Appunti di Analisi 2

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

1 Fallimento del criterio del solo punto critico

Sia

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

una funzione reale della variabile reale x, definita nell'intervallo chiusto e limitato $[a, b]$.

Criterio 1 *Se $x \in (a, b)$ è punto di massimo relativo per f, e se non esistono altri punti critici, allora x_0 è punto di massimo assoluto.*

Tale criterio potrebbe cadere in difetto nel caso di funzioni di più variabili. Studiamo un esempio specifico proposto da [1]. Sia data la funzione

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y} \tag{1}$$

Determiniamo gli eventuali punti critici. Deriviamo

$$f_x(x, y) = 3e^y - 3x^2, \quad f_y(x, y) = 3xe^y - 3e^{3y},$$

per cui si tratta di risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^y - x^2 = 0 \\ xe^y - e^{3y} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Dalla seconda

$$e^y - e^{3y} = 0 \iff e^y\left(1 - e^{2y}\right) = 0 \underset{e^y \neq 0}{\iff} 1 - e^{2y} = 0 \iff y = 0,$$

che sostituita nella prima

$$x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$$

Apparentemente abbiamo le soluzioni $(-1, 0)$, $(+1, 0)$, ma solo quest'ultima è accettabile. Infatti:

$$\begin{cases} f_x(-1, 0) = 0 \\ f_y(-1, 0) = -6 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_x(1, 0) = 0 \\ f_y(1, 0) = 0 \end{cases}$$

Ne consegue l'esistenza di un solo punto critico: $(1, 0)$. Per stabilire la natura di tale punto, applichiamo il test dell'hessiano, eventualmente con Mathematica. A tale scopo calcoliamo le derivate seconde:

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 3e^y, \quad f_{yy}(x, y) = 3xe^y - 9e^{3y}$$

Segue

$$H(1, 0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(1, 0) & f_{xy}(1, 0) \\ f_{yx}(1, 0) & f_{yy}(1, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 27$$

Quindi $H(1, 0) > 0$ e $f_{xx}(1, 0) < 0$ per cui $(1, 0)$ è punto di massimo relativo. Il massimo relativo è

$$f(1, 0) = 1$$

Tuttavia:

$$f(-2, -2) \simeq 7.185 > f(1, 0),$$

per cui $(1, 0)$ non è punto di massimo assoluto. In fig. 1 riportiamo il grafico della funzione in $[-3, 2] \times [5, 1]$.

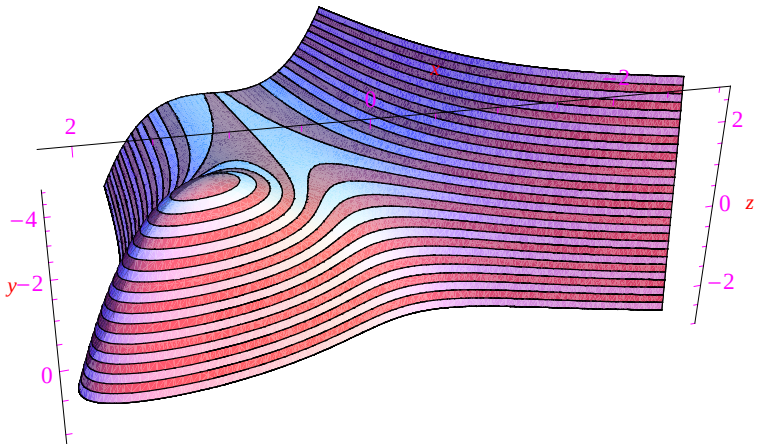


Figura 1: Grafico della funzione (1).

Riferimenti bibliografici

[1] S. Wagon, 1995. *Guida a Mathematica.* McGraw-Hill.

[2] Demodovic B.C., 1994. *Esercizi e problemi di Analisi Matematica.* Editori Riuniti.

[3] Fasano A., Marmi S. 1996. *Meccanica Analitica.* Boringhieri.