Enumerazione degli zeri non appartenenti alla linea critica

Marcello Colozzo

Riscriviamo le formule che ci interessano. Per un assegnato ordine ν_0 della somma parziale

$$H_{M,\nu_0}(x) = \sum_{n=1}^{\nu_0} \psi_{M,n}(x), \tag{1}$$

dello sviluppo in serie della funzione $H(x)$ che riproduce le discontinuità della $\pi_0(x)$, possiamo scrivere

$$\nu_0 = N_0' + N_0'',$$

essendo

$$\begin{aligned} 2N_0' &= \text{numero di zeri non appartenenti alla retta critica } r_{crit} \\ N_0'' &= \text{numero di zeri su } r_{crit} \end{aligned}$$

Osservazione 1 *Il fattore 2 in $2N_0'$ deriva dalle proprietà di simmetria degli zeri rispetto a r_{crit}.*

Enumeriamo gli zeri iniziando da quelli non appartenenti alla retta critica, come illustrato in fig. 1. Utilizziamo i seguenti simboli

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_n = \alpha_n + i\gamma_n, & \eta_n \notin r_{crit} \\ \rho_n = \frac{1}{2} + i\beta_n, & \rho_n \in r_{crit} \end{array} \right., \ \alpha_n \in (0,1) - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \quad \gamma_n \neq \beta_n, \ \forall n \in \mathbb{N} - 0$$

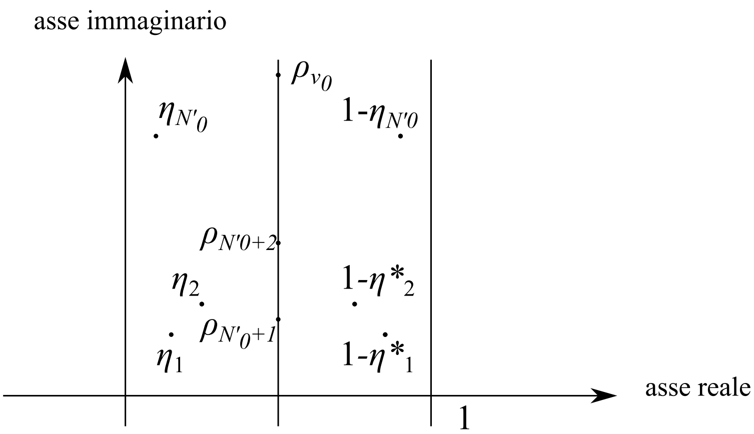

Figura 1: Enumerazione degli zeri.

In tal modo la (1) diventa

$$H_{M,\nu_0}(x) = \sum_{n=1}^{N_0'} \psi_{M,n}^{(1)}(x) + \sum_{n=N_0'+1}^{N_0''} \psi_{M,n}^{(2)}(x), \tag{2}$$

dove

$$\begin{aligned} \psi_{M,n}^{(1)}(x) &= 2\sum_{k=1}^{M} \left\{ \operatorname{Re}\left[\operatorname{Ei}\left(\frac{\eta_n}{k} \ln x \right) + \operatorname{Re}\operatorname{Ei}\left[\frac{1-\eta_n^*}{k} \ln x \right] \right] \right\} \\ \psi_{M,n}^{(2)}(x) &= 2\sum_{k=1}^{M} \operatorname{Re}\left[\operatorname{Ei}\left(\frac{\rho_n}{k} \ln x \right) \right] \end{aligned} \tag{3}$$

L'ordine ν_0 della somma parziale (2) individua univocamente il numero di zeri che stiamo considerando. Più precisamente, tale numero è

$$N_0 = 2N_0' + N_0'' \tag{4}$$

Ricordando che la funzione $\xi(s)$ di Riemann ha gli stessi zeri non banali della $\zeta(s)$, per il teorema dell'indicatore logaritmico, si ha:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D_{T_0}} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = N_0,$$

dove l'integrale è esteso alla frontiera del seguente dominio rettangolare contenuto nella striscia critica:

$$D_{T_0} = [0,1] \times [0,T_0], \quad \text{con } T_0 > 0$$

e nell'ipotesi:

$$\nexists n \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \rho_n, \eta_n \in \partial D_{T_0}$$

In altri termini

$$T_0 \neq \operatorname{Im}\rho_n, \operatorname{Im}\eta_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

giacché nel caso contrario, sono violate le ipotesi del predetto teorema. D'altra parte, il numero di zeri che cadono in un qualunque dominio

$$D_T = [0,1] \times [0,T], \ \ \forall T \gg 1,$$

è stimato dalla ben nota formula di Riemann-von Mangoldt

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + c\ln T, \ \ \forall T \gg 1 \tag{5}$$

dove $c > 0$ è una costante. Derivando rispetto a T, otteniamo la densità degli zeri nella semistriscia critica $(0,1) \times (0,+\infty)$:

$$n(t \gg 1) = \frac{c}{t} + \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{t}{2\pi}\right) \tag{6}$$

Dalla (5) segue (se $N_0 \gg 1$)

$$N_0 = \frac{T_0}{2\pi}\ln\left(\frac{T_0}{2\pi}\right) - \frac{T_0}{2\pi} + c\ln T_0 \tag{7}$$

D'altra parte per $N_0 \gg 1$ la distribuzione degli zeri è quasi-continua, con densità $n(t)$ tale che

$$n(t)\,dt = \text{numero di zeri in } [t, t+dt]$$

Ciò ci consente di rimpiazzare l'indice discreto n con la variabile continua t che nella notazione di Riemann esprime la parte immaginaria di un generico numero complesso. Quindi

$$\eta_n \underset{\text{continuo}}{\longrightarrow} \eta(t) = \alpha(t) + i\gamma(t), \ \ \rho(t) = \frac{1}{2} + i\beta(t), \tag{8}$$

onde la generalizzazione al continuo della (2) si scrive

$$H_M(x) = \int_1^{N_0'} \psi_M^{(1)}(x,t)\,dt + \int_{N_0'+1}^{N''} \psi_M^{(2)}(x,t)\,dt,$$

dove

$$\psi_M^{(1)}(x,t) = 2\sum_{k=1}^{M}\left\{\operatorname{Re}\left[\operatorname{Ei}\left(\frac{\eta(t)}{k}\ln x\right)\right] + \operatorname{Re}\left[\operatorname{Ei}\left(\frac{1-\eta^*(t)}{k}\ln x\right)\right]\right\},$$

e similmente per l'altra funzione $\psi_M^{(2)}(x,t)$. Per la formula di Euler-MacLurin

$$\left|\sum_{n=1}^{N_0'}\psi_M^{(1)}(x,t)-\int_1^{N_0'}\psi_M^{(1)}(x,t)\,dt\right|\leq\int_1^{N_0'}\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_M^{(1)}(x,t)\right|dt$$

Determinando la derivata parziale rispetto a t, otteniamo

$$\left|\sum_{n=1}^{N_0'}\psi_M^{(1)}(x,t)-\int_1^{N_0'}\psi_M^{(1)}(x,t)\,dt\right|\leq$$

$$\leq\int_1^{N_0'}2\sum_{k=1}^{M}\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{e^{\frac{\eta(t)}{k}\ln x}}{\frac{\eta(t)}{k}\ln x}-\frac{\eta'(t)}{k}\ln x\right]+\mathrm{Re}\left[\frac{e^{1-\frac{\eta^*(t)}{k}\ln x}}{1-\frac{\eta^*(t)}{k}\ln x}-\frac{\eta^{*\prime}(t)}{k}\ln x\right]\right\}dt$$