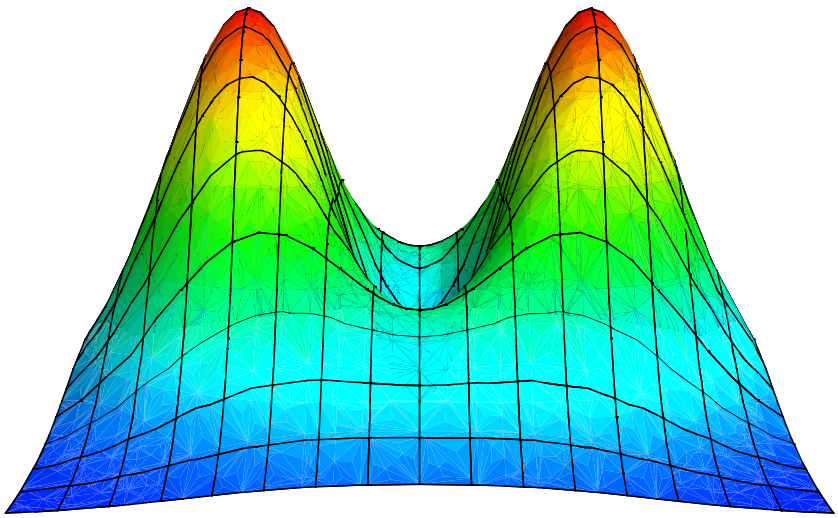
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.orf
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Analisi Matematica – 2015

MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO

Estremi relativi ed assoluti di funzioni di più variabili

ver. 01

Marcello Colozzo



Indice

1 Formula di Taylor in più variabili **2**

2 Punti estremali **3**

Bibliografia **14**

1 Formula di Taylor in più variabili

Sia $f \in C^{m+1}(A)$ essendo A un campo quale sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Assegnato $P_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in A$, sia $P(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ tale che il segmento $\overline{P_0P}$ sia contenuto in A. Le equazioni parametriche di tale segmento sono:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(0)} + t\Delta x_1 \\ x_2 = x_2^{(0)} + t\Delta x_2 \\ ... \\ x_2 = x_2^{(0)} + t\Delta x_2 \end{cases}, \quad t \in [0,1] \tag{1}$$

In altri termini, le (1) sono le coordinate di un generico punto $Q \in \overline{P_0P}$. La restrizione di f al segmento $\overline{P_0P}$ individua la funzione composta:

$$\begin{aligned} F(t) &= f[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)] \\ &= f\left(x_1^{(0)} + t\Delta x_1, x_2^{(0)} + t\Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + t\Delta x_n\right), \quad t \in [0,1] \end{aligned} \tag{2}$$

Applichiamo a $F(t)$ la formula di Mac Laurin:

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + ... + \frac{1}{m!}F^{(m)}(0) + R_m, \tag{3}$$

assumendo per R_m l'espressione di Lagrange:

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(\theta), \quad \text{con } 0 < \theta < 1$$

Esplicitiamo i singoli termini nella (3):

$$\begin{aligned} F(1) &= f\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n\right) \\ F(0) &= f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \end{aligned}$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned} F'(t) = {} & f_{x_1}\left(x_1^{(0)} + t\Delta x_1, x_2^{(0)} + t\Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + t\Delta x_n\right) \cdot \Delta x_1 + \\ & + f_{x_2}\left(x_1^{(0)} + t\Delta x_1, x_2^{(0)} + t\Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + t\Delta x_n\right) \cdot \Delta x_2 + \\ & + ... + f_{x_n}\left(x_1^{(0)} + t\Delta x_1, x_2^{(0)} + t\Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + t\Delta x_n\right) \cdot \Delta x_1, \end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned} F'(0) = {} & f_{x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \cdot \Delta x_1 + f_{x_2}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \cdot \Delta x_2 + \\ & + ...f_{x_n}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \cdot \Delta x_n \\ & = df \end{aligned}$$

Allo stesso modo:

$$F''(0) = d^2f, ...F^{(m)}(0) = d^mf$$

Sostituendo nella (3) le espressioni trovate, si ha:

$$\begin{aligned} f\left(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n\right) = {} & f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) + \\ & + \frac{1}{1!}df + \frac{1}{2!}d^2f + ... + \frac{1}{m!}d^mf + R_m, \end{aligned} \tag{4}$$

con

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!}\left[d^{(m+1)}f\right]_{x_k=x_k^{(0)}+\theta\Delta x_k}, \quad \text{con } 0<\theta<1$$

Ricordiamo che l'operatore di differenziazione d è espresso simbolicamente da:

$$d = \sum_{h=1}^{n}\Delta x_h \frac{\partial}{\partial x_h},$$

e quindi:

$$d^k = \left(\sum_{h=1}^{n}\Delta x_h \frac{\partial}{\partial x_h}\right)^k$$

Sostituendo nella (4):

$$\begin{aligned}
&f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1, x_2^{(0)}+\Delta x_2, ..., x_n^{(0)}+\Delta x_n\right)\\
&= \left[1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\sum_{h=1}^{n}\Delta x_h\frac{\partial}{\partial x_h}\right)^k\right] f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)\\
&+ \frac{1}{(m+1)!}\left(\sum_{h=1}^{n}\Delta x_h\frac{\partial}{\partial x_h}\right)^{m+1} f\left(x_1^{(0)}+\theta\Delta x_1, x_2^{(0)}+\theta\Delta x_2, ..., x_n^{(0)}+\theta\Delta x_n\right)
\end{aligned}$$

Ponendo $x_k^{(0)}+\Delta x_k = x_k$:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, ..., x_n)\\
&= \left[1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\sum_{h=1}^{n}\left(x_h-x_h^{(0)}\right)\frac{\partial}{\partial x_h}\right)^k\right] f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)+\\
&+ \frac{1}{(m+1)!}\left(\sum_{h=1}^{n}\left(x_h-x_h^{(0)}\right)\frac{\partial}{\partial x_h}\right)^{m+1} f\left(x_1^{(0)}+\theta\left(x-x_1^{(0)}\right), x_2^{(0)}+\theta\left(x-x_2^{(0)}\right), ..., x_n^{(0)}+\theta\left(x-x_n^{(0)}\right)\right)
\end{aligned}$$

Nel caso particolare di $n=2$ variabili:

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x_0,y_0)+\\
&+ \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(x_0,y_0)+\\
&...\\
&+ \frac{1}{m!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^m f(x_0,y_0)+\\
&+ \frac{1}{(m+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{m+1} f(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))
\end{aligned} \tag{5}$$

2 Punti estremali

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (campo o dominio).

Teorema 1 ***Hp***.

1. $P_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in \mathring{A}$ *è punto di estremo relativo per* f*;*

2. f *è parzialmente derivabile in* P_0*.*

Th. $f_{x_1}(P_0) = f_{x_2}(P_0) = ... = f_{x_n}(P_0) = 0$

Dimostrazione. $P_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in \mathring{A} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \exists D_\delta(P_0) = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - x_k^{(0)}\right)^2 \leq \delta^2\right\} \subset A.$$

È chiaro che:

$$\left(x_1, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in D_\delta(P_0) \Longleftrightarrow x_1 \in \left[x_1^{(0)} - \delta, x_1^{(0)} + \delta\right],$$

per cui possiamo definire la funzione:

$$\phi : \left[x_1^{(0)} - \delta, x_1^{(0)} + \delta\right] \to \mathbb{R}$$
$$\phi(x_1) = f\left(x_1, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$$

Risulta:

$$\left.\begin{array}{c} P_0 \text{ è punto di} \\ \text{estremo relativo per } f \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} x_1^{(0)} \text{ è punto di} \\ \text{estremo relativo per } \phi \end{array}\right.$$
$$f \text{ è derivabile in } P_0) \Longrightarrow \left(\phi \text{ è derivabile in } x_1^{(0)}\right.$$

Dal momento che $x_1^{(0)}$ è punto interno di $\left[x_1^{(0)} - \delta, x_1^{(0)} + \delta\right]$, segue che $\phi'\left(x_1^{(0)}\right) = 0$, cioè

$$f_{x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) = 0$$

Alla stessa maniera si dimostrano le rimanenti:

$$f_{x_2}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) = ... = f_{x_n}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) = 0$$

■

Da tale teorema segue che se f è parzialmente derivabile in $\mathring{A}$, gli eventuali punti di estremo relativo appartengono all'insieme delle soluzioni del seguente sistema di n equazioni in n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ f_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Definizione 2 *Dicesi* ***punto estremale*** *o* ***punto critico*** *di* f*, ogni soluzione del sistema (6).*

Osservazione 3 *Rammentando la definizione di gradiente di una funzione* f*:*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

segue che in un punto estremale P_0 *è* $\nabla f(P_0) = (0, 0, ..., 0) = \mathbf{0}$*. L'annullarsi del gradiente in* P_0 *esprime la "stazionerietà" della funzione nel suddetto punto. Infatti, intuitivamente il gradiente misura la rapidità di variazione della funzione.*

Denotando con $B \subset \mathring{A}$ l'insieme dei punti estremali di f, cioè:

$$B = \left\{ P \in \mathring{A} \mid f_{x_k}(P) = 0, \quad k = 1, 2, ..., n \right\}$$

Se $B \neq \emptyset$, i.e. il sistema (6) ammette almeno una soluzione, si ha:

$$\left.\begin{array}{c} P_0 \text{ è punto di} \\ \text{estremo relativo per } f \end{array}\right) \Longrightarrow (P_0 \in B$$

$$P_0 \in B) \nRightarrow \left(\begin{array}{c} P_0 \text{ è punto di} \\ \text{estremo relativo per } f \end{array}\right.$$

In altri termini, $P_0 \in B$ è condizione necessaria ma non sufficiente affinchè P_0 sia punto di estremo relativo per f. Dimostriamo ora il teorema:

Teorema 4 ***Hp****:*

1. *f è continua in A ed è di classe C^2 in $\mathring{A}$;*
2. *$P_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in \mathring{A}$ è punto estremale per f.*

Th*. Considerata la forma quadratica:*

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(P_0)\,\lambda_i \lambda_j$$

nelle variabili $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, si ha:

A *ϕ è definita positiva $\Longrightarrow$ P_0 è punto di minimo relativo proprio;*

B *ϕ è definita negativa $\Longrightarrow$ P_0 è punto di massimo relativo proprio;*

C *ϕ è indefinita $\Longrightarrow$ P_0 non è punto di estremo relativo.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità consideriamo il caso $n = 2$.

$P_0(x_0, y_0) \in \mathring{A} \Longrightarrow \exists I_\delta(P_0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\right\} \subset A$

Preso ad arbitrio $P(x, y) \in I_\delta(P_0)$ possiamo applicare la formula di Taylor (5) per $m = 1$. Per ipotesi P_0 è punto estremale per f, onde $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$, quindi:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \in \frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f\left[x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)\right], \quad \text{con } 0 < \theta < 1$$

Posto $Q(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$ e tenendo conto del teorema di Schwartz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione parziale:

$$f(P) - f(Q) = \frac{1}{2}\left[f_{xx}(Q)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(Q)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(Q)(y - y_0)^2\right]$$

Se $\rho = \overline{P_0 P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, poniamo:

$$\frac{x - x_0}{\rho} = \lambda_1, \ \frac{y - y_0}{\rho} = \lambda_2, \tag{7}$$

assumendo $P \in I_\delta(P_0) - \{P_0\}$, è $\rho > 0$. Inoltre dalle (7) tenendo conto dell'espressione di ρ, segue:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 \tag{8}$$

Abbiamo:

$$f(P) - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2}\psi(Q, \lambda_1, \lambda_2), \tag{9}$$

dove

$$\psi(Q, \lambda_1, \lambda_2) = f_{xx}(Q)\lambda_1^2 + 2f_{xy}(Q)\lambda_1\lambda_2 + f_{yy}(Q)\lambda_2^2, \tag{10}$$

Per ipotesi le funzioni f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} sono continue in A, per cui:

$$\begin{aligned} f_{xx}(Q) &= f_{xx}(P_0) + \alpha(Q) \\ f_{xy}(Q) &= f_{xy}(P_0) + \beta(Q) \\ f_{yy}(Q) &= f_{yy}(P_0) + \gamma(Q), \end{aligned} \tag{11}$$

essendo le funzioni $\alpha(Q), \beta(Q), \gamma(Q)$ infinitesime per $Q \to P_0$. Sostituendo le (11) nelle (10), si ha:

$$\psi(Q, \lambda_1, \lambda_2) = f_{xx}(P_0)\lambda_1^2 + 2f_{xy}(P_0)\lambda_1\lambda_2 + f_{yy}(P_0)\lambda_2^2 + \omega(Q, \lambda_1, \lambda_2), \tag{12}$$

dove

$$\omega(Q, \lambda_1, \lambda_2) = \alpha(Q)\lambda_1^2 + \beta(Q)\lambda_1\lambda_2 + \gamma(Q)\lambda_2^2$$

Risulta $|\lambda_k| \leq 1$, per cui:

$$\lim_{Q \to P_0} \omega(Q, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

La (12) può essere scritta come:

$$\psi(Q, \lambda_1, \lambda_2) = \phi(\lambda_1, \lambda_2) + \omega(Q, \lambda_1, \lambda_2),$$

essendo:

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2) = f_{xx}(P_0)\lambda_1^2 + 2f_{xy}(P_0)\lambda_1\lambda_2 + f_{yy}(P_0)\lambda_2^2, \tag{13}$$

che è una forma quadratica nelle variabili λ_1, λ_2 e di coefficienti $f_{xx}(P_0), f_{xy}(P_0), f_{yy}(P_0)$. Quindi:

$$f(P) - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2}\left[\phi(\lambda_1, \lambda_2) + \omega(Q, \lambda_1, \lambda_2)\right], \tag{14}$$

da cui vediamo che per $Q \to P_0$, la differenza $f(P) - f(P_0)$ ha lo stesso segno della forma quadratica $\phi(\lambda_1, \lambda_2)$. Per essere più precisi, supponiamo che $\phi(\lambda_1, \lambda_2)$ sia definita positiva:

$$\begin{aligned} &\phi(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0, \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \\ &\phi(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Tuttavia dalla (8) segue $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. Più specificatamente, $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}$, dove

$$\Lambda = \left\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1\right\}$$

cioè ϕ è definita sulla circonferenza del piano $\lambda_1\lambda_2$ centrata nell'origine e di raggio unitario. Inoltre, ϕ è manifestamente continua in Λ che è un insieme chiuso e limitato $\Longrightarrow$ ϕ è dotata di minimo assoluto in Λ. Poniamo

$$\mu = \min_{\Lambda} \phi,$$

avendosi $\mu > 0$, giacchè $\phi(\lambda_1, \lambda_2) > 0, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Inoltre:

$$\lim_{Q \to P_0} \omega(Q, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \Longrightarrow \left(\exists \Gamma_{\Delta_\mu}(P_0) \subset I_\delta(P_0) \mid Q \in \Gamma_{\Delta_\mu}(P_0) - \{P_0\} \Longrightarrow |\omega(Q, \lambda_1, \lambda_2)| \leq \frac{\mu}{2}\right.,$$

per cui:

$$Q \in \Gamma_{\Delta_\mu}(P_0) - \{P_0\} \Longrightarrow \psi(Q, \lambda_1, \lambda_2) = \phi(\lambda_1, \lambda_2) + \omega(Q, \lambda_1, \lambda_2)$$
$$\geq \phi(\lambda_1, \lambda_2) - |\omega(Q, \lambda_1, \lambda_2)| \geq \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2} > 0$$

E allora dalla (9)

$$f(P) - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2}\psi(Q, \lambda_1, \lambda_2) > 0,$$

onde P_0 è punto di minimo relativo proprio. Passiamo ora al caso in cui $\phi(\lambda_1, \lambda_2)$ è definita negativa, onde $\phi(\lambda_1, \lambda_2) < 0, \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Ne consegue che ϕ è dotata di massimo assoluto

$$-\mu = \max_{\Lambda} \phi < 0$$

Quindi

$$Q \in \Gamma_{\Delta_\mu}(P_0) - \{P_0\} \Longrightarrow \psi(Q, \lambda_1, \lambda_2) = \phi(\lambda_1, \lambda_2) + \omega(Q, \lambda_1, \lambda_2)$$
$$\geq \phi(\lambda_1, \lambda_2) + |\omega(Q, \lambda_1, \lambda_2)| \leq -\mu + \frac{\mu}{2} = -\frac{\mu}{2} < 0$$

Ne consegue che P_0 è punto di massimo relativo proprio. Passiamo all'ultimo caso: $\phi(\lambda_1, \lambda_2)$ è indefinita. Ciò implica che al variare di (λ_1, λ_2) su Λ troviamo punti in cui è $\phi > 0$ e altri per i quali $\phi < 0$. Ne consegue che ϕ è dotata di minimo assoluto $-\mu$ e massimo assoluto $\mu' > 0$. Cioè:

$$\exists (\lambda_1', \lambda_2') \in \Lambda \mid -\mu = \phi(\lambda_1', \lambda_2') = \min_{\Lambda} \phi$$
$$\exists (\lambda_1'', \lambda_2'') \in \Lambda \mid \mu' = \phi(\lambda_1'', \lambda_2'') = \max_{\Lambda} \phi$$

Inoltre:

$$\lim_{Q \to P_0} \omega(Q, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \exists \Gamma_{\Delta_{\mu,\mu'}}(P_0) \subset I_\delta(P_0) \mid Q \in \Gamma_{\Delta_{\mu,\mu'}}(P_0) - \{P_0\} \\ \Longrightarrow |\omega(Q, \lambda_1, \lambda_2)| \leq \frac{\mu}{2}, \ |\omega(Q, \lambda_1, \lambda_2)| \leq \frac{\mu'}{2} \end{array} \right.$$

Pertanto:

$$\forall \rho \in (0, \Delta_{\mu,\mu'}), \ P'(x_0 + \rho\lambda_1', y_0 + \rho\lambda_2'), P''(x_0 + \rho\lambda_2'', y_0 + \rho\lambda_2'') \in \Gamma_{\Delta_{\mu,\mu'}}(P_0),$$

per cui

$$f(P') - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2}[\phi(\lambda_1', \lambda_2') + \omega(Q, \lambda_1', \lambda_2')]$$
$$= \frac{\rho^2}{2}[-\mu + \omega(Q, \lambda_1', \lambda_2')] \leq \frac{\rho^2}{2}[-\mu + |\omega(Q, \lambda_1', \lambda_2')|]$$
$$\leq \frac{\rho^2}{2}\left(-\mu + \frac{\mu}{2}\right) = -\frac{1}{4}\rho^2\mu < 0$$
$$f(P'') - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2}[\phi(\lambda_1'', \lambda_2'') + \omega(Q, \lambda_1'', \lambda_2'')]$$
$$= \frac{\rho^2}{2}[\mu' + \omega(Q, \lambda_1'', \lambda_2'')] \geq \frac{\rho^2}{2}[\mu' - |\omega(Q, \lambda_1'', \lambda_2'')|]$$
$$\geq \frac{\rho^2}{2}\left(\mu' - \frac{\mu'}{2}\right) = \frac{1}{4}\rho^2\mu' > 0$$

Ne consegue:

$$\forall \rho \in (0, \Delta_{\mu,\mu'}), \quad \exists P', P'' \in I_\rho(P_0) - \{P_0\} \mid f(P') < f(P_0), \ f(P'') > f(P_0),$$

onde l'asserto. ■

Nel caso particolare $n = 2$ il teorema appena dimostrato fornisce un criterio di facile applicabilità. Ricordiamo innanzitutto che data la forma quadratica (13) che qui riscriviamo

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2) = f_{xx}(P_0)\lambda_1^2 + 2f_{xy}(P_0)\lambda_1\lambda_2 + f_{yy}(P_0)\lambda_2^2,$$

il suo discriminante è.

$$H(P_0) = f_{xx}(P_0) f_{yy}(P_0) - [f_{xy}(P_0)]^2,$$

che può essere scritto come:

$$H(P_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{zz}(P_0) \end{vmatrix} \tag{15}$$

e si chiama *hessiano* della funzione f nel punto P_0. Per quanto visto, $H(P_0)$ è il determinante della *matrice hessiana* della funzione f nel punto P_0:

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{zz}(P_0) \end{pmatrix}$$

Per una nota proprietà delle forme quadratiche, il teorema 5 diventa:

Teorema 5 ***Hp****:*

1. *f è continua in A ed è di classe C^2 in $\mathring{A}$;*
2. *$P_0(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ è punto estremale per f.*

Th*. Considerata la forma quadratica:*

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2) = f_{xx}(P_0)\lambda_1^2 + 2f_{xy}(P_0)\lambda_1\lambda_2 + f_{yy}(P_0)\lambda_2^2$$

nelle variabili λ_1, λ_2, si ha:

A $H(P_0) > 0, \quad f_{xx}(P_0) > 0 \Longrightarrow P_0$ *è punto di minimo relativo proprio;*

B $H(P_0) > 0, \quad f_{xx}(P_0) < 0 \Longrightarrow P_0$ *è punto di massimo relativo proprio;*

C $H(P_0) < 0 \Longrightarrow P_0$ *non è punto di estremo relativo.*

Questo teorema lascia indeterminato il caso $H(P_0) = 0$, in cui è necessario studiare il segno della differenza di $f(P) - f(P_0)$ in un intorno di P_0.

Definizione 6 *Un punto estremale che non è punto di estremo relativo, si dice* ***punto di sella****.*

Osservazione 7 *Se $f_{xx}(P_0) < 0$, si ha $H(P_0) < 0$ onde P_0 è punto di sella.*

Esercizio 8 *Determinare gli estremi relativi di $f(x, y) = 2x^3 + 6xy + y^2$.*

Svolgimento.

La funzione assegnata è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ per cui possiamo applicare il teorema 5. Le derivate parziali prime sono:

$$f_x(x, y) = 6x^2 + 6y, \quad f_y(x, y) = 6x + 2y$$

Le coordinate cartesiane dei punti estremali sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione $y = -3x$ che sostituita nella prima ci da

$$x^2 - 3x = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 3$$

Quindi i punti estremali sono $P_0\,(0,0)$ e $P_0'\,(3,-9)$. Calcoliamo le derivate parziali del secondo ordine:

$$f_{xx}\,(x,y) = 12,\ f_{xy}\,(x,y) = 6,\ f_{yy}\,(2)\,,$$

da cui l'hessiano $H\,(x,y) = 12\,(2x-3)$. Abbiamo:

$$\begin{array}{l} H\,(P_0) = -36 \Longrightarrow P_0 \text{ non è punto di estremo relativo} \\ H\,(P_0') = 36,\ \ f_{xx}\,(P_0') = 36 \Longrightarrow P_0 \text{ è punto di minimo relativo} \end{array}$$

L'esercizio seguente è tratto da [1].

Esercizio 9 *Determinare gli estremi relativi di*

$$f\,(x,y) = \left(x^2 + 3y^2\right) e^{1-\left(x^2+y^2\right)} \tag{16}$$

Svolgimento
f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime sono:

$$\begin{array}{l} f_x\,(x,y) = 2xe^{1-\left(x^2+y^2\right)}\left[1 - \left(x^2+3y^2\right)\right] \\ f_y\,(x,y) = 2ye^{1-\left(x^2+y^2\right)}\left[3 - \left(x^2+3y^2\right)\right] \end{array} \tag{17}$$

I punti estremali sono le soluzioni del sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} x\left[1 - (x^2+3y^2)\right] = 0 \\ y\left[3 - (x^2+3y^2)\right] = 0 \end{array} \right. , \tag{18}$$

che ammette la soluzione banale $(x,y) = (0,0)$. Inoltre per $x \neq 0, y = 0$ il sistema si scrive:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 3y^2 = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

cioè $x^2 = 1$ e $y = 0$, da cui la coppia di soluzioni $(-1,0)\,,(1,0)$. Per $y \neq 0$, $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{array} \right.$$

Cioè $x = 0$, $y^2 = 1$, da cui la coppia di soluzioni $(0,-1)\,,(0,1)$. In definitiva abbiamo i punti critici $P_k \in \mathbb{R}^2$:

$$P_1\,(0,0)\,,\ P_2\,(-1,0)\,,\ P_3\,(1,0)\,,\ P_4\,(0,-1)\,,\ P_5\,(0,1)$$

Calcoliamo le derivate parziali seconde. Iniziamo con $f_{xx}\,(x,y)$.

$$\begin{aligned} f_{xx}\,(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[2xe^{1-\left(x^2+y^2\right)} - 2xf\,(x,y)\right] \\ &= 2e^{1-\left(x^2+y^2\right)} + 2xe^{1-\left(x^2+y^2\right)}(-2x) - 2f\,(x,y) - 2xf\,(x,y) \\ &= 2e^{1-\left(x^2+y^2\right)} - 4x^2e^{1-\left(x^2+y^2\right)} - 2f\,(x,y) - 4x^2e^{1-\left(x^2+y^2\right)} + 4x^2 f\,(x,y) \\ &2e^{1-\left(x^2+y^2\right)} - 8x^2e^{1-\left(x^2+y^2\right)} + \left(4x^2-2\right) f\,(x,y) \\ &2e^{1-\left(x^2+y^2\right)} - 8x^2e^{1-\left(x^2+y^2\right)} + \left(4x^2-2\right)\left(x^2+3y^2\right) e^{1-\left(x^2+y^2\right)} \\ &= e^{1-\left(x^2+y^2\right)}\left[2 - 8x^2 + \left(4x^2-2\right)\left(x^2+3y^2\right)\right] \end{aligned}$$

Cioè:

$$f_{xx}(x,y) = 2e^{1-\left(x^2+y^2\right)}\left(2x^4 - 5x^2 + 6x^2y^2 - 3y^2 + 1\right) \tag{19}$$

Calcoliamo $f_{xy}(x,y)$.

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2xe^{1-\left(x^2+y^2\right)} - 2xf(x,y)\right] \\ &= 2xe^{1-\left(x^2+y^2\right)}(-2y) - 2xf_y(x,y) \\ &= -4xye^{1-\left(x^2+y^2\right)} - 4xye^{1-\left(x^2+y^2\right)}\left[3 - \left(x^2+3y^2\right)\right] \end{aligned}$$

Cioè:

$$f_{xy}(x,y) = 4e^{1-\left(x^2+y^2\right)}xy\left(x^2+3y^2-4\right) \tag{20}$$

Infine:

$$f_{yy}(x,y) = 2e^{1-\left(x^2+y^2\right)}\left(3 - 15y^2 + 6y^4 - x^2 + 2x^2y^2\right) \tag{21}$$

Calcoliamo l'hessiano nei punti trovati:

$$\begin{cases} H(0,0) = 12e^2 \\ f_{xx}(0,0) = 2e \end{cases} \Longrightarrow P_1(0,0) \text{ è punto di minimo relativo}$$

$$H(-1,0) = -16 \Longrightarrow P_2(-1,0) \text{ è punto di sella}$$

$$H(1,0) = -16 \Longrightarrow P_3(1,0) \text{ è punto di sella}$$

$$\begin{cases} H(0,-1) = 48 \\ f_{xx}(0,0) = -4 \end{cases} \Longrightarrow P_4(0,-1) \text{ è punto di massimo relativo}$$

$$\begin{cases} H(0,1) = 48 \\ f_{xx}(0,1) = -4 \end{cases} \Longrightarrow P_5(0,1) \text{ è punto di massimo relativo}$$

Data la mole di calcoli, [1] fornisce una routine in ambiente *Mathematica* che permette la ricerca degli estremi relativi di una funzione di due variabili. Inoltre è possibile utilizzare tale ambiente per distinguere i punti estremali dai punti di sella, ricostruendo le curve di livello della funzione. Ricordiamo che le curve di livello di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, sono curve del piano xy di equazione:

$$f(x,y) = C, \quad \text{con } C \in f(A) \tag{22}$$

Abbiamo, dunque, una famiglia di curve di livello:

$$\mathcal{F} = \left\{\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \mid \Gamma : f(x,y) = C,\ C \in f(A)\right\} \tag{23}$$

Ciascuna curva di livello è univocamente individuata dalla costante $C \in f(A)$. Supponiamo, ad esempio, che la funzione sia $f(x,y) = x^2y$, da cui $A = \mathbb{R}^2$ $f(A) = \mathbb{R}$. Le curve di livello di questa funzione compongono la famiglia di iperboli equilatere:

$$\mathcal{F} = \left\{\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \mid \Gamma : y = \frac{C}{x^2},\ C \in \mathbb{R}\right\},$$

e per $C = 0$ l'iperbole degenera nell'asse x. Dalla (22) vediamo che la generica curva di livello è data in forma implicita. Nei casi più semplici, la (22) può essere esplicitata rispetto a una delle variabili x, y. Se, invece, l'espressione analitica della funzione f non consente di esplicitare la (22), allora si ricorre a un sistema di computer algebra per ricostruire in software le curve di livello. Ad esempio, nel caso della funzione (16), si ha:

$$\left(x^2+3y^2\right)e^{1-\left(x^2+y^2\right)} = C,$$

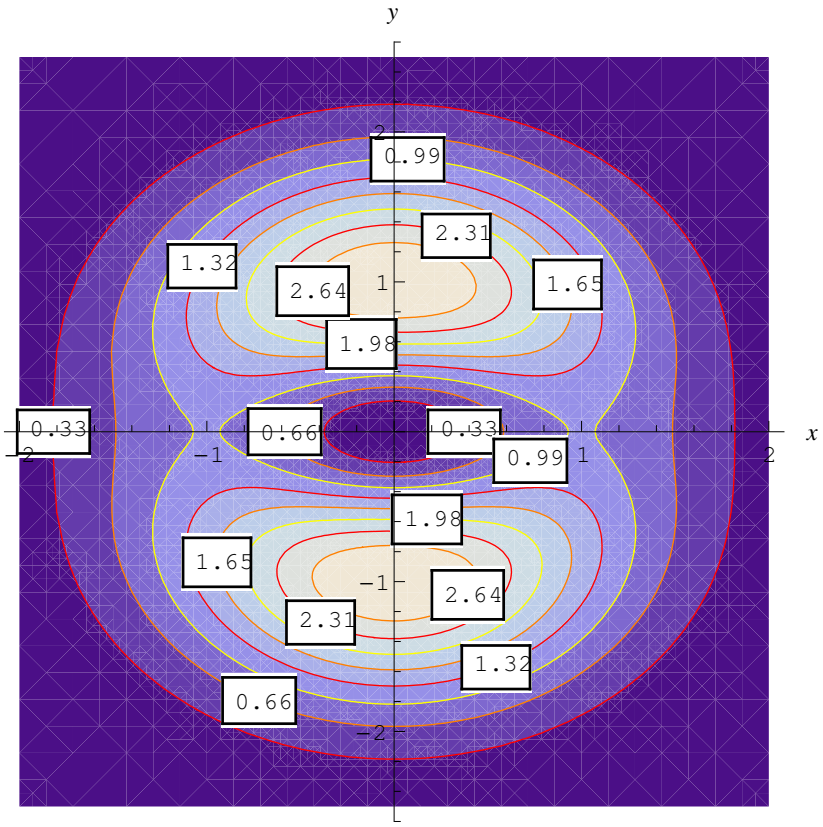


Figura 1: Curve di livello della funzione $f(x,y) = (x^2+3y^2)\, e^{1-\left(x^2+y^2\right)}$. Le cifre indicano i valori di C tali che $(x^2+3y^2)\, e^{1-\left(x^2+y^2\right)} = C$.

che non sappiamo esplicitare. *Mathematica* dispone del comando `ContourPlot[]` in cui si specifica la cardinalità dell'insieme di curve di livello da visualizzare. In fig. 1 riportiamo l'insieme composto da 8 curve di livello della funzione assegnata. Da tale figura vediamo la presenza dei punti di estremo relativo $P_1(0,0)$, $P_4(0,-1)$, $P_5(0,1)$ e dei punti di sella $P_2(-1,0)$, $P_3(1,0)$.

Per quanto precede, ricostruendo in software le curve di livello di una assegnata funzione $f(x,y)$ è possibile dedurre la presenza di punti di estremo relativo, senza però distinguere i massimi dai minimi (relativi). Un aiuto in tal senso è dato da un *density plot*, come illustrato in fig. 2. Qui è ben visibile la presenza di un minimo relativo nell'origine (una buca) e di due massimi relativi in $(0,\pm 1)$.

La presenza di punti di estremo relativo può essere rilevata dal tracciamento delle sezioni della superficie $z = f(x,y)$ con uno dei piani coordinati Ad esempio:

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = 0 \end{cases} \iff z = g(y),$$

dove

$$g(y) = f(0,y) = 3y^2 e^{1-y^2}$$

Nell'intervallo $y \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$, otteniamo il grafico di fig. 3.

In maniera simile:

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases} \iff z = h(x),$$

dove

$$h(x) = f(x,0) = x^2 e^{1-x^2}$$

Nell'intervallo $x \in [-2,2]$, otteniamo il grafico di fig. 4.

Possiamo ora tracciare il grafico della funzione in cui sono ben visibili i punti di estremo relativi (cfr. fig.)

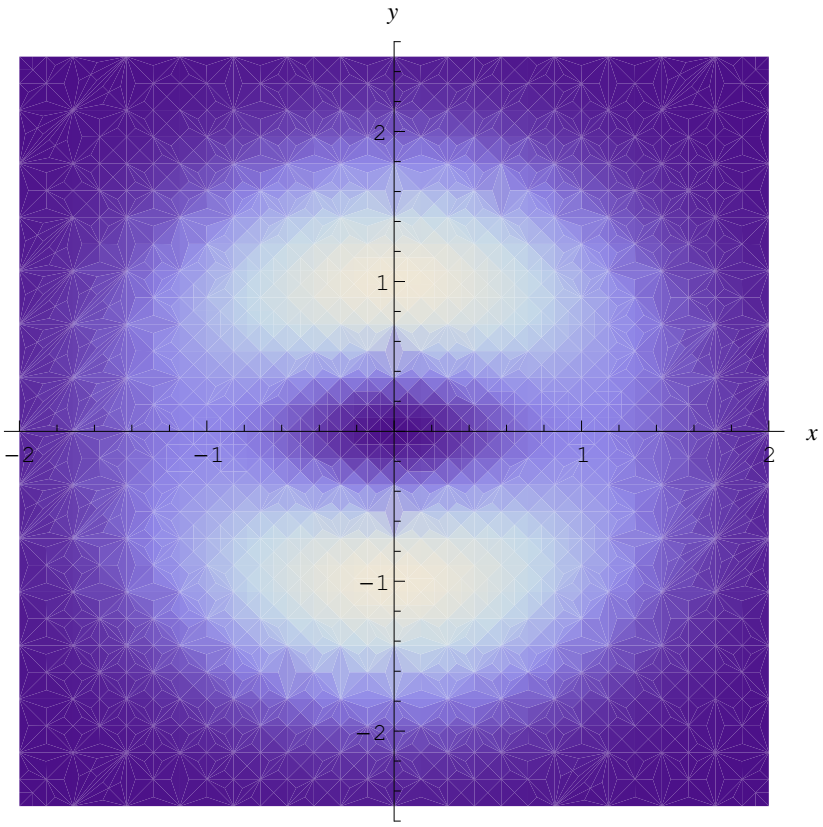


Figura 2: Un *density plot* della funzione $f(x,y) = (x^2+3y^2)\, e^{1-\left(x^2+y^2\right)}$.

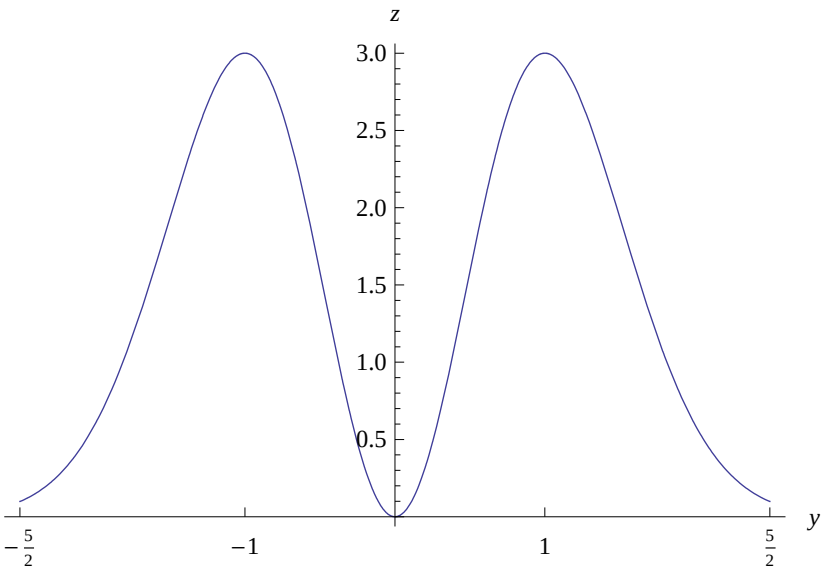


Figura 3: Grafico della sezione di $z = f(x,y)$ con il piano coordinato yz.

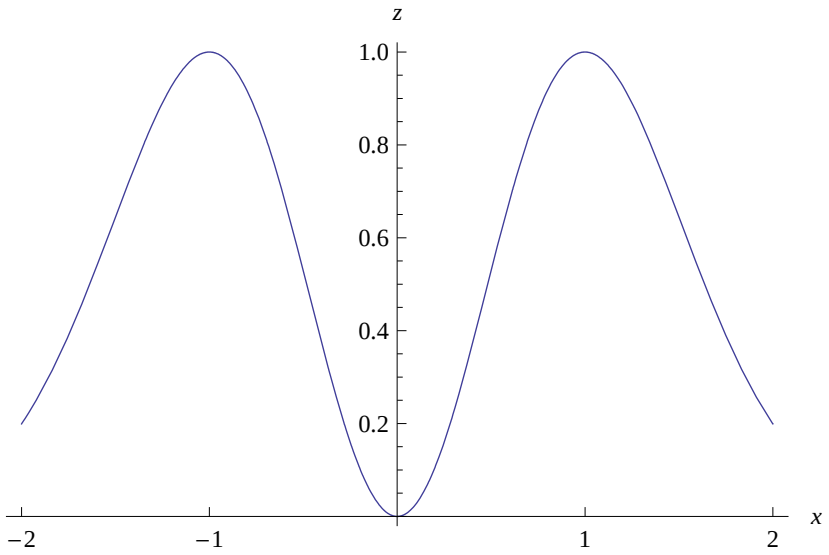


Figura 4: Grafico della sezione di $z = f(x, y)$ con il piano coordinato xz.

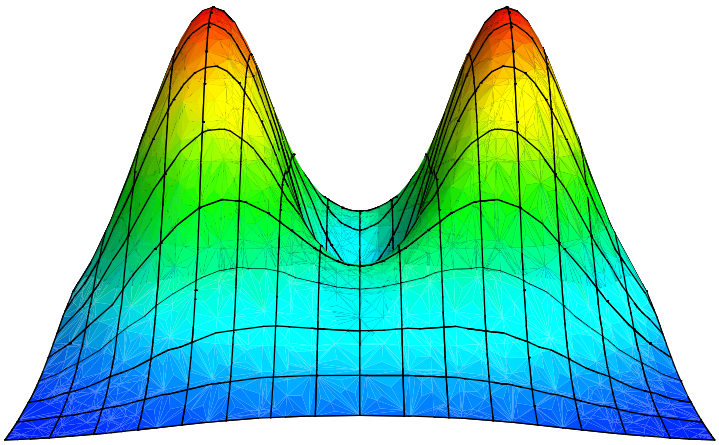


Figura 5: Grafico della funzione $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)\, e^{1-\left(x^2+y^2\right)}$.

Riferimenti bibliografici

[1] Wagon S., 1992. *Guida a Mathematica*, MacGrawHill, Torino.