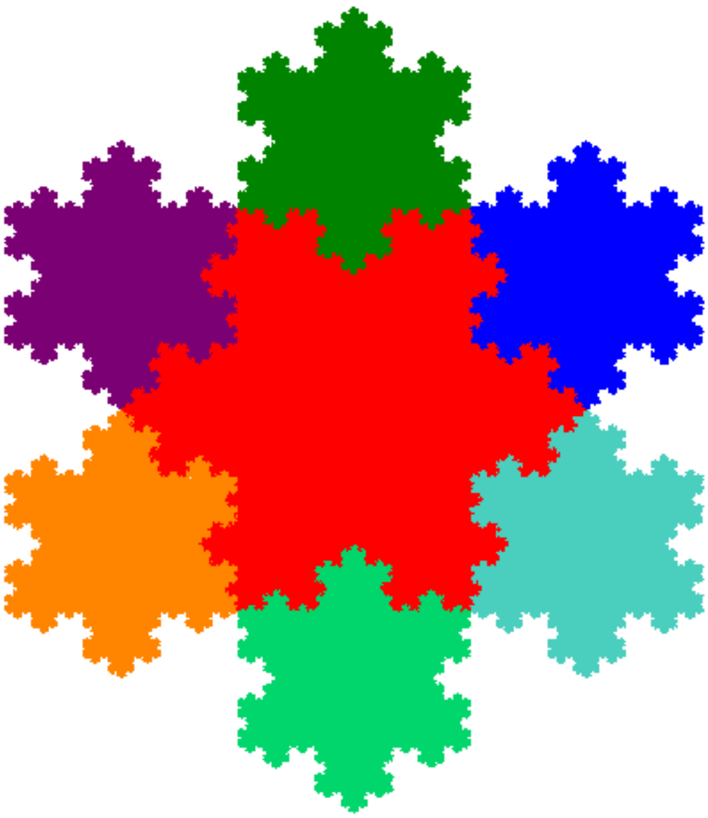
Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info
Quaderni di Fisica – 2018

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right)$$

Traiettoria frattale di un tram

Marcello Colozzo



Una vettura tramviaria percorre in città una linea chiusa lunga l fermandosi n volte a distanze uguali; alla partenza da ogni fermata il tram accelera con accelerazione costante a_+ fino a raggiungere la velocità v_0, poi, in vista della successiva fermata, decelera con decelerazione costante a_-. Calcolare, trascurando il tempo di fermata, il tempo T necessario per effettuare l'intero percorso. Discutere, infine, il comportamento per $n \to +\infty$, supponendo che l sia costante. (La decelerazione è data in valore assoluto, per cui è $a_- > 0$, assumendo poi $a_- \neq a_+$).

Soluzione

È istruttivo svolgere alcune considerazioni riferendosi a un generico $n \in \mathbb{N}$, osservando innanzitutto che il percorso seguito dal tram può essere schematizzato attraverso una poligonale Λ_n di lunghezza l, con lati di lunghezza uguale $d = \frac{l}{n}$. Ne consegue che ogni vertice V_k (per $k = 1, 2, ..., n$) è una fermata. Ed è facile convincersi che il minimo numero di vertici/fermate è $n_{\min} = 3$. Infatti:

Numero di fermate	**Luogo dei punti**
$n = 0$	$\Lambda_0 = \emptyset$
$n = 1$	$\Lambda_1 = \{V_1\}$
$n = 2$	$\Lambda_2 = \overline{V_1 V_2}$
$n = 3$	$\Lambda_3 =$ triangolo equilatero di vertici V_1, V_2, V_3
...	...
n	$\Lambda_n =$ poligonale di vertici $V_1, V_2, ..., V_n$

Denotiamo con t_k l'istante in cui il tram parte dalla stazione V_k. Siccome stiamo trascurando il tempo di fermata, si ha che t_k è anche il tempo di arrivo in V_k. In altri termini, il tram arriva e parte da V_k all'istante t_k, con $k = 1, 2, ..., n$. Consideriamo allora il percorso *k-esimo*, ovvero il segmento di estremi V_k e V_{k+1} (cfr. fig. 1) che, per quanto precede, ha lunghezza $d = l/n$. Ne consegue che $t_{k+1} - t_k$ è il tempo impiegato per percorrere il predetto tragitto. Quindi il tempo richiesto per coprire l'intero percorso è

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \tag{1}$$

Pertanto il problema è risolto se riusciamo a determinare il termine *k-esimo* della sommatoria, cioè l'intervallo di tempo $t_{k+1} - t_k$. A tale scopo, denotiamo con $t_{k,+} > t_k$ l'istante in cui il tram raggiunge (nel *k-esimo* percorso) la velocità v_0. Il problema dice che per $t \geq t_{k,+}$ il tram viaggia a velocità costante (v_0) fino all'avvistamento della fermata V_{k+1}. Indichiamo allora con $t_{k,*} > t_{k,+}$ tale istante. È chiaro, quindi, che per $t \in [t_{k,*}, t_{k+1}]$ il moto è uniformemente decelerato fino al raggiungimento di V_{k+1}.

Ciò premesso, scriviamo l'intervallo $t_{k+1} - t_k$ come somma di tre contributi:

$$t_{k+1} - t_k = (t_{k+1} - t_{k,*}) + (t_{k,*} - t_{k,+}) + (t_{k,+} - t_k) \tag{2}$$

Si tratta, dunque, di calcolare i singoli termini tra parentesi a secondo membro della (2). Prima di procedere, osserviamo che i dati forniti dal problema sono:

$$v_0, a_+, a_- \neq a_+$$

Assegnando un sistema di ascisse con origine in V_k, l'equazione oraria del moto del tram è

$$s(t) = \frac{1}{2} a_+ (t - t_k)^2, \quad t \in [t_k, t_{k,+}] \tag{3}$$

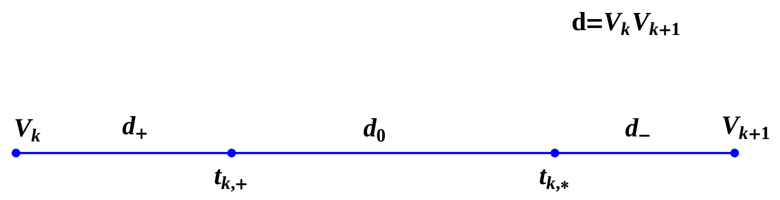


Figura 1: Percorso che unisce la fermata V_k alla fermata V_{k+1}, per un assegnato $k \in \{1, 2, ..., n\}$. All'istante $t_{k,+}$ il tram raggiunge la velocità v_0, mentre al tempo $t_{k,*} > t_{k,+}$ avvista la fermata V_{k+1}. In questo schema è $a_- > a_+$.

Qundi la velocità scalare:

$$v(t) = \dot{s}(t) = a_+ (t - t_k), \quad t \in [t_k, t_{k,+}] \tag{4}$$

Per quanto precede

$$v_0 = v(t_{k,+}) = a_+ (t_{k,+} - t), \tag{5}$$

da cui

$$t_{k,+} - t = \frac{v_0}{a_+}, \tag{6}$$

cioè il terzo termine a secondo membro della (2). Nell'intervallo $[t_{k,+}, t_{k,*}]$ il moto è rettilineo ed uniforme (a velocità v_0), per cui la distanza percorsa è

$$d_0 = v_0 (t_{k,*} - t_{k,+}),$$

da cui ricaviamo il secondo termine a secondo membro della (2)

$$t_{k,*} - t_{k,+} = \frac{d_0}{v_0}, \tag{7}$$

con l'avvertenza che non conosciamo d_0.

Nell'intervallo $[t_{k,*}, t_{k+1}]$ il moto è uniformemente decelerato con decelerazione (in valore assoluto) a_-. Assegnando un sistema di ascisse con origine nella posizione occupata dal tram all'istante $t_{k,+}$, l'equazione oraria del moto si scrive:

$$s(t) = v_0 (t - t_{k,*}) - \frac{1}{2} a_- (t - t_{k,*})^2, \quad t \in [t_{k,*}, t_{k+1}] \tag{8}$$

Derivando otteniamo la velocità

$$v(t) = \dot{s}(t) = v_0 - a_- (t - t_{k,*}), \quad t \in [t_{k,*}, t_{k+1}] \tag{9}$$

Il tram si ferma a V_{k+1}:

$$v\left(t_{k+1}\right)=0 \Longrightarrow v_0=a_-\left(t_{k+1}-t_{k,*}\right),$$

da cui

$$t_{k+1}-t_{k,*}=\frac{v_0}{a_-}, \tag{10}$$

cioè il primo termine a secondo membro della (2). Sostituendo le (10)-(7)-(6) nella (2), otteniamo:

$$t_{k+1}-t_k=\frac{d_0}{v_0}+v_0\left(\frac{1}{a_+}+\frac{1}{a_-}\right) \tag{11}$$

Per trovare d_0, denotiamo con d_+ e d_- lo spazio percorso nella fase accelerata e nella fase decelerata, rispettivamente (cfr. fig. 1). Deve essere

$$d_++d_0+d_-=d=\frac{l}{n}$$

Segue

$$d_0=\frac{l}{n}-\left(d_++d_-\right) \tag{12}$$

Dobbiamo allora determinare le distanze $d_\pm$. Dalla (3):

$$d_+=s\left(t_{k,+}\right)=\frac{1}{2}a_+\left(t_{k,+}-t_k\right)^2 \underset{\text{eq. (6)}}{=} \frac{v_0^2}{2a_+} \tag{13}$$

Dalla (8)

$$d_-=s\left(t_{k+1}\right)=v_0\left(t_{k+1}-t_{k,*}\right)-\frac{1}{2}a_-\left(t_{k+1}-t_{k,*}\right)^2 \tag{14}$$
$$\underset{\text{eq. (10)}}{=} \frac{v_0^2}{2a_-}$$

In tal modo la (12) diventa:

$$d_0=\frac{l}{n}-\frac{v_0^2}{2}\left(\frac{1}{a_+}+\frac{1}{a_-}\right) \tag{15}$$

Finalmente

$$t_{k+1}-t_k=\frac{l}{nv_0}+\frac{v_0}{2}\left(\frac{1}{a_+}+\frac{1}{a_-}\right), \tag{16}$$

che è indipendente da k. Ne consegue che il tempo necessario a completare l'intero percorso Λ_n è:

$$T_n=n\left(t_{k+1}-t_k\right)=\frac{l}{v_0}+\frac{nv_0}{2}\left(\frac{1}{a_+}+\frac{1}{a_-}\right) \tag{17}$$

Per $n\to+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}T_n=+\infty$$

Infatti, il tempo totale T_n aumenta linearmente in funzione del numero di fermate n. La rapidità con cui cresce è inversamente proporzionale a $a_\pm$. Eseguendo l'operazione di passaggio al limite per $a_\pm\to 0^+$:

$$T_n \underset{a_\pm\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty, \quad \forall n,$$

giacché occorerebbe un tempo infinito per passare da una velocità nulla alla velocità v_0 (per $a_+ = 0$). Nel limite opposto:

$$T_n \underset{a_\pm \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{l}{v_0}, \quad \forall n$$

Cioè il tram passa istantaneamente da $v = 0$ a $v = v_0$ in corrispondenza di una qualunque fermata, e viceversa, da $v = v_0$ a $v = 0$ per fermarsi alla successiva. In tal modo, ci si svincola da n:

$$T = \frac{l}{v_0}, \tag{18}$$

e

$$t_{k+1} - t_k = \frac{l}{nv_0} = \frac{T}{n}, \tag{19}$$

per cui

$$t_{k+1} - t_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{20}$$

Ovviamente

$$n\left(t_{k+1} - t_k\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \cdot \infty \longrightarrow T = \frac{l}{v_0} \tag{21}$$

Il corrispondente percorso è

$$\lim_{n \to +\infty} \Lambda_n$$

Si tratta di una poligonale in cui ogni punto è un vertice. Un tale luogo geometrico è manifestamente una curva di Koch.