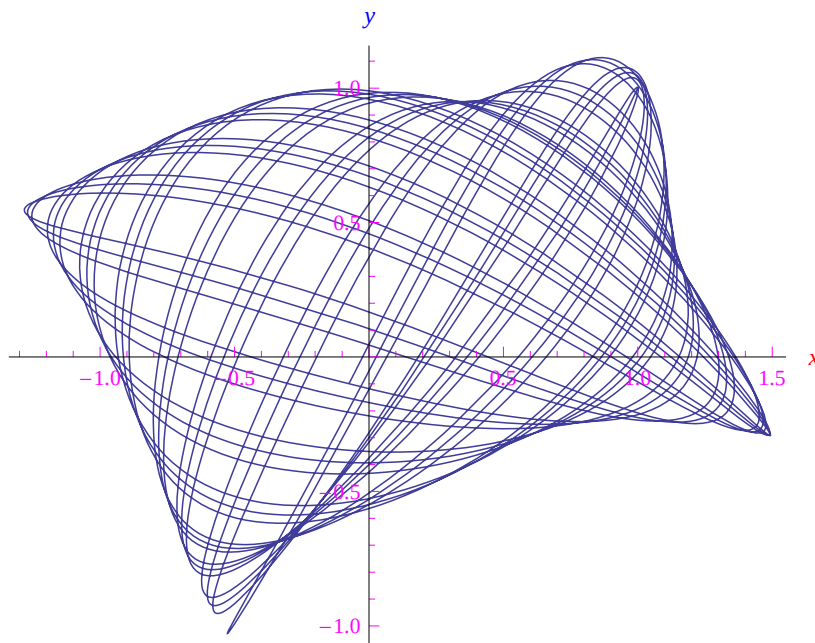


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Figure di Lissajous

Marcello Colozzo



Indice

1	Composizione di moti armonici con pulsazione diversa	2
2	Pulsazione dipendente dal tempo	3
3	Il cuscino di Lassjous	5

1 Composizione di moti armonici con pulsazione diversa

Nel [lavoro precedente](#) abbiamo studiato la composizione di due moti armonici (secondo gli assi coordinati x, y) aventi la stessa pulsazione, ma con ampiezza e fase diverse.

Tale risultato può essere generalizzato considerando moti componenti con pulsazioni diverse:

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x), \quad y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y) \quad (1)$$

Mentre nel caso $\omega_x = \omega_y \equiv \omega$ il moto risultante (circolare) dalla composizione dei moti armonici (1) è periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, per $\omega_x \neq \omega_y$ è in generale non periodico, e la traiettoria è una curva aperta¹, ma comunque contenuta in una regione limitata del piano in cui si svolge il moto. Ad esempio, per $\omega_x = 2 \text{ rad/s}$ e $\omega_y = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ e angoli di fase $\varphi_x = \varphi_y = 0$, si ottiene la traiettoria graficata nelle figg. 1-2.

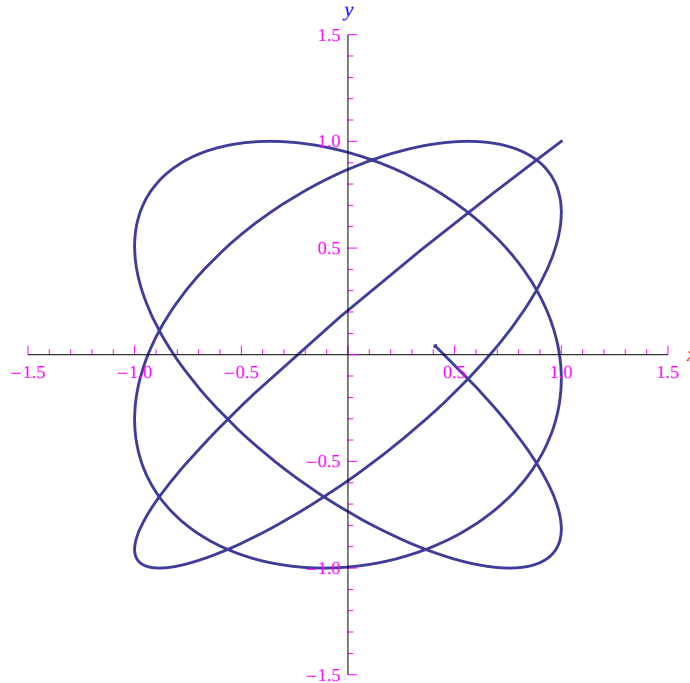


Figura 1: Composizione dei moti armonici $x = \cos 2t$, $y = \cos(\sqrt{3}t)$ nell'intervallo di tempo $[0, 10]$.

Se T_x, T_y sono i periodi dei singoli moti:

$$T_x = \frac{2\pi}{\omega_x}, \quad T_y = \frac{2\pi}{\omega_y}$$

Segue manifestamente

$$\left. \begin{array}{l} \text{Il moto risultante} \\ \text{è periodico} \end{array} \right) \iff \exists n_x, n_y \in \mathbb{N} - \{0\} \mid T_x n_x = T_y n_y, \quad (2)$$

dove T è il periodo del moto risultante. Passando alle pulsazioni, la condizione di periodicità (2) si scrive:

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{n_y}{n_x} \quad (3)$$

¹La traiettoria può comunque essere una curva aperta e il corrispondente moto risulta periodico.

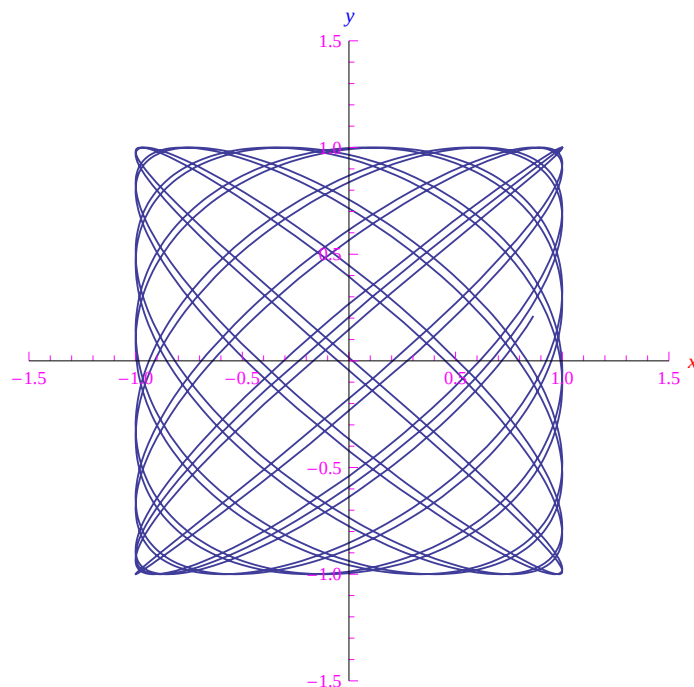


Figura 2: Composizione dei moti armonici $x = \cos 2t$, $y = \cos(\sqrt{3}t)$ nell'intervallo di tempo $[0, 50]$.

In altri termini, il moto risultante è periodico se e solo se il rapporto tra le pulsioni è al più un numero razionale.

Definizione 1 Per $\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{n_y}{n_x} \neq 1$ le corrispondenti traiettorie si chiamano **figure di Lissajous**.

Alcune figure di Lissajous notevoli si ottengono per

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

considerando una differenza di fase

$$\Delta\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi$$

Ad esempio per $\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2}{3}$ e $\Delta\varphi = \frac{3}{8}\pi$ otteniamo la traiettoria di fig. 3.

Per valori indicati precedentemente, otteniamo i grafici di fig. 4.

Un ulteriore esempio è dato dalla composizione

$$x = \cos(\sqrt{2}t), \quad y = \cos(\sqrt{\pi}t),$$

graficata in fig. 5.

2 Pulsazione dipendente dal tempo

In questo paragrafo ci proponiamo di studiare la composizione di due moti armonici con pulsazione dipendente dal tempo secondo una legge assegnata. Naturalmente, la traiettoria

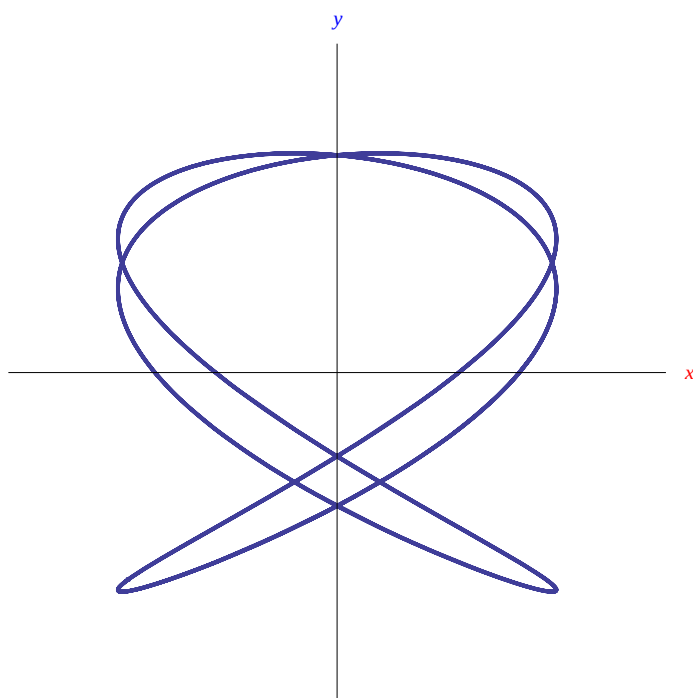


Figura 3: Figura di Lissajous per $\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2}{3}$ e $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{8}$.

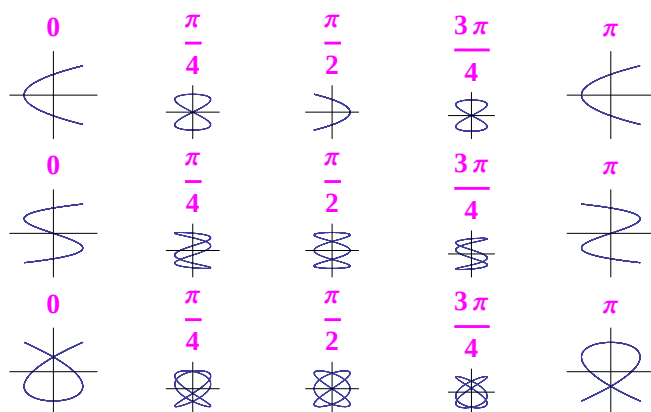


Figura 4: Figura di Lissajous notevoli.

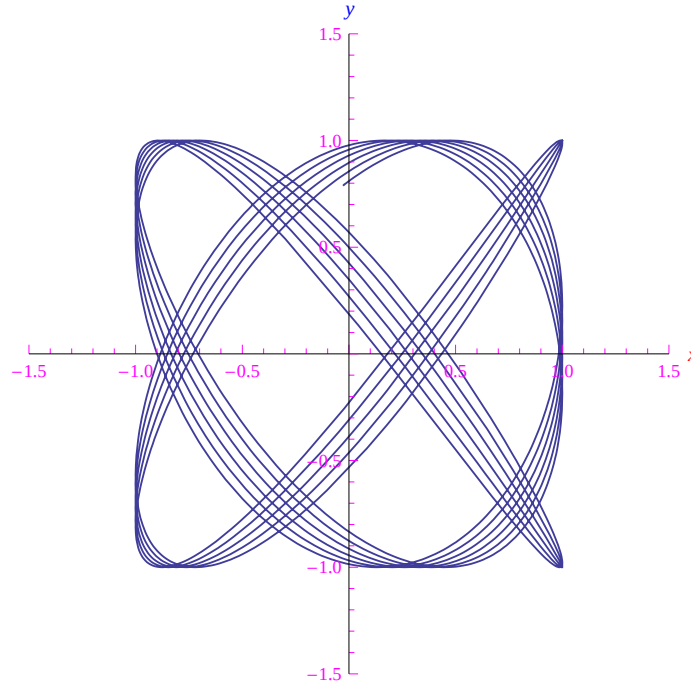


Figura 5: Figura di Lassjous ottenuta per $\frac{\omega_y}{\omega_x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ e $\Delta\varphi = 0$.

può essere esclusivamente ricostruita in software. In realtà, non si tratta di due moti armonici nel senso che i singoli moti componenti risolvono le seguenti equazioni differenziali

$$\ddot{x} + \omega_x(t)^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_y(t)^2 y = 0, \quad (4)$$

ove $\omega_x(t), \omega_y(t)$ sono funzioni assegnate. L'integrazione delle predette equazioni va eseguita numericamente, giacché si tratta di equazioni differenziali (lineari) del secondo ordine e a coefficienti variabili. In particolare, consideriamo

$$\ddot{x} + (2+t)x = 0, \quad \ddot{y} + (\pi+t)y = 0, \quad (5)$$

Integrando numericamente con *Mathematica* con la condizione iniziale

$$x(0) = y(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 1,$$

otteniamo la traiettoria graficata in fig. 6

3 Il cuscino di Lassjous

Un'ulteriore generalizzazione consiste nell'accoppiare le equazioni differenziali 4, attraverso due funzioni assegnate $f(y)$ e $g(x)$:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_x^2 x = f(y) \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y = g(x) \end{cases},$$

dove stiamo considerando pulsazioni stazionarie i.e. non dipendenti dal tempo. Ad esempio, per

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2x = y^2 \\ \ddot{y} + \pi y = x^2 \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 1, \quad (6)$$

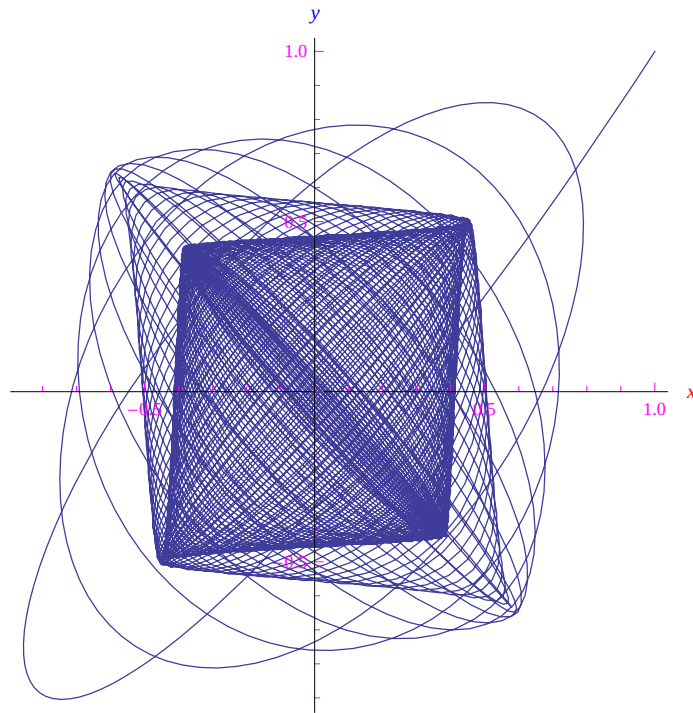


Figura 6: Figura di Lassjous nel caso di pulsazioni dipendenti dal tempo. Precisamente, le equazioni differenziali del moto sono le (5).

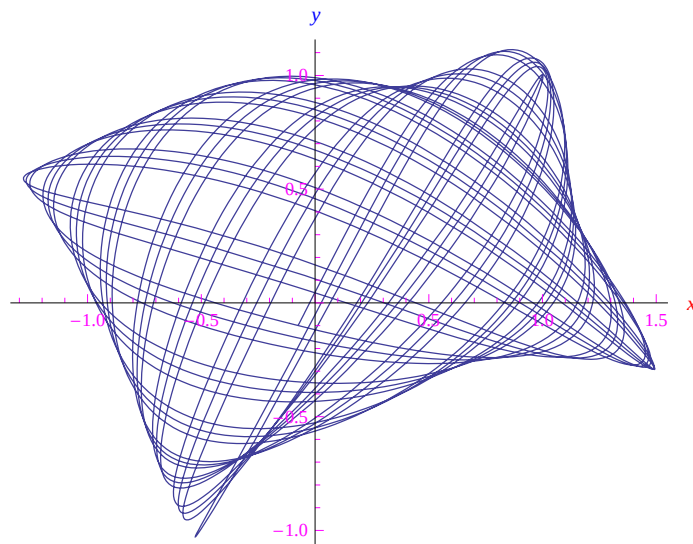


Figura 7: Figura di Lassjous quale traiettoria risultante dalla composizione di due moti unidimensionali governato dalle equazioni differenziali (6).

otteniamo il famoso *cuscino di Lassjous* graficato in fig. 7.

Riferimenti bibliografici

- [1] Halliday D. Resnick R., Krane K.S. *Fisica 1*. Ambrosiana, 2011.
- [2] Demidovic B.P., *Esercizi e problemi di analisi matematica*, 2010.
- [3] Sette D. Wanderlingh F. *Guida alla soluzione di problemi di fisica : meccanica, onde, termodinamica*, 1967