta all'inizio (eq. (5.201)) si può scrivere

$$\nabla^2 \Phi + B^2 \Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{che è identica a} \quad \nabla^2 \Phi + B^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0$$

Le equazioni della cinetica, ambedue lineari e con variabili separabili, hanno le soluzioni:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 e^{\omega t}, \quad C_i(\mathbf{r}, t) = C_{i0} e^{\omega t} \quad (5.206)$$

che introdotte nelle (5.201) danno

$$C_{i0} = \frac{k \beta_i \Sigma_a \Phi_0}{p(\omega + \lambda_i)} \quad (5.207)$$

$$(1 - \beta) K_{eff} - 1 + K_{eff} \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i \beta_i}{\omega + \lambda_i} = \omega l \quad \text{oppure} \quad K_{ecc} = \omega l + K_{eff} \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i \beta_i}{\omega + \lambda_i} \quad (5.208)$$

$$\rho = \frac{K_{ecc}}{K_{eff}} = \frac{K_{eff} - 1}{K_{eff}} \quad \text{reattività} \quad \rho = \frac{\omega l}{\omega l + 1} + \frac{1}{\omega l + 1} \sum_{i=1}^m \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i} \quad (5.209)$$

(v. fig. 5.10).

Ricordando la (5.206) il flusso può allora essere espresso da

$$\Phi = A_0 e^{\omega_0 t} + A_1 e^{\omega_1 t} + \dots + A_m e^{\omega_m t} \quad (5.210)$$

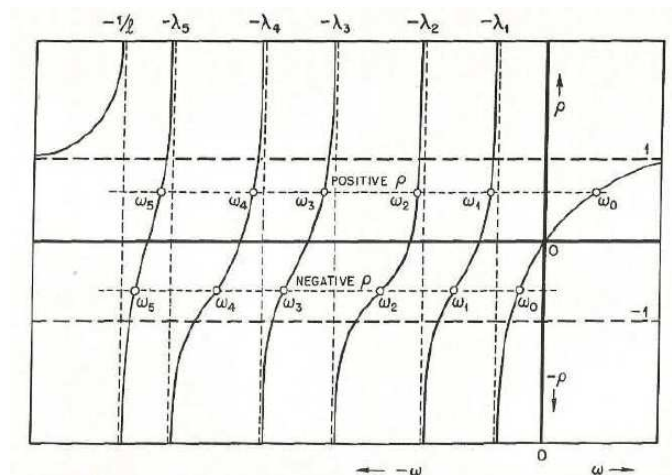


Figura 5.10: Reattività in funzione della grandezza ω .

e per valori $\rho > 0$ e dopo un tempo t

$$\Phi = A_0 e^{\omega_0 t} = \Phi_0 e^{\omega_0 t}$$

dove $\omega_0 = T^{-1}$, essendo T il periodo stabile del reattore. Se nella (5.209) poniamo $\omega = T^{-1}$ si ottiene

$$\rho = \frac{l}{TK_{eff}} + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{1 + \lambda_i T} \quad (5.211)$$

Si usa esprimere la reattività ρ in unità *inhour* definita come la reattività per cui $T = 3600$.

$$\rho_{ih} = \frac{\frac{l}{TK_{eff}} + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{1 + \lambda_i T}}{\frac{l}{3600K_{eff}} + \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{1 + \lambda_i 3600}} \quad (5.212)$$

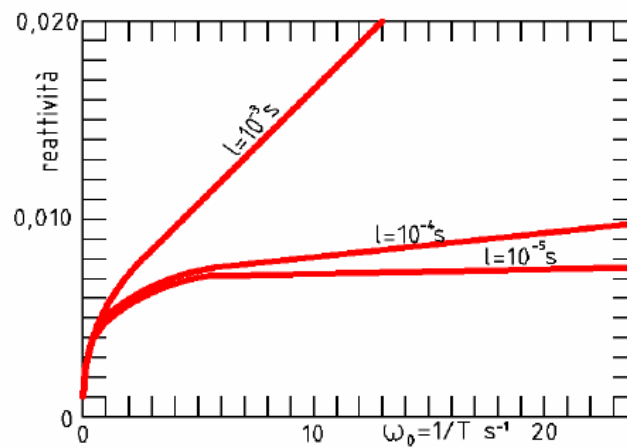


Figura 5.11: Reattività in funzione di ω_0 .

5.5.4 Gruppo di neutroni ritardati

Esaminiamo come si specializzano i risultati raggiunti nei numeri precedenti per un gruppo di neutroni ritardati. Innanzitutto definiamo una costante di decadimento media del gruppo

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i \beta_i}{\sum_{i=1}^m \beta_i} \quad (5.213)$$

La reattività si esprime come attraverso l'equazione quadratica in ω

$$\rho = \frac{l\omega}{K_{eff}} + \frac{\beta\omega}{\omega + \lambda} \quad (5.214)$$

Supponiamo che K_{ecc} e ρ siano piccoli tanto da poter scrivere $K_{eff} \simeq 1$. La (5.214) diventa

$$\rho = l\omega + \frac{\beta\omega}{\omega + \lambda} \iff l\omega^2 + (\beta - \rho + l\lambda)\omega - \lambda\rho = 0 \quad (5.215)$$

da cui si ricavano

$$\omega = -\frac{(\beta - \rho + l\lambda)}{2l} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4l\lambda\rho}{(\beta - \rho + l\lambda)^2}} \right] \quad (5.216)$$

Se $\beta - \rho + l\lambda \simeq |2l\lambda\rho|$ si hanno le due soluzioni

$$\omega_0 = \frac{\lambda\rho}{\beta - \rho + l\lambda} \quad \omega_1 = -\frac{\beta - \rho + l\lambda}{l} \quad (5.217)$$

Per un reattore termico supponiamo $l = 10^{-3} \text{ s}$, $\lambda = 0.08 \text{ s}^{-1}$, $\beta = 0.0075$, $\rho = 0.0025$. Allora:

$$\begin{cases} 2l\lambda\rho = 4 \cdot 10^{-7} \\ (\beta - \rho + l\lambda)^2 = 2.58 \cdot 10^{-5} \\ l\lambda = 8 \cdot 10^{-5} \\ \beta - \rho = 0.0050 \end{cases} \quad (5.218)$$

Possiamo allora approssimare scrivendo

$$\omega_0 = \frac{\lambda\rho}{\beta - \rho} \quad \omega_1 = -\frac{\beta - \rho}{l} \quad \text{con } \beta > \rho > 0 \quad (5.219)$$

Allora si ha per il periodo del reattore:

$$T = \frac{1}{\omega_0} = \frac{\beta - \rho}{\lambda\rho} = 25 \text{ s} \quad (5.220)$$

Ricordiamo che senza neutroni ritardati è $T = 0.4 \text{ s}$. Le espressioni del flusso e delle concentrazioni sono:

$$\Phi = A_0 e^{\omega_0 t} + A_1 e^{\omega_1 t}, \quad C = B_0 e^{\omega_0 t} + B_1 e^{\omega_1 t}$$

Segue

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= \omega_0 B_0 e^{\omega_0 t} + \omega_1 B_1 e^{\omega_1 t} = -\lambda C + \frac{k}{p} \Sigma_a \Phi \beta \\ B_0 &= \frac{k}{p} \frac{\beta \Sigma_a}{\omega_0 + \lambda} A_0, \quad B_1 = \frac{k}{p} \frac{\beta \Sigma_a}{\omega_1 + \lambda} A_1\end{aligned}\tag{5.221}$$

Determiniamo A_0, A_1 .

$$A_0 = \frac{\frac{\beta}{\lambda} + \frac{\beta l}{\beta - \rho}}{\frac{\beta - \rho}{\lambda} + \frac{\beta l}{\beta - \rho}} \simeq \frac{\beta}{\beta - \rho} \Phi_0, \quad A_1 = \frac{-\rho}{\beta - \rho} \Phi_0\tag{5.222}$$

In definitiva possiamo scrivere

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t=0) \left[\frac{\beta}{\beta - \rho} \exp\left(\frac{\lambda \rho}{\beta - \rho} t\right) - \frac{\rho}{\beta - \rho} \exp\left(-\frac{\beta - \rho}{l} t\right) \right]\tag{5.223}$$

Con i valori sopra indicati otteniamo

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 (1.5e^{0.04t} - 0.5e^{-5t}) \Rightarrow \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_{t=0} = A_0 \omega_0 + A_1 \omega_1 \\ \Rightarrow \frac{1}{\Phi_0} \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_{t=0} &= \frac{\lambda \rho \beta}{(\beta - \rho)^2} + \frac{\rho}{l} = \frac{1}{T_0}\end{aligned}\tag{5.224}$$

Con le approssimazioni del nostro caso avremo

$$\frac{\rho}{l} = \frac{1}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{l}{\rho} \simeq \frac{1}{K_{ecc}}\tag{5.225}$$

Capitolo 6

Controllo dei reattori

6.1 Introduzione. Criticità di un reattore

Se un reattore opera in uno stato stazionario il fattore K_{eff} deve rimanere uguale ad uno, cioè il sistema è esattamente *critico*. Tuttavia, se un reattore fosse costruito solo per essere critico al punto giusto, non si manterrebbe in tale situazione per molto tempo, essendo le maggiori cause di disturbo al suo funzionamento l'*esaurimento del combustibile*, gli *effetti della temperatura*, i *prodotti di fissione*.

Vi sono in aggiunta altri fattori, apparentemente estranei, tali come la pressione atmosferica. Variazioni della pressione atmosferica si accompagnano a variazioni di assorbimento di neutroni da parte dell'azoto dell'aria circolante all'interno del reattore.

6.2 Combustibile

Quando un reattore funziona, la quantità di combustibile nel core decresce. Se il funzionamento è previsto per un tempo apprezzabilmente lungo, allora sarà usata una quantità di combustibile maggiorata rispetto a quella critica. In genere il massimo burn-up che un reattore di potenza può tollerare è inferiore al 10/100.

6.3 Temperatura

Quando il reattore funziona la sua temperatura complessivamente sale a causa dell'energia termica sviluppata dalla fissione nucleare. A parte l'efficienza del sistema di raffreddamento, diverse parti del reattore saranno soggette inevitabilmente a temperature superiori a quelle esistenti quando il reattore è sottocritico. Dunque combustibile e moderatore sono soggetti ad aumentare di dimensioni; così la loro densità decresce, ed il risultato è che la lunghezza del percorso di diffusione e l'età dei neutroni termici aumentano. Ciò comporta che la massa critica sia tanto maggiore quanto maggiori sono le temperature. Alle alte temperature, durante il funzionamento, l'energia media dei neutroni termici è più elevata rispetto a quella delle molecole d'aria atmosferica; pertanto ci saranno variazioni di L^2, τ, η, f, p , essendo questi valori funzioni delle sezioni d'urto. La p subisce l'effetto Doppler nucleare. A causa dell'aumento di energia di agitazione termica le ampiezze di risonanza aumentano, ma i picchi di risonanza si abbassano, dovendo rimanere uguale l'area del diagramma. In tal modo si riduce la probabilità di fuga alle risonanze.

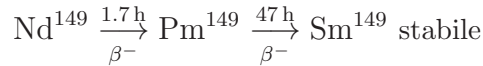
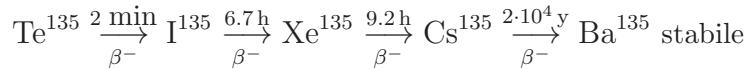
6.4 Prodotti di fissione

Durante l'esercizio continuo dell'impianto i nuclidi formati per la fissione e i loro prodotti di decadimento si accumulano; si chiamano veleni quelli che hanno una grande Σ_a . A causa dell'inarrestabile formazione dei prodotti di decadimento, anche dopo una riduzione di potenza, come pure dopo il completo spegnimento – shut down – del reattore, la concentrazione di un veleno può essere tollerata fino ad un certo valore massimo. Per riprendere il funzionamento subito dopo uno shut down si richiede un eccesso di reattività.

I nuclidi di particolare interesse a causa della loro grande sezione d'urto di cattura sono:

$$\text{Xe}^{135} \quad (\Sigma_a = 3.5 \cdot 10^6 \text{ barns}), \quad \text{Sm}^{149} \quad (\Sigma_a = 5.3 \cdot 10^4 \text{ barns})$$

Esempi di prodotti di fissione:



6.5 Barre di controllo. Teoria di un gruppo di energia

Quanto segue suppone: reattore omogeneo, spoglio, molto grande, finito, cilindrico. Assumeremo per semplicità che la barra di controllo sia *nera* cioè i neutroni possono entrare nella barra ma non fuggire (corpo nero). Supponiamo per ora un reattore finito, cilindrico senza barra di controllo centrale. Nella figura 6.1 si assume che $R_0 \simeq R$ e che il flusso $\Phi = 0$ per $r = R$.

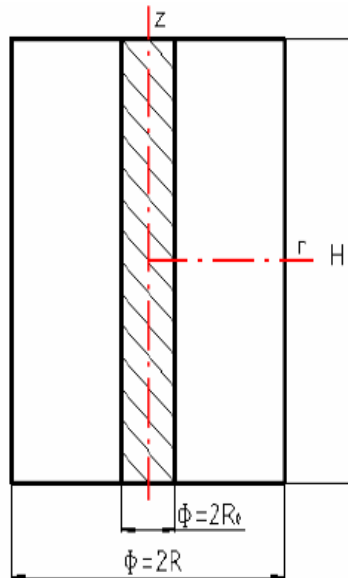


Figura 6.1: Reattore finito, cilindrico senza barra di controllo centrale.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + B_g^2 \Phi = 0 \quad (6.1)$$

Condizioni al contorno $r = R$ e $z = H/2$. Supponiamo $\Phi(r, z) = \Theta(r) Z(z)$. Dividendo la (6.1) per $\Theta(r) Z(z)$ otteniamo

$$\frac{1}{\Theta(r)} \left(\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z}{dz^2} + B_g^2 = 0 \quad (6.2)$$

Poniamo:

$$\frac{1}{\Theta(r)} \left(\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Theta}{\partial r} \right) = -\alpha^2, \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2Z}{dz^2} = -\beta^2 \quad (6.3)$$

Segue

$$B_g^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (6.4)$$

Quindi, dopo semplici passaggi, si può scrivere:

$$r^2 \frac{d^2\Theta}{dr^2} + r \frac{d\Theta}{dr} + \alpha^2 r^2 \Theta = 0 \quad (6.5)$$

Quest'ultima equazione può trasformarsi in un'equazione di Bessel ponendo

$$u \equiv \alpha r \implies u^2 \frac{d^2\Theta}{du^2} + u \frac{d\Theta}{du} + u^2 \Theta = 0 \quad (6.6)$$

Ricordiamo che l'equazione generale di Bessel di ordine n

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (6.7)$$

Ne segue che la nostra equazione è di Bessel di ordine 0, e la soluzione generale è

$$\Theta = A J_0(u) + C Y_0(u) \quad (6.8)$$

dove $J_0(u)$ è la *funzione di Bessel di prima specie*, mentre $Y_0(u)$ è la *funzione di Bessel di seconda specie*

Se fosse $\alpha^2 < 0$ scriveremmo

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (6.9)$$

e la (6.8) diventerebbe

$$\Theta = A' I_0(u) + C' K_0(u) \quad (6.10)$$

Si può dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_0(u) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} K_0(u) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} I_0(u) = +\infty \quad (6.11)$$

Quindi l'unica soluzione reale è

$$\Theta(r) = A J_0(u) = A J_0(\alpha r) \quad \text{con } A \neq 0 \quad (6.12)$$

Per le condizioni al contorno:

$$\Theta(r) = A J_0(\alpha R) = 0 \implies J_0(\alpha R) = 0 \quad (6.13)$$

Dalla **tabella** della funzione di Bessel $J_n(x)$ si legge $J_{n=0}(x = 2.4048) = 0$. Quindi

$$\alpha R = 2.4048 \implies \alpha = \frac{2.4048}{R} \implies \alpha^2 = \left(\frac{2.4048}{R}\right)^2$$

e la (6.12) diventa:

$$\Theta(r) = AJ_0\left(\frac{2.4048}{R}r\right) \quad (6.14)$$

La funzione $Z(z)$ si può studiare considerando la simmetria del flusso rispetto all'origine in direzione dell'asse z . E utilizzando le condizioni al contorno. Si arriverà a scrivere

$$Z(z) = \text{costante} \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \implies \beta^2 = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \text{ autovalore più basso} \quad (6.15)$$

Dunque la (6.4) diventa

$$B_g^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{2.4048}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \quad (6.16)$$

pertanto

$$\Phi(r, z) = AJ_0\left(\frac{2.4048}{R}r\right) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad (6.17)$$

Aggiungiamo ora una barra di controllo centrale. Il B_g^2 si modifica attraverso attraverso il valore di α in quanto è presente una variazione nel raggio. Ricordiamo dalla teoria ad un gruppo d'energia l'espressione $B^2 = (K_\infty - 1)/M^2$. Tenendo conto della (6.16)

$$\begin{cases} K_0 = M^2(\alpha_0^2 + \beta^2) + 1 \\ K = M^2(\alpha^2 + \beta^2) + 1 \end{cases} \implies \Delta K = K - K_0 = M^2(\alpha^2 - \alpha_0^2) \quad (6.18)$$

Poniamo dalla fig. 6.1 $R' = R_0 - d$; allora abbiamo $\Phi(R') = \Phi(R_0 - d)$ e $\Phi(R) = 0$. Quindi

$$AJ_0(\alpha R) + CY_0(\alpha R) = 0 \implies C = -A \frac{J_0(\alpha R)}{Y_0(\alpha R)}$$

che sostituito in $\Theta(r)$ dà

$$\Theta(r) = A \left[J_0(\alpha R) - \frac{J_0(\alpha R)}{Y_0(\alpha R)} Y_0\left(\frac{2.4048}{R}r\right) \right] \quad (6.19)$$

Poniamo che sia $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$

$$J_0(\alpha R) = J_0(\alpha_0 R + \Delta\alpha R) = J_0(\alpha_0 R) + \frac{dJ_0(\alpha_0 R)}{d(\alpha_0 R)} \Delta\alpha R \quad (6.20)$$

ma si è posto che $J_0(\alpha_0 R) = 0$ e dunque

$$J_0(\alpha_0 R) = -J_1(\alpha_0 R) \Delta\alpha R \quad (6.21)$$

Dalla **tabella** delle funzioni di Bessel si legge

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$
2.2	0.1104	0.5560	0.5208
2.4	0.0025	0.5202	0.5104
2.4048	0.000	x	x

Per interpolazione si ha:

$$J_1(x = 2.4048) = 0.519, \quad Y_0(x = 2.4048) = 0.510$$

Notiamo che con il software Mathematica otteniamo immediatamente:

$$J_1(x = 2.4048) = 0.519153, \quad Y_0(x = 2.4048) = 0.509927 \quad (6.22)$$

E dunque la (6.21):

$$J_0(\alpha R) = -0.519 \Delta \alpha R \quad (6.23)$$

Dalle (6.22):

$$Y_0(\alpha R) \simeq Y_0(\alpha_0 R) = 0.510 \quad (6.24)$$

Per valori di r molto piccoli scriveremo

$$J_0(\alpha r) \simeq 1, \quad Y_0(\alpha r) = -\frac{2}{\pi} \left(0.116 + \ln \frac{1}{\alpha r} \right) \quad (6.25)$$

In tal modo la (6.19) diventa:

$$\Theta(r) = A \left[1 - \frac{2.44 \Delta K}{\pi M^2 \alpha_0^2} \left(0.116 + \ln \frac{1}{\alpha r} \right) \right] \quad (6.26)$$

Ricordiamo che $\Theta(R) = 0$. Allora

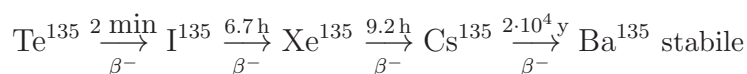
$$\Delta K = \frac{\pi M^2 \alpha_0^2}{2.44} \frac{1}{\left(0.116 + \ln \frac{1}{\alpha R'} \right)} = 7.5 \frac{M^2}{R^2} \frac{1}{\left(0.116 + \ln \frac{1}{\alpha R'} \right)} \quad (6.27)$$

Ponendo $\alpha \simeq \alpha_0$

$$\Delta K \simeq 7.5 \frac{M^2}{R^2} \frac{1}{\left(0.116 + \ln \frac{1}{2.4048 R'} \right)} \quad (6.28)$$

6.6 Prodotti di fissione. Veleni

Esempio di decadimento di un prodotto di fissione:



Assumiamo come capostipite lo Iodio I^{135} , perché la mezza-vita del Tellurio Te^{135} è troppo piccola. L'indice 1 indicherà lo iodio, l'indice 2 lo xeno. Indichiamo con I = atomi di iodio/cm³s. L'equazione di bilancio è:

$$\frac{dI}{dt} = -\lambda_1 I - \Sigma_{a_1} \Phi + \Sigma_f \Phi \gamma_1 \quad (6.29)$$

dove $\Sigma_{a_1} = \sigma_{a_1} I$, γ_1 = atomi di I^{135} /fissione; $\sigma_{a_1} = 7$ barns, $\lambda_1 = 2.9 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $\sigma_{a_1} \Phi \simeq \lambda_1$. Pertanto possiamo scrivere:

$$\frac{dI}{dt} = -\lambda_1 I + \Sigma_f \Phi \gamma_1 \quad (6.30)$$

Integriamo la (6.30) dopo aver posto

$$I_0 = \frac{\Sigma_f \gamma_1 \Phi_0}{\lambda_1}$$

Quindi

$$I(t) = e^{-\lambda_1 t} \left(\Sigma_f \gamma_1 \int_0^t \Phi e^{\lambda_1 t'} dt' + I_0 \right) \quad (6.31)$$

I¹³⁵ – Start up Supponiamo che il flusso Φ si porti a regime più rapidamente di I . Allora si potrà ritenere $\Phi \simeq \text{costante}$, e posto $I_0 = I(t = +\infty) = I_\infty$ si ha:

$$I(t) = I_0 (1 - e^{-\lambda_1 t}) \quad (6.32)$$

I¹³⁵ – Shut down Si ripropone la (6.31) con $I_0 = I(t = 0)$. Esaminiamo lo Xe^{135} . La sua equazione di bilancio è:

$$\frac{dXe}{dt} = \lambda_1 I + \gamma_2 \Sigma_f \Phi - \lambda_2 Xe - \sigma_{a_2} Xe \Phi \quad (6.33)$$

Posto

$$Xe_0 = \frac{\lambda_1 I + \gamma_2 \Sigma_f \Phi_0}{\lambda_2 Xe + \sigma_{a_2} Xe \Phi_0} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \Sigma_f \Phi_0}{\lambda_2 + \sigma_{a_2} \Phi_0} \quad (6.34)$$

Integrando si ottiene

$$Xe(t) = Xe_0 \left[1 + \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \left(\frac{\gamma_1 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1 + \sigma_{a_2} \Phi_0} - \gamma_2 \right) \right] \exp [- (\lambda_2 + \sigma_{a_2} \Phi_0) t] \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \text{avvelenamento} = P_0 &= \frac{\text{neutroni termici assorbiti dai veleni}}{\text{neutroni termici assorbiti dal combustibile}} \\ &= \frac{\Sigma_p}{\Sigma_u} = \frac{\sigma_{a_2} Xe_0}{\Sigma_u} = \frac{\sigma_{a_2} (\gamma_1 + \gamma_2) \Sigma_f \Phi_0}{(\lambda_2 + \sigma_{a_2} \Phi_0) \Sigma_u} \end{aligned}$$

$\sigma_{a_2} = 3.5 \cdot 10^6 \text{ barns}$, $\lambda_2 = 2.1 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 0.059$, $\frac{\Sigma_f}{\Sigma_u} = 0.84$. Posto $\Phi_0 \simeq 10^{11}$ neutron $\text{f/cm}^2 \text{ s}$ si ottiene

$$P_0 \simeq 8 \cdot 10^{-15} \Phi_0$$

Posto $\Phi_0 \simeq 10^{15}$ neutron $\text{f/cm}^2 \text{ s}$ possiamo scrivere

$$P_{\text{lim}} = (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\Sigma_f}{\Sigma_u} = 0.05 \quad \text{disponendo di } \text{U}^{235}$$

Questo è il valore massimo per l'avvelenamento durante il funzionamento: circa il 5% dei neutroni termici sono assorbiti dal veleno. Riassumiamo nella seguente tabella

Φ_0	P_0
10^{12}	0.7/100
10^{13}	3/100
10^{14}	4.6/100
10^{15}	4.8/100

Il legame esistente tra avvelenamento calcolato e reattività ρ del reattore può essere derivato come segue. Dei quattro fattori componenti il K_∞ solo f può considerarsi variato

a causa dei veleni. Quindi, se il leakage di neutroni non è influenzato dai veleni, K sarà proporzionale a f .

$$f = \frac{1}{1 + \Sigma_m/\Sigma_u} \text{ relativo a combustibile e moderatore}$$

$$f^* = \frac{1}{1 + \Sigma_m/\Sigma_u + P} \text{ relativo anche ai veleni}$$

e dunque

$$\frac{K_{eff}^* - K_{eff}}{K_{eff}^*} = \frac{f^* - f}{f^*} = -\frac{P}{1 + \Sigma_m/\Sigma_u}$$

Se il reattore è critico senza veleni ($K_{eff} = 1$) allora l'ultima relazione diventa equivalente alla reattività ρ senza veleni:

$$\rho = -\frac{P}{1 + \Sigma_m/\Sigma_u}$$

Xe¹³⁵ – Shut down

Dopo lo shut down del reattore il decadimento dello Iodio prosegue aumentando così la concentrazione di Xe¹³⁵. La figura 6.2, richiamando un impianto idraulico, spiega intuitivamente gli eventi.

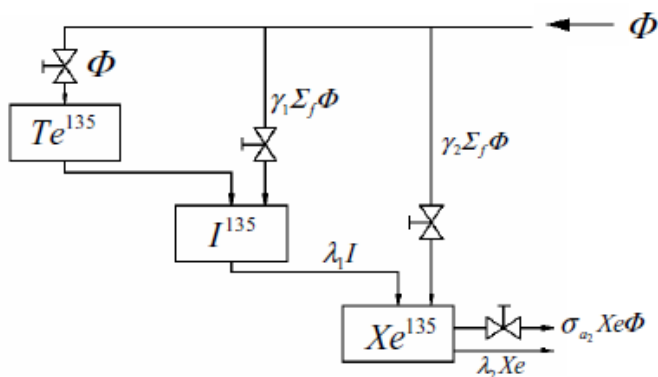


Figura 6.2: Shut down di Xe¹³⁵.

6.7 Coefficiente di temperatura nucleare. Stabilità intrinseca di un reattore

Consideriamo un reattore composto soltanto di combustibile e moderatore e assumiamo che la sezione d'urto d'assorbimento σ_a , nelle regioni termiche, segua la legge $1/V$ dove V è la velocità. Abbiamo già visto che

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{3}{2}kT$$

dove k è la costante di Boltzmann. Segue

$$\frac{1}{V} = \sqrt{\frac{m}{3kT}}$$

quindi

$$\sigma_a = \text{costante} \cdot T^{-1/2}$$

cosicché posto $\sigma_{a_0} = \text{costante} \cdot T_0^{-1/2}$ si ha

$$\sigma_a = \sigma_{a_0} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} = \sigma_{a_0} \theta^{-1/2}, \quad \text{dove } \theta = \frac{T}{T_0} \quad (6.36)$$

La sezione d'urto di scattering σ_s non varia così rapidamente con la crescita della temperatura; supponiamo sia

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \frac{1}{3} \frac{\lambda_{tr}}{\Sigma_a} = \frac{1}{3} \frac{1}{\Sigma_a \Sigma_{tr}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\Sigma_{a_0} \Sigma_{tr}} \frac{1}{\theta^{-(1/2+x)}} \implies L^2 = L_0^2 \theta^{x+\frac{1}{2}} \quad (6.37)$$

esistendo per l'età di Fermi τ (vedi sezione 5.1 o questo [link](#)):

$$\tau = \frac{1}{3\xi} \int_0^u \lambda_{tr}(u) \lambda_s(u) du = \frac{1}{3\xi} \int_0^{u_{th}} \frac{du}{\Sigma_{tr} \Sigma_s} = \frac{1}{3\xi} \int_0^{u_{th_0}} \frac{du}{\Sigma_{tr} \Sigma_s} + \frac{1}{3\xi} \int_{u_{th_0}}^{u_{th}} \frac{du}{\Sigma_{tr} \Sigma_s} \quad (6.38)$$

Supponiamo che sia $|x| \simeq 1$ (il suddetto esponente di θ); per la τ possiamo scrivere

$$\tau = \tau_0 - \frac{1}{3\xi} \int_{E_{th_0}}^{R_{th}} \frac{1}{\Sigma_{tr} \theta^{-x} \Sigma_{s_0} \theta^{-x}} \frac{dE}{E} \quad \text{dove } E = \frac{3}{2} kT \implies dE = \frac{3}{2} k dT \quad (6.39)$$

$$\tau = \tau_0 - \frac{1}{3\xi} \int_1^\theta \frac{1}{\Sigma_{tr} \Sigma_{s_0} \theta^{-2x}} \frac{d\theta}{\theta} \quad (6.40)$$

Sviluppando in serie di Mac-Laurin

$$\frac{1}{\theta^{-x}} = 1 + \ln \theta + \dots$$

otteniamo

$$\tau = \tau_0 - \frac{1}{3\xi \Sigma_{tr} \Sigma_{s_0}} \int_1^\theta (1 + \ln \theta) d\theta = \tau_0 - \frac{1}{3\xi \Sigma_{tr} \Sigma_{s_0}} \ln \theta \quad (6.41)$$

Allora la reattività $\rho(T)$ è

$$\rho = \frac{K-1}{K} - B^2 \left[\tau_0 - \frac{1}{3\xi \Sigma_{tr} \Sigma_{s_0}} \ln \theta + L_0^2 \theta^{x+\frac{1}{2}} \right] \quad (6.42)$$

Supposta la densità dei materiali $d = \text{costante}$, possiamo scrivere il **coefficiente di temperatura nucleare**

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{d=\text{cost}} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial T} = \frac{1}{T_0} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \quad (6.43)$$

Se $\frac{\partial \rho}{\partial T} < 0$ **il reattore è intrinsecamente stabile**; se $\frac{\partial \rho}{\partial T} > 0$ **il reattore non è intrinsecamente stabile**.

Vediamo ora l'influenza della temperatura T sulla densità d .

L'aumento di temperatura causa un'espansione dei materiali del reattore; ciò influisce sulla reattività in due modi: primo cambiando λ_a e λ_s , secondo cambiando le dimensioni del sistema. La Σ_a è proporzionale alla q.tà atomi/unità di volume: $\Sigma_a = \sigma_a N = \sigma_a \frac{N_{Av}}{A} d$. Dalla definizione di $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \frac{DA}{\sigma_a N_{Av} d}$ e della τ si può mostrare che

$$L^2 + \tau^2 = L_0^2 \left(\frac{d_0}{d} \right)^2 + \tau_0 \left(\frac{d_0}{d} \right)^2 \implies M^2 = M_0^2 \left(\frac{d_0}{d} \right)^2 \quad (6.44)$$

Ricordando la relazione della reattività

$$\rho = \frac{K - 1 - M^2 B^2}{K}$$

possiamo scrivere

$$\rho = \frac{K - 1}{K} - \frac{B^2}{K} M_0^2 \left(\frac{d_0}{d} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{B^2, \sigma_a, \sigma_s} = \frac{2B^2 M_0^2}{K} \frac{d_0^2}{d^3} \frac{\partial d}{\partial T} \quad (6.45)$$

Indicato con α il coefficiente di dilatazione termica del materiale sappiamo dalla **Fisica Tecnica** che

$$\begin{aligned} l &= l_0 + \alpha l_0 (T - T_0) = l_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \\ \Rightarrow \text{volume} &= V = V_0 [1 + \alpha (T - T_0)]^3 \end{aligned}$$

cosicché

$$d = \frac{d_0}{[1 + \alpha (T - T_0)]^3} \Rightarrow \frac{\partial d}{\partial T} = -\frac{3\alpha d}{[1 + \alpha (T - T_0)]^4} \quad (6.46)$$

che sostituita nella (6.45) dà

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{B^2, \sigma_a, \sigma_s} = -\frac{6B^2 M_0^2 d_0^3}{K} \frac{\alpha}{d^3 [1 + \alpha (T - T_0)]^4} \quad (6.47)$$

che per $T = T_0$ diventa

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T=T_0} = -\frac{6\alpha B^2 M_0^2}{K} = -6\alpha \frac{K - 1}{K} \quad (6.48)$$

e dunque in funzione delle dimensioni si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{2B^2 M^2}{K} = -\frac{2}{B} \frac{K - 1}{K} \quad (6.49)$$

Esempio 10 Si abbia un reattore moderato con grafite (C) operante a 400 K e per il quale si abbia $K = 1.05$ e un fattore di utilizzazione termica $f = 0.90$. Si avrà allora:

$$L^2 = 2850 \Rightarrow L_0^2 = 2850 \cdot 0.90 = 285 \text{ cm}^2$$

L'età di Fermi è essenzialmente quella del moderatore, cioè 350 cm². Dunque:

$$M_0^2 = L_0^2 + \tau_0^2 = 635 \text{ cm}^2 \Rightarrow B^2 \simeq \frac{K - 1}{M_0^2} = 7.874 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2$$

Supposto

$$\frac{1}{\xi \Sigma_s \Sigma_{tr}} = 1.38 \quad \alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C} \Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_d = -2.6 \cdot 10^5 / ^\circ\text{C}$$

Appendice A

Applicazioni dell'Analisi vettoriale

A.1 Equazione del bilancio

In un numero precedente abbiamo definito il flusso di neutroni $\Phi(\mathbf{x}, t)$ come il numero di neutroni che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo. Possiamo dunque associare a tale campo scalare la grandezza vettoriale *densità di corrente* $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$, tale che comunque prendiamo un elemento di superficie dS di versore normale $\mathbf{n}$, il prodotto scalare

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.1})$$

è pari al numero di neutroni che attraversano dS nell'unità di tempo. Ne segue il flusso elementare

$$d\Phi = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.2})$$

Quindi

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.3})$$

Dall'[Analisi vettoriale](#) sappiamo che la grandezza $\Phi(\mathbf{x}, t)$ così definita, è il flusso del vettore $\mathbf{j}$ attraverso la superficie S . Nel caso particolare di una superficie chiusa, deve essere

$$\frac{dN_V}{dt} = -\Phi(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.4})$$

dove $N_V(\mathbf{x}, t)$ è il numero di neutroni nel volume V racchiuso da S (fig. [A.1](#)).

Infatti, se $N_V(\mathbf{x}, t)$ è monotonamente crescente in funzione del tempo t , ci deve essere un flusso entrante di neutroni cosicché il vettore $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ è (in media) orientato verso l'interno del volume e il prodotto scalare nell'integrando della [A.3](#) è negativo. La [\(A.4\)](#) è valida in assenza di processi di creazione/assorbimento di neutroni. In quest'ultimo caso dobbiamo aggiungere una velocità di creazione/assorbimento $\Theta_V(t)$:

$$\frac{dN_V}{dt} = -\Phi(\mathbf{x}, t) + \Theta_V(t) \quad (\text{A.5})$$

D'altra parte, se $n(\mathbf{x}, t)$ è la densità del numero di neutroni al tempo t :

$$\frac{d}{dt} \int_V n(\mathbf{x}, t) d^3x + \int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS = \Theta_V(t) \quad (\text{A.6})$$

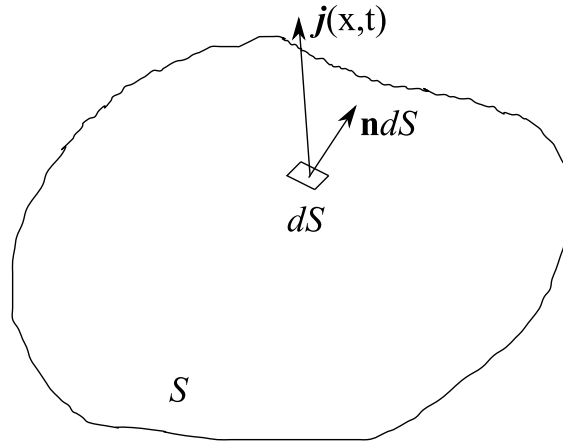


Figura A.1: Il campo vettoriale $\mathbf{j}(x, t)$ definisce la densità di corrente neutronica, nel senso che il prodotto scalare è il numero di neutroni che attraversano dS nell'unità di tempo. Se il prodotto scalare è positivo, i neutroni “escono” dal volume V , attraverso dS . Nel caso contrario, entrano nel volume.

La (A.6) è l'**equazione del bilancio** per il flusso di neutroni attraverso S . Tale equazione può essere riscritta in termini differenziali utilizzando il **teorema della divergenza**:

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) d^3x,$$

cosicché

$$\int_V \frac{\partial n}{\partial t} d^3x + \int_V \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) d^3x = \int_V \gamma(\mathbf{x}, t) d^3x$$

avendo definito la *densità di velocità di creazione/assorbimento di neutroni*:

$$\Theta_V(t) = \int_V \gamma(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (\text{A.7})$$

Segue

$$\int_V \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \gamma(\mathbf{x}, t) \right] d^3x = 0$$

L'arbitrarietà della superficie chiusa S e quindi, del volume V , implica

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \gamma(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{A.8})$$

che è la predetta equazione del bilancio in forma differenziale. Tale equazione esprime localmente il bilancio tra neutroni entranti/uscenti e creati/assorbiti.

Appendice B

Armoniche sferiche. Polinomi di Legendre

B.1 Funzioni di quadrato sommabile sulla sfera unitaria

Siano (θ, φ) le variabili angolari di un sistema di **coordinate sferiche**; denotiamo con $L^2(S_2)$ l'insieme delle funzioni di quadrato sommabile

$$\begin{aligned} f &: S_2 \rightarrow \mathbb{C} \\ f &: (\theta, \varphi) \rightarrow f(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

definite sulla sfera unitaria:

$$S_2 : r = 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\text{B.2})$$

Per quanto precede, è richiesta la sommabilità del modulo quadro:

$$\int_{4\pi} |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega < +\infty \quad (\text{B.3})$$

dove $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ è l'angolo solido elementare, mentre l'integrazione è estesa all'angolo solido totale (4π) . Precisamente:

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega < +\infty \quad (\text{B.4})$$

Come è noto, l'insieme $L^2(S_2)$ può essere strutturato come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, introducendo le usuali operazioni di addizione di vettori e la moltiplicazione di uno scalare per un vettore, con relativi assiomi. Introducendo il prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle = \int_{4\pi} f(\theta, \varphi) g^*(\theta, \varphi) d\Omega, \quad \forall f, g \in L^2(S_2) \quad (\text{B.5})$$

$L^2(S_2)$ assume una struttura di **spazio di Hilbert**, una cui base ortonormale è data dalle **armoniche sferiche**:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = N_{lm} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (\text{B.6})$$

dove:

N_{lm} è una costante di normalizzazione, e $l = 0, 1, 2, \dots, +\infty$, mentre per un assegnato l l'indice m assume i seguenti $2l + 1$ valori $m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$;

$P_l^m(\cos \theta)$ sono le **funzioni associate di Legendre**:

$$P_l^m(\xi) = (-1)^m (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi) \quad (\text{B.7})$$

essendo $P_l(\xi)$ i **polinomi di Legendre**:

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1) \quad (\text{grado } l, \text{ parità di } l) \quad (\text{B.8})$$

La costante di normalizzazione è data da:

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \quad (\text{B.9})$$

Il sistema $\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$ è ortonormale e completo.

$$\int_{4\pi} Y_l^m(\theta, \varphi) Y_{l'}^{*m'}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

dove $\delta_{ll'}$ è il simbolo di Kronecker. La completezza garantisce che ogni elemento dello spazio funzionale $L^2(S_2)$ può essere espresso come combinazione lineare degli elementi della base $\{Y_l^m(\theta, \varphi)\}$:

$$f(\theta, \varphi) \in L^2(S_2) \implies f(\theta, \varphi) = \int_{4\pi} c_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (\text{B.10})$$

dove c_{lm} sono le componenti del “vettore” $f(\theta, \varphi)$ nella predetta base:

$$c_{lm} = \int_{4\pi} f(\theta, \varphi) Y_l^{*m}(\theta, \varphi) d\Omega \quad (\text{B.11})$$

La (B.10) rappresenta lo sviluppo in armoniche sferiche di un'assegnata funzione $f(\theta, \varphi)$ di quadrato sommabile sulla sfera unitaria.

Bibliografia

- [1] Recami E.. *Il caso Majorana. Epistolario, documenti, testimonianze*. Mondadori
- [2] Weinberg A. M. Wigner E.P., 1958. *Physical Theory of Neutron Chain Reactors*.
- [3] Glasstone S., Sesonske A. *Nuclear Reactor Engineering*. International Student Edition
- [4] Spiga P., Vestrucci P., Magnavacca A. *Problemi di Fisica del reattore nucleare*. Pitagora Editrice Bologna