Esercizio di Meccanica quantistica

Marcello Colozzo

Esercizio 1 *La funzione d'onda iniziale di un pacchetto d'onde è*

$$\psi_0(x) = N e^{-\frac{\alpha}{2}|x|} e^{ik_0 x}$$

dove: $N > 0$ è una costante di normalizzazione; $\alpha > 0$ un parametro; k_0 un numero d'onde assegnato.

1. *Determinare la costante di normalizzazione.*
2. *Determinare la trasformata di Fourier $A(k)$ di $\psi_0(x)$.*
3. *Graficare $\mathrm{Re}\,\psi_0(x)$, $|\psi_0(x)|^2$, $|A(k)|^2$.*
4. *Verificare la relazione di indeterminazione $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$.*

Soluzione

Quesito 1

Deve essere

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 2\int_0^{+\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 2N^2 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{2N^2}{\alpha},$$

onde

$$N = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

Quesito 2

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}|x|} e^{-i(k-k_0)x} dx \end{aligned}$$

Calcolando l'integrale

$$A(k) = 2\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2 + 4(k-k_0)^2},$$

cioè una lorenziana centrata in k_0.

Quesito 3

In fig. 1 riportiamo il grafico di $\mathrm{Re}\,\psi_0(x)$ da cui vediamo che il profilo iniziale è un'oscillazione sinsusoidale modulata in ampiezza da $e^{-\frac{|\alpha|}{2}x}$. Nell figg. 2-3 riportiamo i grafici di $|\psi_0(x)|^2$, $A(k)$, $|A(k)|^2$.

Quesito 3

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi_0(x)|^2 dx = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha|x|} dx = 0 \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha|x|} dx \\ &= \frac{\alpha}{2} \left(\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{+\alpha x} dx + \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx \right) \end{aligned}$$

Calcolando gli integrali:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{\alpha^2}$$

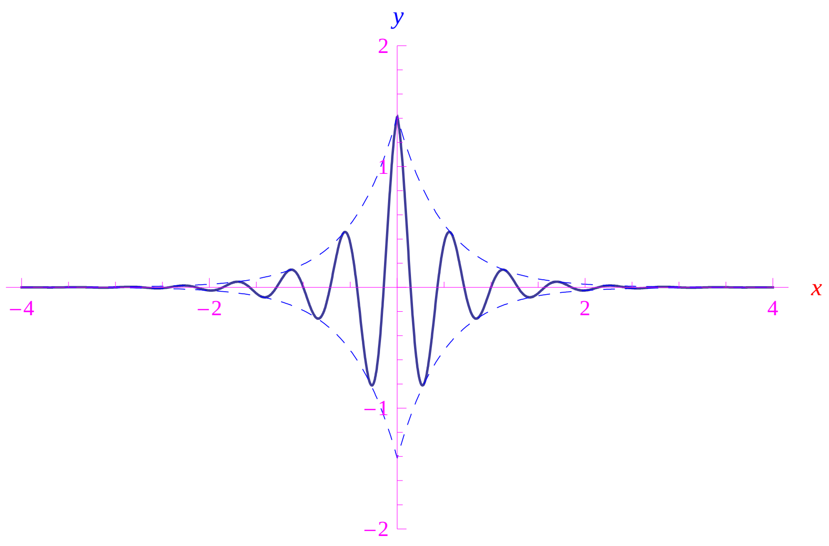

Figura 1: Grafico di $\mathrm{Re}\,\psi_0\,(x)$. Esercizio 1.

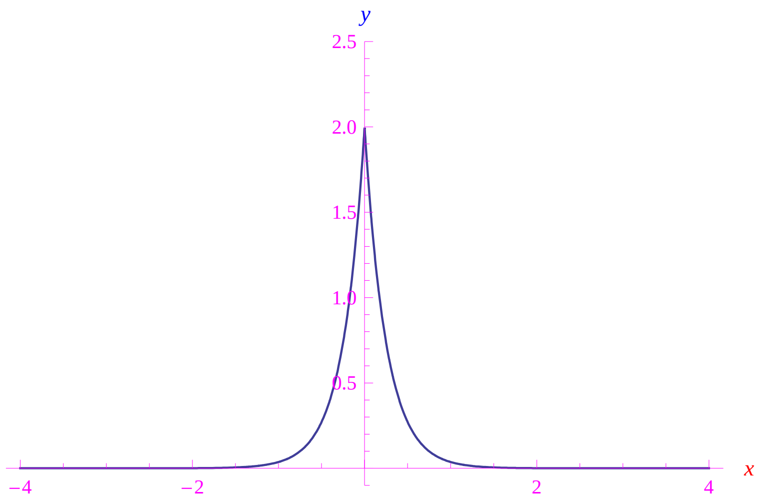

Figura 2: Grafico di $|\psi_0\,(x)|^2$. Esercizio 1.

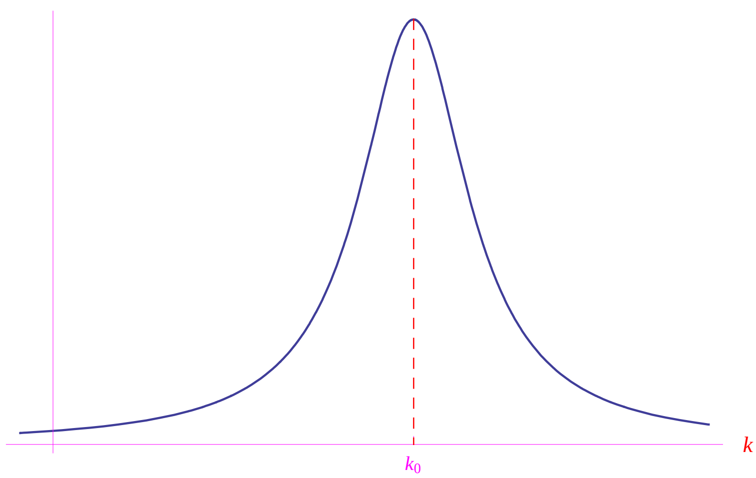

Figura 3: Grafico di $A\,(k)$. Esercizio 1.

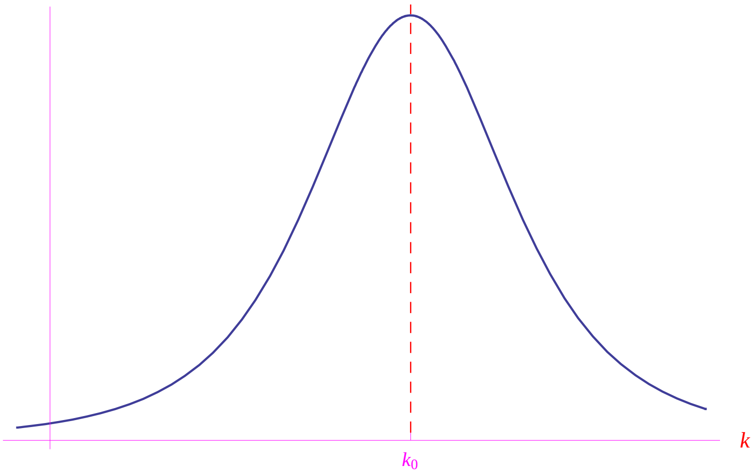

Figura 4: Grafico di $|A(k)|^2$. Esercizio 1.

Quindi l'indeterminazione sulla posizione

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \tag{1}$$

Come c'era da aspettarsi

$$\lim_{\alpha \to 0+} \Delta x = +\infty$$

Determiniamo Δk ovvero l'indeterminazione sull'impulso in unità $\hbar$:

$$\Delta k = \sqrt{\left\langle (k - \langle k \rangle)^2 \right\rangle}$$

Riesce manifestamente $\langle k \rangle = k_0$, per cui

$$\begin{aligned}(\Delta k)^2 = \left\langle (k - k_0)^2 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (k - k_0)^2 |A(k)|^2 dk \\ &= \frac{4\alpha^3}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k - k_0)^2}{\left[\alpha^2 + 4(k - k_0)^2\right]^2} dk\end{aligned}$$

Ponendo $\xi = k - k_0$

$$\begin{aligned}(\Delta k)^2 &= \frac{4\alpha^3}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2}{\left[\alpha^2 + 4\xi^2\right]^2} d\xi = \frac{\alpha^3}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\xi^2}{\left[\alpha^2 + 4\xi^2\right]^2} d\xi \\ &= \frac{\alpha^3}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\alpha^2 + 4\xi^2} - \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\alpha^2 + 4\xi^2)^2} \right] \\ &= \frac{\alpha^2}{4}\end{aligned}$$

Cioè

$$\Delta k = \frac{\alpha}{2}$$

Quindi

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} \tag{2}$$