Estensione della formula di Riemann

Marcello Colozzo

Sia $N(x)$ il numero di interi naturali in $[0, x]$ verificanti una proprietà $\mathcal{P}$. Se m_n è l'n-esimo intero $\leq x$ verificante la predetta proprietà, si ha:

$$\lim_{x\to m_n^-} N(x) = n-1, \quad \lim_{x\to m_n^+} N(x) = n \tag{1}$$

per cui ogni intero m_n è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione $N(x)$.

Esempio 1 *Se la proprietà $\mathcal{P}$ consiste nell'essere numero primo:*

$$N(x) \equiv \pi(x) = \textit{numero di numeri primi} \leq x$$

$$\lim_{x\to p_n^-} \pi(x) = n-1, \quad \lim_{x\to p_n^+} \pi(x) = n,$$

dove p_n è l'n-esimo primo.

Sia $\Phi(x)$ di classe C^1 in $[0, +\infty)$ e tale che

$$\Phi(x) \leq N(x), \quad \forall x \in [0, +\infty) \tag{2}$$

Tentiamo lo sviluppo in serie della $N(x)$

$$N(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} f\left(x^{1/k}\right), \tag{3}$$

dove $\mu(k)$ è una funzione aritmetica nota come *funzione di Möbius*:

$$\mu(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k=1 \\ (-1)^r, & \text{se } k = p_1 p_2 \ldots p_r \text{ con } p_i \neq p_j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \tag{4}$$

mentre

$$f(x) = \Phi(x) - \sum_{\zeta(\rho)=0} \Phi(x^\rho),$$

essendo ζ la funzione zeta di Riemann. Nel caso speciale della $\pi(x)$ Riemann ha trovato lo sviluppo determinato da

$$f(x) = Li(x) - Li(x^\rho) \tag{5}$$

in accordo con le argomentazioni precedenti, giacché

$$Li(x) \geq \pi(x), \quad \forall x \in (2, \xi_0),$$

essendo $\xi_0 < 10^{371}$ il numero di Skewes. In effetti, nella (5) entrano altri termini che possono essere trascurati. Precisamente

$$-\ln 2 + \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}}_{\text{termine trascurabile}}$$

Proviamo ad applicare l'algoritmo appena esposto al caso della funzione parte intera di x che come è noto, esegue un conteggio di interi naturali $\leq x$:

$$N(x) = [x]$$

Come funzione maggiorante possiamo prendere la funzione identica

$$\Phi(x) = x,$$

onde

$$[x] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} \left[x^{1/k} - \sum_{\zeta(\rho)=0} x^{\rho/k} \right] \tag{6}$$

La convergenza sembra buona, come confermato dal grafico di fig. 1.

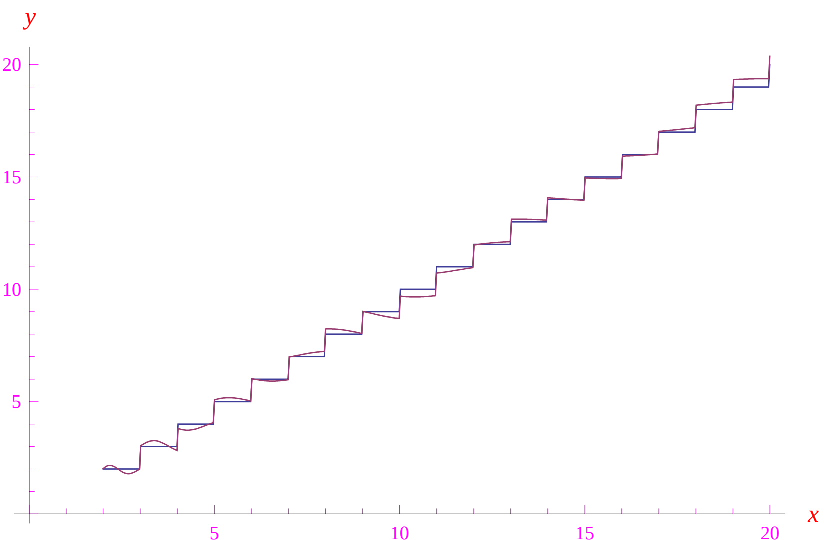

Figura 1: Andamento della funzione a gradini $N(x) = [x]$ confrontato con lo sviluppo *a la* Riemann, troncato a un termine di un assegnato ordine.