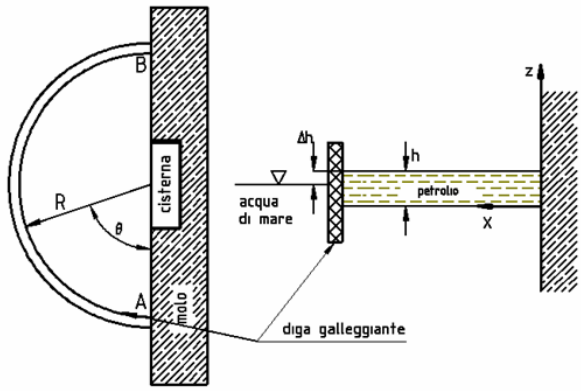
MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO
Quaderni di Matematica Applicata – 2021

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Esercizi di Meccanica dei fluidi

Ing. Giorgio Bertucelli



Esercizio 1 *Un tubo di sezione A come in fig. 1, contenente aria, è immerso in un liquido e posto in rotazione con velocità angolare ω. L'aria è considerata un gas perfetto di densità ρ_a a temperatura costante. Si ignorino capillarità e attrito lungo il tubo. Determinare l'altezza h del liquido nel tubo.*

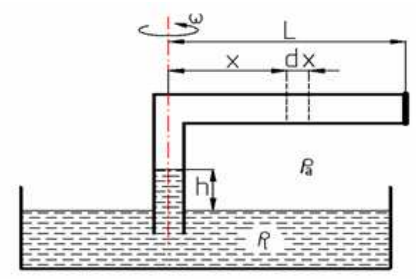


Figura 1: Esercizio 1.

Soluzione

La pressione p e la densità ρ_a non sono costanti nel tubo. Consideriamo un volume elementare $Adx = dV$.

$$[p(x+dx) - p(x)]\,A = \omega^2 x \rho_a A dx \Longrightarrow \frac{dp}{dx} = \omega^2 x \rho_a \tag{1}$$

Se μ_a è la massa molare dell'aria, si ha

$$pV = \frac{m}{\mu_a} R_u T \tag{2}$$

dove m =massa d'aria e R_u è la costante universale dei gas:

$$R_u = 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}} \tag{3}$$

Segue

$$pV = mRT, \qquad R = \frac{R_u}{\mu_a} \underset{\rho_a = \frac{m}{V}}{\Longrightarrow} p = \rho_a RT \Longrightarrow dp = RT d\rho_a \tag{4}$$

Quindi avremo

$$\frac{d\rho_a RT}{dx} = \omega^2 x \rho_a \Longrightarrow \frac{d\rho_a}{\rho_a} = \frac{\omega^2}{RT} x dx \tag{5}$$

Integrando

$$\ln \frac{\rho_a}{\rho_{a_0}} = \frac{\omega^2}{2RT} x^2, \qquad \rho_{a_0} = \text{densità dell'aria per } x = 0 \tag{6}$$

Posto

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{2RT}$$

abbiamo

$$\rho_a = \rho_{a_0} e^{\alpha x^2} \tag{7}$$

La quantità d'aria nel tubo sarà

$$\rho_a A L = \int_0^L \rho_{a_0} A e^{\alpha x^2} dx \Longrightarrow \rho_a L = \int_0^L \rho_{a_0} e^{\alpha x^2} dx \tag{8}$$

Ricordiamo la serie:

$$e^{\alpha x^2} = 1 + \left(\alpha x^2\right) + \frac{\left(\alpha x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(\alpha x^2\right)^3}{3!} + ..., \quad \text{dove } -\infty < \left(\alpha x^2\right) < +\infty$$

Per ω moderata, α sarà un numero molto piccolo, quindi:

$$e^{\alpha x^2} \simeq 1 + \alpha x^2$$

Pertanto scriveremo:

$$\rho_a L = \int_0^L \rho_{a_0} \left(1 + \alpha x^2\right) dx \Longrightarrow \rho_a L = \rho_{a_0} L + \frac{1}{3}\rho_{a_0}\alpha L^3 \tag{9}$$

Cioè

$$\rho_a = \rho_{a_0}\left(1 + \frac{1}{3}\alpha L^2\right) \Longrightarrow \rho_{a_0} = \rho_a \frac{1 - \frac{1}{3}\alpha L^2}{1 - \frac{1}{9}\alpha L^3} \simeq \rho_a \left(1 - \frac{1}{3}\alpha L^2\right) \tag{10}$$

Poichè per T=costante, la p è proporzionale a ρ, ne segue che la pressione per $x = 0$ è p_0:

$$p_0 \simeq p\left(1 - \frac{1}{3}\alpha L^2\right) \tag{11}$$

Nel tubo verticale in condizioni di equilibrio si ha

$$p = p_0 + gh\rho_f \Longrightarrow p = p - \frac{1}{3}p\alpha L^2 + ghp_f \Longrightarrow \frac{\alpha L^2}{3}p = ghp_f \tag{12}$$
$$\Longrightarrow h = \frac{\alpha L^2}{3gp_f}p \Longrightarrow h = \frac{\omega^2}{6RT}\frac{L^2}{gp_f}p \Longrightarrow h = \frac{\omega^2 L^2}{6g}\frac{\rho_a}{p_f}$$

Esercizio 2 *Un contenitore cilindrico di raggio R è posto in rotazione con velocità angolare ω costante. All'interno del contenitore si trova un liquido di densità ρ. La fig. 2 mostra la forma assunta dal liquido in condizioni di rotazione stazionaria. Scrivere l'equazione della superficie del liquido e studiare la distribuzione della pressione sapendo che p_a è la pressione atmosferica.*

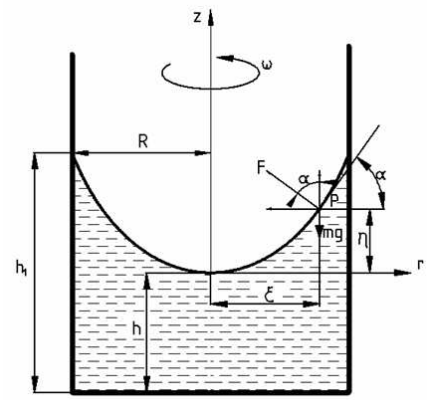


Figura 2: Esercizio 2.

Soluzione

La condizione di equilibrio delle forze nel punto generico P in cui è concentrata una massa m è:

$$F\cos\alpha = mg, \quad F\sin\alpha = m\omega^2\xi \Longrightarrow \tan\alpha = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\omega^2\xi}{g} \tag{13}$$

Integrando

$$\int d\eta = \int \frac{\omega^2\xi}{g} d\xi \Longrightarrow \eta = \frac{\omega^2\xi^2}{2g} \tag{14}$$

cioè una parabola in rotazione attorno all'asse z. L'altezza raggiunta dal liquido in rotazione è:

$$h_1 = h + \frac{\omega^2}{2g}R^2 \tag{15}$$

Se $S = \pi R^2$ l'area del cilindro e h_0 l'altezza del liquido quando non è in rotazione, scriveremo:

$$\begin{aligned} h_0 S = h_1 S - \int_0^{\frac{\omega^2}{2g}R^2} \pi\xi^2 d\eta = h_1 S - \int_0^R \frac{\pi\omega^2}{g}\xi^3 d\xi = \pi R^2\left(h_1 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right) \\ \Longrightarrow h_1 = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \Longrightarrow h = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \end{aligned} \tag{16}$$

La pressione assoluta ad un'altezza z dal fondo del cilindro è:

$$p(z) = p_a + (h_1 - z)\rho g = p_a + \left(h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} - z\right)\rho g \tag{17}$$

La pressione lungo l'asse z è

$$p_0(z) = p_a + (h - z)\rho g = p_a + \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} - z\right)\rho g \tag{18}$$

Esercizio 3 *Un ipotetico fluido ha la seguente equazione di stato*

$$p = \frac{1}{2}K\rho,$$

dove p e ρ sono rispettivamente pressione e densità, mentre K è una costante.

a) *Mostrare che in certe condizioni di equilibrio esiste una relazione tra densità e potenziale gravitazionale;*

b) *scrivere un'equazione differenziale che, in condizioni di equilibrio, sia risolta dalla densità;*

c) *assumendo una simmetria sferica, calcolare il raggio dell'oggetto astronomico.*

Soluzione

Quesito a

Si supponga che sul fluido agisca una forza $\mathbf{F}$. Consideriamo l'equilibrio di un elemento di volume $dV = dxdydz$. In direzione dell'asse x l'equilibrio delle forze è dato da:

$$\begin{aligned} F_x dV = [p(x+dx) - p(x)]\, dydz = \frac{\partial p}{\partial x} dV \\ \Longrightarrow F_x = \frac{\partial p}{\partial x} \Longrightarrow \mathbf{F} = \nabla p \end{aligned} \tag{19}$$

Poiché $\mathbf{F}$ è la forza per unità di volume, chiamiamo $\mathbf{f}$ la forza per unità di massa: $\mathbf{f} = \mathbf{F}/\rho$. Dall'equazione di stato della pressione possiamo scrivere

$$\nabla p = K\rho\nabla\rho \quad \text{e quindi } f = K\nabla\rho \tag{20}$$

Se la forza esterna è dovuta ad un potenziale gravitazionale $\not\phi$ scriveremo:

$$\mathbf{f} = -\nabla\phi \Longrightarrow \nabla\phi + K\nabla\rho = \mathbf{0} \Longrightarrow \phi + K\rho = \text{costante} \tag{21}$$

Pertanto tra potenziale e densità c'è una relazione lineare.

Quesito b

Ricordiamo l'equazione di Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \tag{22}$$

dove G è la costante di gravitazione universale. Dalla relazione lineare tra ϕ e ρ si ottiene:

$$\nabla^2\rho + \frac{4\pi G}{K}\rho = 0 \tag{23}$$

la cui condizione al contorno è $\rho = 0$ al bordo dell'oggetto.

Quesito c

Per la simmetria sferica, l'equazione (23) in coordinate sferiche

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\rho}{dr} + \frac{4\pi G}{K}\rho = 0 \tag{24}$$

che è un caso particolare dell'equazione di Lane-Emden. Posto

$$u = \rho r, \quad \omega^2 = \frac{4\pi G}{K}$$

avremo

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \omega^2 u = 0 \tag{25}$$

la cui soluzione è

$$u(r) = u_0 \sin(\omega r + \beta) \tag{26}$$

dalla quale si ottiene:

$$\rho = \frac{\rho_0 r_0}{r}\sin(\omega r + \beta) \tag{27}$$

La condizione al contorno è $\rho = 0$ per $r = R$ raggio dell'oggetto sferico, il che richiede

$$\omega r + \beta = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{28}$$

La densità è sempre positiva; dunque

$$\omega r + \beta \leq \pi \Longrightarrow n = 1 \text{ e } \omega r + \beta = \pi$$

Consideriamo

$$\mathbf{f} = K\nabla\rho = K\left[-\frac{\rho_0 r_0}{r}\sin(\omega r + \beta) + \frac{\rho_0 r_0}{r}\omega\cos(\omega r + \beta)\right]\mathbf{e}_r$$

essendo $\mathbf{e}_r$ il versore radiale. Segue

$$\mathbf{f} = -K\frac{\rho_0 r_0}{r}\cos(\omega r + \beta)\left[\tan(\omega r + \beta) - \omega r\right]\mathbf{e}_r$$

In virtù della simmetria è $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ per $r = 0$. Poniamo

$$\omega r + \beta = \xi$$

e ricordiamo lo sviluppo in serie

$$\tan\xi = \xi + \frac{\xi^3}{3} + \frac{2\xi^5}{15} + \frac{17\xi^7}{315} + \ldots \quad \text{per} \quad |\xi| < \frac{\pi}{2}$$

Perciò

$$\tan(\omega r + \beta) - \omega r = \beta + \frac{(\omega r + \beta)^3}{3} + \ldots \to 0 \quad \text{per } r \to 0$$

Quindi $\beta = 0$ e $\omega R = \pi$ che danno

$$R = \sqrt{\frac{\pi K}{4G}} \tag{29}$$

Esercizio 4 *Una stazione spaziale, riempita d'aria, ha la forma di un cilindro di raggio R_0 e lunghezza L. Il cilindro ruota attorno al suo asse ad una velocità angolare ω per fornire alla sua parete interna un'accelerazione g pari a quella presente sulla superficie terrestre. Se la temperatura T si mantiene costante come varia la pressione dell'aria dal centro alla parete del cilindro?*

Soluzione

Seguendo la fig. 3 scriveremo la condizione di equilibrio fra forza di pressione e forza centrifuga:

$$dp \cdot 2\pi r L = \omega^2 r \cdot 2\pi r L dr \cdot \rho \tag{30}$$

dove ρ è la densità dell'aria.

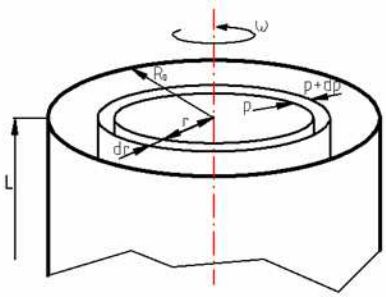


Figura 3: Esercizio 4.

Segue

$$dp = \omega^2 r dr \cdot \rho \tag{31}$$

Ricaviamo la densità dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p = \rho R_a T \Longrightarrow \rho = \frac{p}{R_a T}$$

Quindi

$$\frac{dp}{p} = \frac{\omega^2}{R_a T} r dr \Longrightarrow \int_{p(0)}^{p(R_0)} \frac{dp}{p} = \frac{\omega^2}{R_a T} \int_{l0}^{R_0} r dr \Longrightarrow \ln\left[\frac{p(R_0)}{p(0)}\right] = \frac{\omega^2 R_0^2}{2 R_a T} \tag{32}$$

Osserviamo che alla parete è $\omega^2 R_0 = g$; dunque:

$$p(R_0) = p(0) \exp\left(-\frac{R_0 g}{2 R_a T}\right) \tag{33}$$

Esercizio 5 *È noto che la Terra non è una sfera, perché presenta uno schiacciamento ai poli e un rigonfiamento all'equatore. Modellizzando la Terra attraverso un fluido incomprimibile di densità uniforme ρ, si chiede di determinare la differenza tra il raggio ai poli e il raggio all'equatore.*

Alcuni dati numerici: massa della Terra $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg. Raggio medio della Terra $R = 6366$ km.

Soluzione

Analizziamo in coordinate sferiche

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta \tag{34}$$

L'elemento di volume si scrive:

$$dV = ds_r ds_\theta ds_\phi$$

dove

$$ds_r = dr, \quad ds_\theta = r d\theta, \quad ds_\phi = r \sin\theta d\phi \tag{35}$$

Per facilità di analisi la fig. 4 viene ruotata attorno all'asse z di un angolo ϕ, ottenendo in tal modo la fig. 5; la variabile ϕ viene così accantonata.

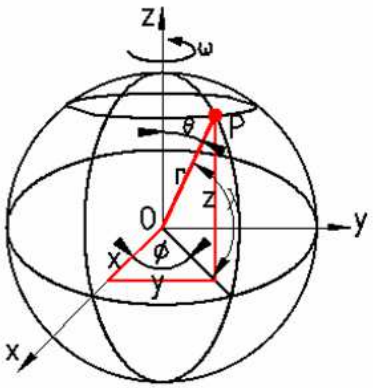


Figura 4: Esercizio 5.

Il vettore $OP = \mathbf{r}$ viene studiato nel piano $x'z'$. Si noti quindi che $d\theta = -d\lambda$. Sull'elemento di volume dV agiscono le forze: gravitazionale, centrifuga e di pressione idrostatica. Denotando con ρ la densità (costante):

$$\text{gravitazionale per unità di volume } F_{x'} = -\frac{\rho G M \cos\lambda}{r^2}, \quad F_{y'} = -\frac{\rho G M \sin\lambda}{r^2} \tag{36}$$

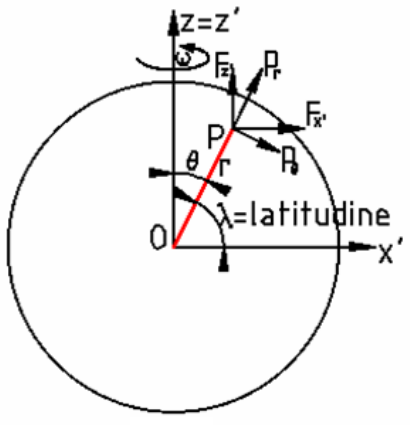


Figura 5: Esercizio 5.

$$\text{centrifuga per unità di volume } F_c = \rho\omega^2 r\cos\lambda \text{ (parallela all'asse } x') \tag{37}$$

$$\text{di pressione idrostatica: } \mathbf{P}_r + \mathbf{P}_\theta \Longrightarrow \begin{cases} |\mathbf{P}_r|_{x'} + |\mathbf{P}_\lambda|_{x'} = \frac{\partial p}{\partial r}\cos\lambda - \frac{\partial p}{r\partial\lambda}\sin\lambda \\ |\mathbf{P}_r|_{z'} + |\mathbf{P}_\lambda|_{z'} = \frac{\partial p}{\partial r}\cos\lambda - \frac{\partial p}{r\partial\lambda}\sin\lambda \end{cases} \tag{38}$$

Per l'equilibrio si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r}\cos\lambda - \frac{\partial p}{r\partial\lambda}\sin\lambda = -\frac{\rho GM\cos\lambda}{r^2} + \rho\omega^2 r\cos\lambda \\ \frac{\partial p}{\partial r}\cos\lambda - \frac{\partial p}{r\partial\lambda}\sin\lambda = -\frac{\rho GM\sin\lambda}{r^2} \end{cases} \tag{39}$$

Cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho\omega^2 r\cos^2\lambda - \frac{\rho GM}{r^2} \\ \frac{\partial p}{r\partial\lambda} = -\left(\frac{\rho GM}{r^2} + \frac{\partial p}{\partial r}\right)\tan\lambda \end{cases} \tag{40}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \int dp &= \rho\omega^2\cos\lambda\int_R^r r'dr' - \rho GM\int_R^r (r')^{-2}\,dr \\ \Longrightarrow p &= \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(r^2 - R^2\right)\cos\lambda + \rho GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

Per un punto P posto a una profondità h sotto la superficie della Terra abbiamo:

$$r = R - h, \quad r^2 - R^2 \simeq -2Rh, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \simeq \frac{h}{R^2}$$

In quest'ordine di approssimazione

$$p \simeq \left(-R\omega^2\cos^2\lambda + \frac{GM}{R^2}\right)\rho h \tag{42}$$

La superficie della Terra è una superficie equipotenziale. Il potenziale, ovvero l'energia potenziale per unità di massa, è la somma di quello gravitazionale Φ_G e di quello centrifugo Φ_c.

Forza gravitazionale

$$F_G = -G\frac{Mm}{R^2} \Longrightarrow \frac{F_G R}{m} = -G\frac{M}{R} \Longrightarrow \Phi_G = -G\frac{M}{R} \tag{43}$$

Forza centrifuga ad una fissata latitudine

$$\lambda = dF_c = \rho dV \cdot \omega r \cos\lambda$$

che proiettata sulla direzione di $\mathbf{r}$ e per unità di massa dà

$$\frac{dF_c}{\rho dV}\cos\lambda = d\Phi_c = \omega^2 r \cos^2\lambda \tag{44}$$

In coordinate sferiche il grad Φ_c è in funzione di $\frac{\partial\Phi_c}{\partial r}$ e $\frac{\partial\Phi_c}{r\partial\lambda}$. Si ha

$$\frac{\partial\Phi_c}{\partial r} = -\omega^2 r\cos^2\lambda$$

che integrata dà

$$\Phi_c = -\frac{1}{2}\omega^2 r\cos^2\lambda + f(\lambda)\,, \text{ dove } f(\lambda) \text{ è una «costante» di integrazione}$$

Inoltre

$$\frac{\partial\Phi_c}{r\partial\lambda} = \omega^2 r\sin\lambda\cos\lambda + \frac{1}{r}\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \omega^2 r\sin\lambda\cos\lambda \tag{45}$$

Quindi sulla superficie terrestre abbiamo:

$$\Phi_c + \Phi_G = -\frac{1}{2}\omega^2 r\cos^2\lambda + f(\lambda) - G\frac{M}{R} = \text{costante} \tag{46}$$

Ai poli si ha

$$\lambda = \pm\frac{\pi}{2}, \quad R = R_p$$

e avremo

$$\frac{1}{2}\omega^2 R^3\cos^2\lambda - G\frac{M}{R_p} + GM = 0 \tag{47}$$

All'equatore è

$$\lambda = 0, \quad R = R_e$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\omega^2 R_e^3 - G\frac{M}{R_p}R_e + GM = 0 \Longrightarrow \omega^2 R_e^3 = 2GM\left(\frac{R_e - R_p}{R_p}\right) \tag{48}$$

La deviazione dalla sfericità vale dunque:

$$\frac{R_e - R_p}{R_p} = \frac{\omega^2 R_e^3}{2GM}$$

Segue

$$R_e - R_p = \frac{\omega^2 R_e^3 R_p}{2GM} \underset{R_e^3 R_p \simeq R^4}{=} \left(\frac{2\pi}{3600\cdot 24}\right)^2 \cdot \frac{(6.366\cdot 10^6)^4}{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}} = 10.852\,\text{km} \tag{49}$$

Esercizio 6 *La comprimibilità K di un fluido si definisce come*

$$K = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} \tag{50}$$

dove dV è la crescita del volume dovuta alla crescita dp della pressione. L'aria a condizioni atmosferiche standard è circa 15000 volte più comprimibile dell'acqua.

a) *Usando un metodo a piacere si derivi la formula*

$$\frac{1}{v^2} = K\rho \tag{51}$$

dove v è la velocità del suono in un fluido di densità ρ.

b) *In condizioni standard la velocità del suono nell'aria è* $330\,\mathrm{m}/\mathrm{s}$. *Si supponga di riempire un certo volume d'acqua con minuscole bolle d'aria in grado di occupare solo* $1/100$ *del volume dato. Si trascuri l'effetto che hanno sulla densità della nuova miscela. Determinare la comprimibilità K della miscela e, in questa, la velocità v del suono.*

Soluzione

Quesito a

Di un certo volume di fluido, in quiete, sono noti pressione p, densità ρ e velocità del suono v. Se il fluido entra in una regione compressa, si ha:

$$p \to p + dp, \quad v \to v + dv, \quad \rho \to \rho + d\rho \tag{52}$$

La massa che nell'unità di tempo e per unità d'area assumerà nuova ρ e nuova v è:

$$\rho v = (\rho + d\rho)(v + dv) \Longrightarrow v d\rho = -\rho dv \tag{53}$$

La differenza di pressione $(p + dp) - p$ provocherà una differenza nella ρ e nella v:

$$p - (p + dp) = (\rho + d\rho)(v + dv) \cdot (v + dv) - \rho v \cdot v \tag{54}$$

Trascurando i termini di ordine superiore:

$$\begin{aligned} -dp &= (\rho + d\rho)\left(v^2 + 2vdv + d^2v\right) - \rho v^2 \Longrightarrow \\ dp &= \rho v^2 + 2\rho v dv + \rho d^2 v + v^2 d\rho + 2vdvd\rho + d^2 v d\rho - \rho v^2 \end{aligned} \tag{55}$$

Tenendo conto della (53):

$$dp = v^2 dp \tag{56}$$

Per una massa m di gas in un volume V scriveremo $m = \rho V$ da cui otteniamo

$$dm = d(\rho V) = 0 \Longrightarrow V d\rho + \rho dV = 0 \Longrightarrow d\rho = -\rho \frac{dV}{V}$$

che sostituito in (56) dà

$$dp = -\rho v^2 \frac{dV}{V} \Longrightarrow v^2 = -\frac{dp}{\rho}\left(\frac{dV}{V}\right)^{-1} = \frac{1}{K\rho} \Longrightarrow \frac{1}{v^2} = K\rho \tag{57}$$

Quesito b

Per la miscela di acqua+aria il K vale

$$K = -\frac{dV}{V dp} \tag{58}$$

Indichiamo con indici 1 e 2 l'acqua e l'aria

$$K = -\frac{dV_1 + dV_2}{V dp} = \frac{K_1 V_1 + K_2 V_2}{V} \Longrightarrow v_1^2 = \frac{1}{K_1 \rho_1}, \quad v_2^2 = \frac{1}{K_2 \rho_2} \tag{59}$$

Segue

$$\frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{1470}{330}\right)^2 \frac{1}{1.293 \cdot 10^{-3}} = 1.53 \cdot 10^4$$

Quindi per la miscela otteremo:

$$K = \left(\frac{V_1}{V} + \frac{K_2 V_2}{K_1 V}\right) K_1 = (0.99 + 153)\, K_1 \simeq 154 K_1$$

$$\Longrightarrow v = \sqrt{\frac{1}{K\rho}} \simeq \sqrt{\frac{1}{154 K_1 \rho}} = \frac{1470}{\sqrt{154}} = 118\,\mathrm{m/s}$$

Esercizio 7 *Un paracadutista di massa $m = 80\,\mathrm{kg}$ è in caduta libera; è sottoposto a una forza resistente proporzionale al quadrato della velocità $F_D = kv^2$ dove $k = 0.27\,\mathrm{N\,s^2/m^2}$. Trovare:*

a) *la velocità terminale v_t;*

b) *la distanza percorsa h fino a quando la velocità di caduta diventa $v = 0.95 v_t$.*

Soluzione

Quesito a

La velocità terminale è la velocità raggiunta da un corpo quando le forze agenti su di esso hanno risultante nulla, per cui il corpo non subisce più accelerazione:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \tag{60}$$

Per quanto precede, la velocità terminale si ha quando

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

Quindi

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}} = 53.91\,\mathrm{m/s} \tag{61}$$

Quesito b

Modifichiamo la (60) scrivendo $mg = kv_t^2$. Pertanto avremo

$$m\frac{dv}{dt} = kv_t^2 - kv^2 \Longrightarrow m\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = k\left(v_t^2 - v^2\right)$$

Ma $dz/dt = v$ quindi scriveremo

$$mvdv = k\left(v_t^2 - v^2\right) dz \Longrightarrow dz = \frac{m}{k}\frac{vdv}{v_t^2 - v^2}$$

Poniamo

$$v = uv_t \Longrightarrow dv = v_t du$$

Quindi:

$$dz = \frac{m}{k}\frac{uv_t \cdot v_t du}{v_t^2 - v^2} \Longrightarrow dz = \frac{m}{k}\frac{udu}{v_t^2 - v^2} \tag{62}$$

Integrando

$$h = \int_0^h dz = \frac{m}{k}\int_0^{0.95} \frac{d\left(1-u^2\right)}{1-u^2} = -\frac{m}{2k}\left[\ln\left(1-u^2\right)\right]_0^{0.95} = \frac{80}{2 \cdot 0.27}\left[\ln\left(1-0.95^2\right) - 0\right] = 345\,\mathrm{m}$$

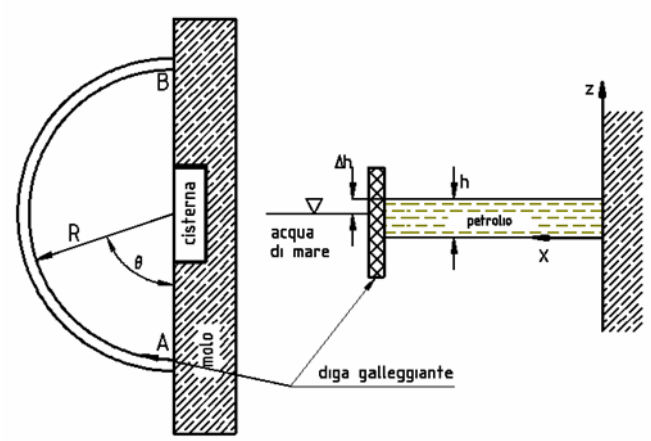


Figura 6: Esercizio 8.

Esercizio 8 *Una cisterna di petrolio è agganciata al molo ed è circondata da una diga galleggiante di dimensioni tali da contenere eventuali perdite della cisterna (fig. 6). Sono noti: il raggio R della diga, la densità dell'acqua di mare ρ_w e la densità del petrolio ρ_0.*

Assumendo che un volume V di petrolio sia uscito dalla cisterna, determinare:

a) *l'altezza finale dello strato di petrolio formatosi con l'uscita dalla cisterna;*

b) *la differenza Δh tra il livello dell'acqua e il livello del petrolio;*

c) *le forze applicate ai punti di congiunzione A e B tra diga e molo;*

d) *assumendo che la diga sia alta $H = h + 2h_2$ trovare la densità di galleggiamento della diga tale per cui questa superi in ugual misura il piano superiore e il piano inferiore dello strato di petrolio.*

Soluzione

Quesito a

L'altezza finale dello strato di petrolio è

$$h = \frac{2V}{\pi R^2} \tag{63}$$

Quesito b

La pressione della superficie libera dell'acqua è zero:

$$p_w\left(z = h - \Delta h\right) = 0$$

pertanto

$$\begin{cases} p_w = \rho_w g\left(h - \Delta h - z\right) \\ p_0 = \rho_0 g\left(h - z\right) \end{cases} \tag{64}$$

Per $z = 0$ scriveremo

$$\rho_w g\left(h - \Delta h\right) = p_0 = \rho_0 g h \Longrightarrow \Delta h = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_w}\right) h \tag{65}$$

Quesito c

Le forze orizzontali per unità di lunghezza del petrolio e dell'acqua sono:

$$f_0 = \int_0^h \rho_0 g\,(h-z)\,dz = \frac{\rho_0 g h^2}{2}, \quad f_w = \int_0^{h-\Delta h} \rho_w g\,(h-\Delta h-z)\,dz = \frac{\rho_w g\,(h-\Delta h)^2}{2} \tag{66}$$

Quindi

$$q = \frac{\rho_0 g h^2}{2}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_w}\right) \tag{67}$$

che è una forza positiva in direzione radiale: il petrolio spinge verso l'esterno.

Quesito d

Scriviamo la (67) scomponendo la forza q nelle sue componenti

$$q_x = q\sin\theta, \quad q_y = q\cos\theta \tag{68}$$

che si annulla nell'arco di estremi A e B per ragioni di simmetria. Quindi

$$Q = \int_0^\pi q\sin\theta \cdot R d\theta = 2qR \Longrightarrow Q_A = Q_B = qR \tag{69}$$

Quesito e

Si indichi con s lo spessore della diga. Il volume della diga necessario e sufficiente per lo sbarramento è:

$$V_{sbarr} = \pi R s H = \pi R s\,(h+h_2-\Delta h) \tag{70}$$

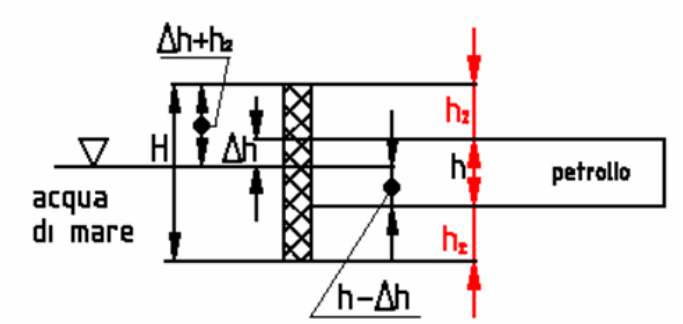


Figura 7: Esercizio 8.

La spinta di Archimede è:

$$F_{gall} = \rho_w g V_{sbarr} = \rho_w g \pi R s\,(h+h_2-\Delta h) \tag{71}$$

Il peso della diga è

$$P_{diga} = \rho_{diga} g \cdot \pi R s\,(h+2h_2) \tag{72}$$

Il galleggiamento si ottiene uguagliando la spinta di Archimede e il peso della diga:

$$\rho_w g \pi R s\,(h+h_2-\Delta h) = \rho_{diga} g \cdot \pi R s\,(h+2h_2)$$

da cui

$$\rho_{diga} = \rho_w \frac{h+h_2-\Delta h}{h+2h_2} \tag{73}$$

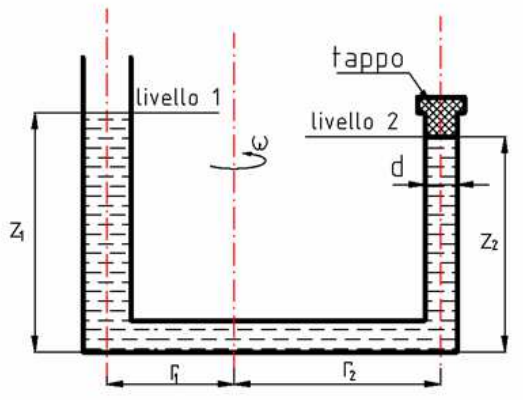


Figura 8: Esercizio 9.

Esercizio 9 *Un tubo come in fig. 8 è riempito di un liquido di densità ρ; un'estremità è chiusa da un tappo. La pressione atmosferica è p_a. Si determini:*

a) *la velocità angolare ω per conseguire una forza F tale che possa far saltare il tappo;*

b) *dopo un tempo sufficientemente lungo si trovino le altezze z.*

Soluzione

Quesito a

Le equazioni per l'equilibrio idrostatico sono

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \omega^2 r$$

Integrando

$$p(r,z) = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g z + \text{costante} \tag{74}$$

Ai livelli 1 e 2 avremo

$$\begin{cases} p_a = \frac{\rho\omega^2 r_1^2}{2} - \rho g z_1 + \text{costante} \\ \frac{F}{\pi d^2/4} = \frac{\rho\omega^2 r_2^2}{2} - \rho g z_2 + \text{costante} \end{cases} \Longrightarrow \omega = \sqrt{2\frac{p_a - \frac{4F}{\pi d^2} + \rho g (z_1 - z_2)}{\rho (r_1^2 - r_2^2)}} \tag{75}$$

Quesito b

Dopo un certo tempo dalla rimozione del tappo, la condizione di equilbrio è che su entrambi i rami del tubo graverà la pressione atmosferica p_a:

$$p(r_1, \bar{z}_1) = p_a, \qquad p(r_2, z_2) = p_a$$

supponendo che un pò di liquido sia uscito dal ramo 1, avremo $\bar{z}_1 < z_1$. Scriveremo quindi:

$$\begin{cases} p_a = \frac{\rho\omega^2 r_1^2}{2} - \rho g \bar{z}_1 + C \\ \frac{F}{\pi d^2/4} = \frac{\rho\omega^2 r_2^2}{2} - \rho g z_2 + C \end{cases} \tag{76}$$

dove C è una nuova costante di integrazione diversa dalla precedente, perché finora abbiamo disperso energia nel senso che abbiamo spillato liquido dal ramo 1. L'incognita $\bar{z}_1$ sarà

$$\bar{z}_1 = \frac{\omega^2}{2g}\left(r_1^2 - r_2^2\right) + z_2 \tag{77}$$

Esercizio 10 *Un disco, come in fig. 9 ruota a velocità angolare ω in un bagno d'olio di viscosità μ. Supponendo lineare il profilo della velocità dell'olio, determinare l'espressione del momento torcente resistente alla rotazione.*

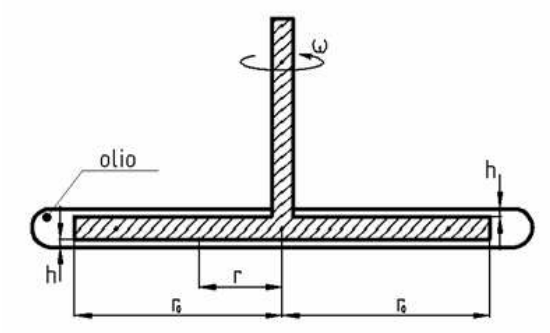


Figura 9: Esercizio 9.

Soluzione

La forza tangenziale per unità di superficie (espressa in Pa) su entrambi i lati è:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \tag{78}$$

essendo $v = \omega r$ la velocità che è indipendente da y, per cui la precedente si riscrive:

$$\tau = \mu \frac{\omega r}{h}, \qquad h = \text{spessore del bagno d'olio (m)} \tag{79}$$

(misurando la velocità in m / s, la viscosità si misura in Pa · s). Scriveremo allora per le due superfici del disco

$$dT = 2\mu \frac{\omega r}{h} \cdot r \cdot 2\pi r dr \Longrightarrow T = 4\frac{\pi \mu \omega}{h} \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{\pi \mu \omega}{h} r_0^4 \tag{80}$$

che misuriamo in N · m cioè in Joule.

Esercizio 11 *Un tronco di cono, come in fig. 10 ruota a velocità angolare ω in un bagno d'olio di viscosità μ. Determinare l'espressione del momento torcente resistente alla rotazione, trascurando l'effetto dell'olio sulla base inferiore del cono.*

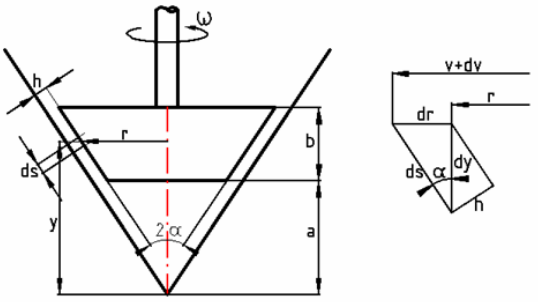


Figura 10: Esercizio 11.

Soluzione

Seguendo le notazioni dell'esercizio 9, scriviamo:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \tag{81}$$

dove v è il modulo del vettore velocità $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$ perpendicolare alla sezione di flusso, la cui altezza è h. Quindi:

$$\tau = \mu \frac{\omega r}{h} = \mu \frac{\omega y \tan \alpha}{h}$$

e $\mathbf{v}$ è tangenziale a

$$dA = 2\pi r ds = 2\pi \cdot y \tan \alpha \cdot \frac{dy}{\cos \alpha} \tag{82}$$

Dal momento che τ è la forza tangenziale per unità di superficie:

$$dF = \tau dA = \mu \cdot \frac{\omega y \tan \alpha}{h} \cdot 2\pi \cdot y \tan \alpha \cdot \frac{dy}{\cos \alpha} = 2\pi \mu \omega \frac{\tan^2 \alpha}{h \cos \alpha} y^2 dy \tag{83}$$

Il momento torcente elementare:

$$dT = r dF = y \tan \alpha \cdot 2\pi \mu \omega \frac{\tan^2 \alpha}{h \cos \alpha} y^2 dy = 2\pi \mu \omega \frac{\tan^3 \alpha}{h \cos \alpha} y^3 dy \tag{84}$$

Integrando:

$$T = 2\pi \mu \omega \frac{\tan^3 \alpha}{h \cos \alpha} \int_a^{a+b} y^3 dy = \pi \mu \omega \frac{\tan^3 \alpha}{2h \cos \alpha} \left[(a+b)^4 - a^4 \right] \tag{85}$$

Esercizio 12 *Osservando la fig. 11 determinare la depressione h di Hg nel tubo capillare.*

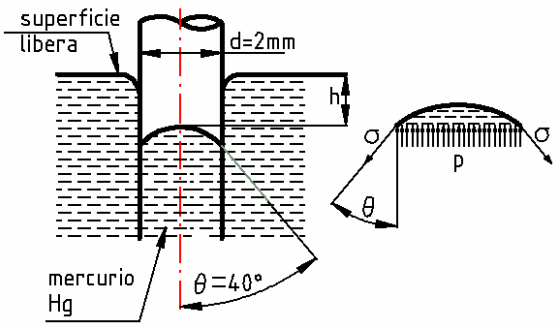


Figura 11: Esercizio 12.

Ssoluzione

Consideriamo il menisco del mercurio come un corpo libero di peso trascurabile. Per l'equilibrio statico della calotta sferica – (parte destra della fig. 11) – scriviamo:

$$\sigma \cdot \pi d \cdot \cos \theta = p \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

dove σ è la tensione superficiale pari a $0.599\,\mathrm{N/m}$ e $p = \rho g h$ dove $\rho = 13.579\,\mathrm{kg/m^3}$ è la densità del mercurio. Ne segue

$$\sigma \cdot \pi d \cdot \cos \theta = \rho g h \frac{\pi d^2}{4} \Longrightarrow h = \frac{4\sigma \cos \theta}{\rho g d} = 6.43\,\mathrm{mm}$$

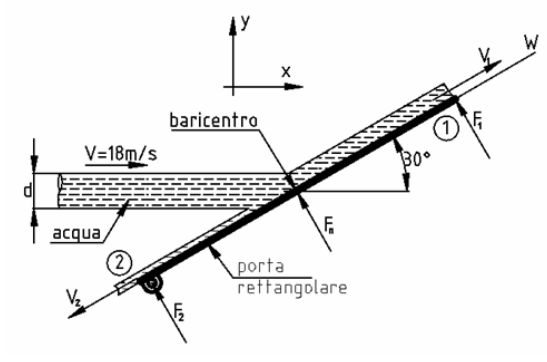


Figura 12: Esercizio 13.

Esercizio 13 *Un getto d'acqua di diametro* $d = 50\,\mathrm{mm}$ *colpisce una porta inclinata; i dati sono riportati in fig. 12. Determinare le reazioni vincolari* F_1, F_2. *Trascurare l'attrito.*

Soluzione

La spinta esercitata dal baricentro della porta avrà una direzione normale alla porta medesima. La conservazione della quantità di moto nella direzione W implica:

$$mV\cos\frac{\pi}{6} = m_1V_1 - m_2V_2$$

Trascurando l'attrito si ha:

$$V = V_1 = V_2 = 18\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$$

Quindi scriveremo:

$$mV\cos\frac{\pi}{6} = (m_1 - m_2)\,V \Longrightarrow m\cos\frac{\pi}{6} = m_1 - m_2$$

L'equazione di continuità è

$$m = m_1 + m_2 \Longrightarrow \rho V\cdot\frac{\pi d^2}{4} = \rho V\cdot\frac{\pi}{4}\left(d_1^2 + d_2^2\right) \Longrightarrow d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

Quindi

$$\begin{cases} d^2 = d_1^2 + d_2^2 \\ d^2\cos\frac{\pi}{6} = d_1^2 - d_2^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2500 = d_1^2 + d_2^2 \\ 2165 = d_1^2 - d_2^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d_1 = \sqrt{\frac{2500+2165}{2}} = 48\,\mathrm{mm} \\ d_2 = \sqrt{\frac{2500-2165}{2}} = 13\,\mathrm{mm} \end{cases}$$

La forza F che agisce sul baricentro della porta è

$$F = m\,(V - 0) = \rho V\cdot\frac{\pi d^2}{4}\cdot V = 636\,\mathrm{N}$$

e la reazione normale alla superficie della porte è

$$F_n = F\sin\frac{\pi}{6} = 318\,\mathrm{N}$$

Ne segue

$$F_{1y} = F_{2y} = F_n\sin\frac{\pi}{3} = 275\,\mathrm{N}$$
$$-F_{1x} = -F_{2x} = -F_n\sin\frac{\pi}{6} = -159\,\mathrm{N}$$

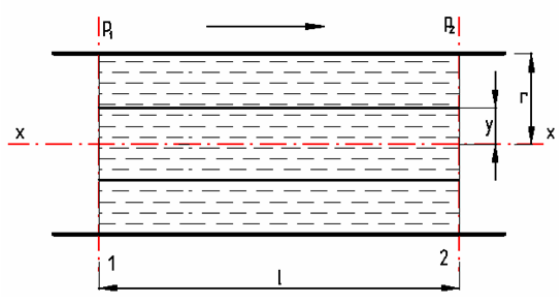


Figura 13: Esercizio 14.

Esercizio 14 *In un condotto cilindrico di raggio r (fig. 13) scorre un fluido viscoso di moto laminare e stazionario, la cui portata è $V\,(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$; si conoscono le pressioni statiche p_1 e p_2 e la distanza l tra le sezioni 1 e 2. Determinare il coefficiente di viscosità η.*

Soluzione

Ammettiamo che in ogni punto la velocità del fluido è parallela all'asse del condotto. Per simmetria in tutti i punti di una medesima sezione, equidistanti dall'asse del condotto, la velocità u ha il medesimo valore; u è quindi funzione della distanza y tra il punto considerato e l'asse del condotto.

Osservando la fig. 13 scriveremo:

$$u_y = u_z = 0, \quad u_x = u$$

Dunque l'equazione di continuità

$$\frac{du_x}{dx} + \frac{du_y}{dy} + \frac{du_z}{dz} = 0$$

diventa

$$\frac{du}{dx} = 0$$

Ne consegue che la distribuzione della velocità è identica in tutte le sezioni e quindi u è funzione della sola l. Le forze in gioco sono:

$$F_1 = p_1 \pi y^2, \qquad F_2 = -p_2 \pi y^2$$

La forza tangenziale parallela all'asse x e dovuta a $u\,(y)$ è

$$F_t = \eta \frac{du}{dy} \cdot 2\pi y l$$

Scriveremo quindi

$$(p_1 - p_2)\,\pi y^2 + \eta \frac{du}{dy} \cdot 2\pi y l = 0 \Longrightarrow du = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} y dy$$

$$\Longrightarrow u = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \int_0^y y' dy' = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} y^2 + C \Longrightarrow u\,(y = r) = 0 \Longrightarrow C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2$$

Quindi

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \left(r^2 - y^2\right)$$

Osserviamo che

$$dV = u \cdot 2\pi y dy \Longrightarrow dV = u \cdot \pi d\left(y^2\right)$$

Cioè

$$V = \int_0^{r^2} \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\left(r^2 - y^2\right) d\left(y^2\right) = \pi \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^4$$

da cui ricaviamo la viscosità:

$$\eta = \frac{\pi}{V} \frac{p_1 - p_2}{8l} r^4$$

Esercizio 15 *Un condotto piegato come in fig. 14, giace su un piano; un liquido di densità* $\rho = 0.86\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{cm}^3$ *entra ad una velocità* $v_1 = 3.2\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$ *e ad una pressione* $p_1 = 150\,\mathrm{kPa}$. *Si determini la forza richiesta per mantenere il condotto nella sua posizione sul piano* xy. *Si trascura la perdita di energia nella curva.*

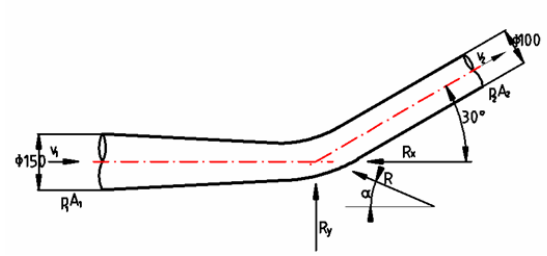


Figura 14: Esercizio 15.

Soluzione

Sezioni di ingresso e uscita:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 0.150^2}{4} = 18 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2, \quad A_2 = \frac{\pi \cdot 0.100^2}{4} = 7.85 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

Portata

$$V_1 = v_1 A_1 = 0.0576\,\mathrm{m}^3\,/\,\mathrm{s} \Longrightarrow m = \rho V_1 = 49.5\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{s}$$

Velocità di uscita

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = 7.2\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$$

Trattandosi di un corpo posto su un piano è nulla l'energia gravitazionale; pertanto il principio di conservazione dell'energia per unità di massa sarà:

(energia di pressione/Kg+energia di velocità/Kg)$_1$ = (energia di pressione/Kg+energia di velocità/Kg)$_2$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \Longrightarrow p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 132112\,\mathrm{Pa}$$

Equilibrio di forze lungo l'asse x

$$F_x = m\left(v_{2x} - v_{1x}\right) \Longrightarrow p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\frac{\pi}{6} - R_x = m\left(v_{2x}\cos\frac{\pi}{6} - v_{1x}\right)$$
$$\Longrightarrow R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\frac{\pi}{6} - m\left(v_{2x}\cos\frac{\pi}{6} - v_{1x}\right) = 1.652\,\mathrm{N}$$

Equilibrio di forze lungo l'asse y

$$F_y = m\left(v_{2y} - v_{1y}\right) \Longrightarrow -p_2 A_2 \sin\frac{\pi}{6} + R_y = m\left(v_{2y}\sin\frac{\pi}{6} - 0\right)$$
$$\Longrightarrow R_y = m\left(v_{2x}\sin\frac{\pi}{6} - 0\right) + p_2 A_2 \sin\frac{\pi}{6} = 697\,\mathrm{N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 1.793\,\mathrm{N}$$

Esercizio 16 *Un razzo a propellente liquido funziona alle condizioni indicate in fig. 1. I prodotti della combustione sono una miscela gassosa di massa molare pari a* $26\,\mathrm{g}/mo\ \cancel{l}$. *Calcolare la velocità di scarico. In fig. 2 si propone un razzo a propellente solido. Se la massa molare del gas in uscita è* $31\,\mathrm{g}/mo\ \cancel{l}$ *calcolare la perdita di massa propellente.*

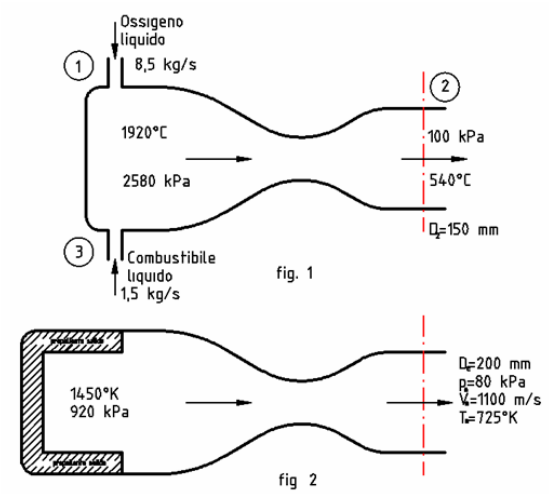


Figura 15: Esercizio 16.

Soluzione

a) massa di gas espulsa nell'unità di tempo:

$$m = 8.5 + 1.5 = 10\,\mathrm{kg}/\mathrm{s}$$

Costante del gas

$$R = \frac{8314}{26} = 320\,\mathrm{J}/\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}$$

densità del gas

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{100000}{320\,(273+540)} = 0.384\,\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$$

Portata volumetrica del gas

$$V = \frac{10}{0.384} = 26\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

Velocità di scarico

$$v_2 = \frac{26}{\pi\cdot 0.150^2/4} = 1472\,\mathrm{m}/\mathrm{s}$$

b) costante del gas

$$R = \frac{8314}{31} = 268\,\mathrm{J}/\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}$$

densità del gas

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{80000}{268 \cdot 725} = 0.412\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{m}^3$$

Portata volumetrica del gas di scarico

$$V_e = \frac{\pi \cdot 0.200^2}{4} \cdot 1100 = 34.54\,\mathrm{m}^3\,/\,\mathrm{s}$$

Massa del propellente

$$m = 0.412 \cdot 34.54 = 14.23\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{s}$$

Esercizio 17 *Un razzo si sta muovendo in uno spazio extra-terrestre ad una velocità* $V_0 = 8.5\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}$. *Si richiede di rallentare la sua velocità fino a* $V_{finale} = 8.4\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}$ *accendendo i retrorazzi, i quali bruciano* $\frac{dm}{dt} = 8\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{s}$ *di combustibile e ossigeno emessi alla velocità* $V_e = 1.3\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}$. *La massa del razzo all'inizio dell'operazione è* $m_0 = 1550\,\mathrm{kg}$. *Si chiede di calcolare per quanto tempo i retrorazzi dovrebbero restare accesi e quanto combustibile sarà consumato.*

Soluzione

Dopo un tempo t di funzionamento dei retrorazzi la massa si riduce di

$$m_0 - \frac{dm}{dt}t$$

e la velocità si riduce da V_0 a V. Pertanto dopo un tempo dt avremo

$$\left(m_0 - \frac{dm}{dt}t\right)\frac{dV}{dt} = \frac{dm}{dt}V_e \Longrightarrow \int_{8.5}^{8.4} dV = \int_0^{t_{acc}} \frac{dm}{dt}V_e \frac{dt}{m_0 - \frac{dm}{dt}t}$$

$$= V_e \int_0^{t_{acc}} \frac{\frac{1}{m_0}\frac{dm}{dt}dt}{1 - \frac{1}{m_0}\frac{dm}{dt}t} = -V_e \int_0^{t_{acc}} \frac{d\left(1 - \frac{1}{m_0}\frac{dm}{dt}t\right)}{1 - \frac{1}{m_0}\frac{dm}{dt}t}$$

Segue

$$8.4 - 8.5 = 1.3\left[-\ln\left(1 - \frac{8}{1550}t\right)\right]_0^{t_{\mathrm{sec}}} \Longrightarrow -\frac{0.1}{1.3}\ln\left(1 - \frac{8}{1550}t_{acc}\right)$$

da cui ricaviamo facilmente

$$t_{acc} = -\frac{1550e^{-\frac{0.1}{0.3}} - 1550}{8} = 13.34\,\mathrm{s} \Longrightarrow m_{acc} = \frac{dm}{dt}t_{acc} = 114.76\,\mathrm{kg}$$

Esercizio 18 *Un flusso d'acqua supera uno sfioratore, come in fig. 16. Determinare la forza orizzontale per ogni* m *di altezza agente sullo sfioratore indicando la sua larghezza con* l.

Soluzione

Scriviamo la conservazione dell'energia per unità di massa:

$$\frac{v_1^2}{2} + gy_1 = \frac{v_2^2}{2} + gy_2$$

L'equazione di continuità è

$$v_1 y_1 l = v_2 y_2 l \Longrightarrow v_1 y_1 = v_2 y_2$$

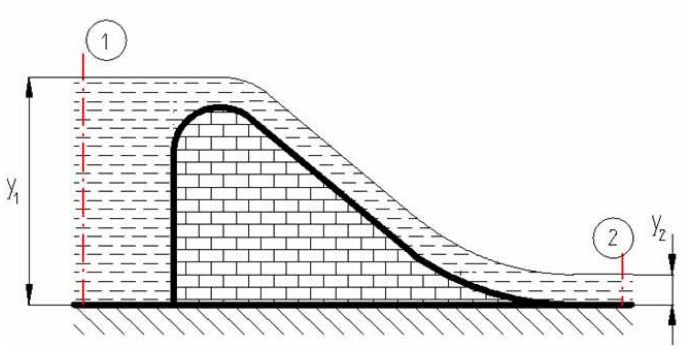


Figura 16: Esercizio 18.

Supponiamo che si abbia $y_1 = 1.5\,\mathrm{m}$ e $y_2 = 0.3\,\mathrm{m}$. Determiniamo le velocità nelle due sezioni:

$$v_2 = \frac{v_1 y_1}{y_2} = 5v_1$$
$$gy_1 - gy_2 = \frac{25v_1^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \Longrightarrow v_1 = 1\,\mathrm{m/s}, \quad v_2 = 5\,\mathrm{m/s}$$

Portata

$$m = \rho v_1 y_1 l$$

Forza statica dovuta alla distribuzione triangolare della pressione d'acqua

$$\rho g v_1 l \frac{y_1}{2} - \rho g v_2 l \frac{y_2}{2} = 10595 \cdot l\,\mathrm{N\,m}$$

cui si contrappone una forza $-F_x$. La somma di tali forze darà:

$$10595 \cdot l - F_x = m\,(v_2 - v_1) \Longrightarrow \frac{F_x}{l} = 4.595\,\mathrm{N/m}$$

Esercizio 19 *La paratoia di un canale viene alzata consentendo un flusso d'acqua come in fig. 17. Scelte due sezioni (in rosso) abbastanza distanti dalla paratoia, determinare la forza F di opposizione alla spinta dell'acqua.*

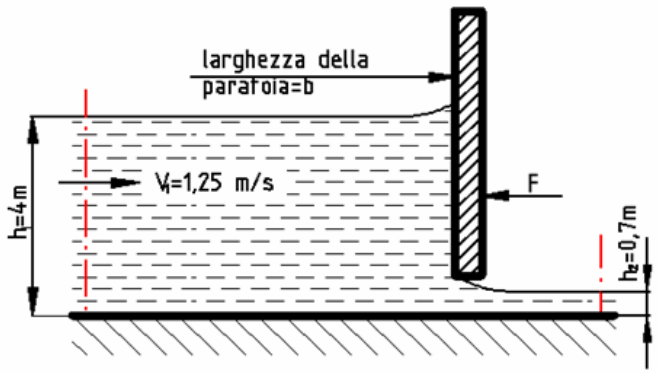


Figura 17: Esercizio 19.

Soluzione
L'equazione di continuità è:

$$v_1 h_1 b = v_2 h_2 b \Longrightarrow v_1 h_1 = v_2 h_2$$

La velocità nella sezione di scarico è:

$$v_2 = v_1 \frac{h_1}{h_2} = \frac{1.25 \cdot 4}{0.7} = 7.14\,\mathrm{m}$$

Portata

$$m = \rho v_1 h_1 l \Longrightarrow 1000 \cdot 1.25 \cdot 4 \cdot b = 5000 b\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$$

cui si contrappone una forza $-F$. La somma di tali forze darà:

$$76076 \cdot b = m\,(v_2 - v_1) \Longrightarrow \frac{F}{b} = 46.63\,\mathrm{kN}\,/\,\mathrm{m}$$

Esercizio 20 *Il palo di fig. 18 è investito dal vento che soffia ad una velocità di* $v = 15\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$ *e ad una temperatura di* $30°\,°\mathrm{C}$. *Trovare il valore del momento flettente d'incastro alla base del palo.*

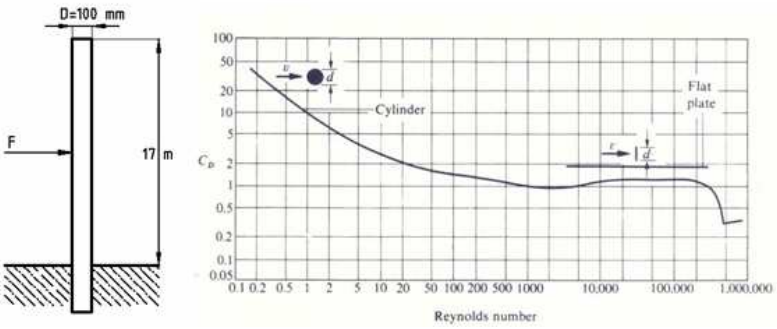


Figura 18: Esercizio 20.

Soluzione
Calcoliamo il numero di Reynolds per questo stato di moto dell'aria. Densità dell'aria:

$$\rho = \frac{100000\,\mathrm{Pa}}{\frac{8314}{29}\,(273 + 30)} = 1.15\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{m}^3$$

Viscosità dinamica:

$$\eta = \eta_0 \frac{1 + \frac{C}{273}}{1 + \frac{C}{T}} \sqrt{\frac{T}{273}} = 1.801 \cdot 10^{-5}$$

dove η_0 è la viscosità dinamica a $273\,\mathrm{K}$ e C un coefficiente dell'aria. La viscosità cinematica:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1.801 \cdot 10^{-5}}{1.15} = 1.57 \cdot 10^{-5}$$

Dunque il numero di Reynolds vale:

$$R_e = \frac{vD}{\nu} = 95541$$

Dalla grafico di fig. 18 leggiamo che il *coefficiente di resistenza* vale $C_D = 1.3$. Quindi il carico sopportato dal palo vale

$$F = C_D \rho \left(\frac{v^3}{2} \right) A$$

dove A è l'area di impatto del vento

$$A = 0.1 \cdot 17 = 1.7\,\mathrm{m}^2 \Longrightarrow F = 286\,\mathrm{N}$$

Pertanto il momento flettente dell'incastro vale

$$M = F \cdot \frac{17}{2} \simeq 2431\,\mathrm{N\,m}$$

Esercizio 21 *Il cartello autostradale di fig. 19 è stato progettato per resistere a un momento flettente d'incastro alla sua base pari a* $16\,\mathrm{kN\,m}$. *Supponendo che la densità dell'aria sia di* $1.2\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{m}^3$ *, si domanda a quale velocità il vento dovrebbe soffiare per ribaltare il cartello.*

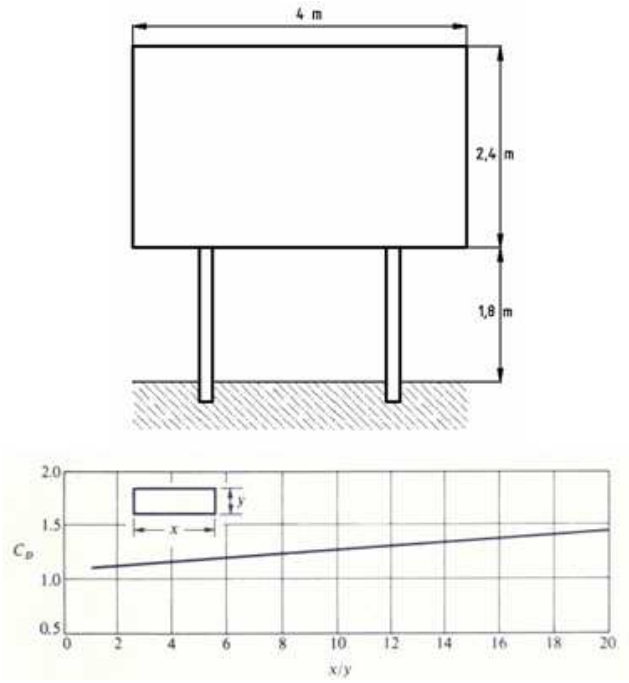


Figura 19: Esercizio 21.

Soluzione

Nel diagramma di fig. 19 si legge che il *coefficiente di resistenza* vale

$$C_D = f\left(\frac{x}{y} = \frac{4}{2.4} \right) = 1.16$$

Con evidente significato dei simboli il carico sopportato dal cartello vale

$$F = C_D \rho \left(\frac{v^2}{2} \right) A = 6.68 v^3$$

La condizione di ribaltamento del cartello è

$$16000 = 6.68 v^2 \left(1.8 + \frac{2.4}{2} \right) \Longrightarrow v = 28.26\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s} = 101.7\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{h}$$

Esercizio 22 *Trovare la velocità di caduta libera di una sfera di diametro* $D = 200\,\mathrm{mm}$ *e di massa* $m = 7.14\,\mathrm{kg}$ *quando essa cade per gravità attraverso i seguenti fluidi: a) aria secca in condizioni standard al livello del mare; b) aria a* $3000\,\mathrm{m}$*; c) acqua a* $28°\,°\mathrm{C}$*; d) acqua a* $5\,°\mathrm{C}$*.*

Soluzione
Le forze che lungo il percorso di caduta agiscono sulla sfera sono:
il peso

$$P = mg = 70\,\mathrm{N}$$

La forza di galleggiamento:

$$F_G = \text{peso della sfera fluida di diametro di } 200\,\mathrm{mm}$$

La forza di resistenza

$$F_D = C_D \rho \frac{V^2}{2} A$$

dove i simboli conservano il significato già visto negli esercizi precedenti. La condizione per cui la velocità di caduta sarà costante è

$$P - F_G = F_D$$

Considerando costante la densità del fluido, i calcoli che seguono sono ovviamente approssimati. Si capirà subito il perché. Iniziamo con il caso a) assumendo come valore della pressione al livello del mare e a $15\,°\mathrm{C}$ e della densità

$$p = 101325\,\mathrm{Pa}, \quad \rho = 1.225\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{m}^3$$

Viscosità dinamica e viscosità cinematica:

$$\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N\,s}\,/\,\mathrm{m}^2, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} = 1.47 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2\,/\,\mathrm{s}$$

Calcoliamo

$$F_D = P - F_G \simeq 70\,\mathrm{N}$$

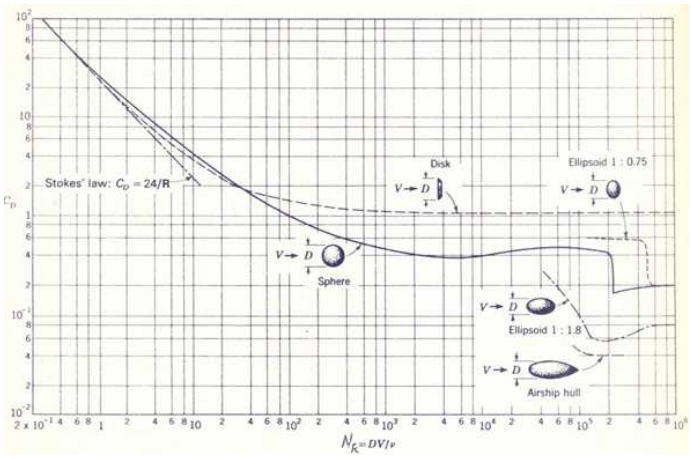


Figura 20: Esercizio 22.

Poiché il coefficiente C_D è funzione del numero di Reynolds e quest'ultimo è funzione della velocità, si dovrà procedere per tentativi affinché per la velocità si trovi un unico valore.

Tentativo 1a

$$C_D = 0.3 \Longrightarrow F_D = C_D \rho \frac{V^2}{2} A \Longrightarrow V = \sqrt{\frac{2F_D}{C_D \rho A}} = 110\,\mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = 1.5 \cdot 10^6$$

per cui non esiste il punto di incontro tra C_D e Re (fig. 20).

Tentativo 2a

$$C_D = 0.2 \Longrightarrow F_D = C_D \rho \frac{V^2}{2} A \Longrightarrow V = \sqrt{\frac{2F_D}{C_D \rho A}} = 135\,\mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = 1.8 \cdot 10^6$$

Dal diagramma di fig. 20 si legge $C_D = 0.2$.

b) densità dell'aria a 3000 m dove pressione

$$p = p_0 e^{-0.127h} = 69223\,\mathrm{Pa}$$

e a 15 °C

$$\rho = 0.834\,\mathrm{kg/m^3}$$

viscosità dinamica $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N\,s/m^2}$; viscosità cinematica

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 2.16 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s} \Longrightarrow F_D \simeq 70\,\mathrm{N}$$

Tentativo 1b

$$C_D = 0.3 \Longrightarrow F_D = C_D \rho \frac{V^2}{2} A \Longrightarrow V = \sqrt{\frac{2F_D}{C_D \rho A}} = 163\,\mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = 1.5 \cdot 10^6$$

Dal diagramma di fig. 20 si legge $C_D = 0.2$.

c) densità dell'acqua a 25 °C e pressione 100 kPa : $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
viscosità dinamica $\mu = 10^{-3}\,\mathrm{N\,s/m^2}$; viscosità cinematica

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s} \Longrightarrow F_D = P - F_G \simeq 29\,\mathrm{N}$$

Tentativo 1c

$$C_D = 0.3 \Longrightarrow F_D = C_D \rho \frac{V^2}{2} A \Longrightarrow V = \sqrt{\frac{2F_D}{C_D \rho A}} = 3\,\mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = 600000$$

Dal diagramma di fig. 20 si legge $C_D = 0.2$.

d) densità dell'acqua a 5 °C e pressione 100 kPa : $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$

viscosità dinamica $\mu = 10^{-3}\,\mathrm{N\,s\,/\,m^2}$; viscosità cinematica

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,/\,s} \Longrightarrow F_D = P - F_G \simeq 29\,\mathrm{N}$$

Tentativo 1d

$$C_D = 0.4 \Longrightarrow F_D = C_D \rho \frac{V^2}{2} A \Longrightarrow V = \sqrt{\frac{2F_D}{C_D \rho A}} = 2\,\mathrm{m\,/\,s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu} = 200000$$

Dal diagramma di fig. 20 si legge $C_D = 0.4$.