Iniettività locale di una funzione vettoriale

Marcello Colozzo

1 Definizione di rappresentazione parametrica regolare

L'esempio riportato in un numero precedente in realtà si riferisce a una rappresentazione *non* regolare. Infatti, una definizione rigorosa di regolarità è la seguente:

Definizione 1 *Una rappresentazione parametrica*

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\,\mathbf{e}_1 + y(t)\,\mathbf{e}_2 + z(t)\,\mathbf{e}_3, \quad t \in X \tag{1}$$

si dice **regolare** *se*

1. $\mathbf{x}(t) \in C^1(X)$
2. $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}, \ \forall t \in X$

Nel predetto esempio, la seconda condizione è violata. A questo punto, dobbiamo cercare di capire perché viene richiesta la condizione 2 che manifestamente equivale a dire che le derivate delle funzioni componenti non si annullano simultaneamente (cioè per lo stesso valore del parametro). Intuitivamente, affinché una rappresentazione sia regolare è sufficiente che la funzione vettoriale $\mathbf{x}(t)$ sia di classe C^1 su X, mentre la derivata $\mathbf{x}'(t)$ può tranquillamente avere degli zeri al finito. Mostriamo ora che la condizione 2 garantisce l'iniettività *locale* della funzione $\mathbf{x}(t)$. Premettiamo la definizione:

Definizione 2 *Una funzione vettoriale* $\mathbf{x}(t)$ *è* **localmente iniettiva** *se*

$$\forall t_0 \in X, \ \exists I_\delta(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \mid \mathbf{x}(t) \ \text{è iniettiva in } X \cap I_\delta(t_0)$$

È chiaro che

$$\mathbf{x}(t) \ \text{è iniettiva in } X \ \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \ \mathbf{x}(t) \ \text{è localmente iniettiva}$$

Cioè l'iniettività globale è condizione sufficiente (ma non necessaria) per l'iniettività locale. Ciò premesso, dimostriamo il teorema

Teorema 3 *Una funzione vettoriale* $\mathbf{x}(t)$ *tale che*

1. $\mathbf{x}(t) \in C^1(X)$
2. $\mathbf{x}'(t) \neq 0, \ \forall t \in X$

è localmente iniettiva.

Dimostrazione. Dalla rappresentazione cartesiana della funzione vettoriale $\mathbf{x}(t)$, e dalla definizione di derivata si ha

$$\mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \tag{2}$$

Per ipotesi, comunque prendiamo $t_0 \in X$, si ha

$$\mathbf{x}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq \mathbf{0} \tag{3}$$

Supponiamo, ad esempio, che sia $x'(t_0) \neq 0$. Segue

$$x'(t_0) \neq 0) \underset{x'(t) \text{ è continua}}{\Longrightarrow} \exists I_\delta(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \mid t \in X \cap I_\delta(t_0) \Longrightarrow x'(t) \neq 0 \tag{4}$$

Procediamo per assurdo:

$$\exists t_1, t_2 \in X \cap I_\delta(t_0) \mid x(t_1) = x(t_2) \underset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists \tau \in (t_1, t_2) \mid x'(\tau) = 0$$

che contraddice la (**??**), onde l'asserto. In fig. **??** è illustrata graficamente l'applicazione del teorema di Rolle. ■

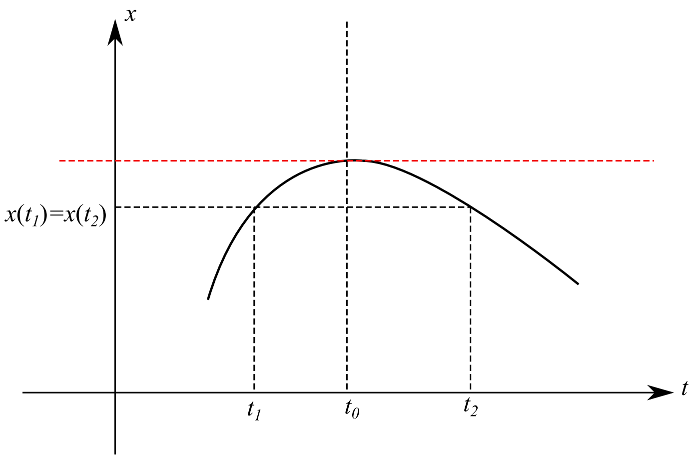

Figura 1: Dimostrazione del teorema **??**.

Si noti che il teorema non è invertibile. Cioè l'iniettività locale non implica $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0}$.