Intepretazione cinematica dei punti di flesso a tangente verticale

Premettiamo che tali punti sono cinematicamente impossibili, poiché implicano una discontinuità di seconda specie della velocità $v(t)$ e dell'accelerazione $a(t)$. Consideriamo, ad esempio, una particella che si muove lungo l'asse x secondo la legge oraria:

$$x(t) = \begin{cases} x_1 - \sqrt{t_1 - t}, & t \in [0, t_1] \\ x_1 + \sqrt{t - t_1}, & t \in (t_1, +\infty) \end{cases}, \tag{1}$$

per assegnati $x_1 \neq 0$, $t_1 > 0$.

Insieme di definizione

La funzione $x(t)$ è definita in $[0, +\infty)$ risultando ivi continua.

Intersezione con gli assi coordinati tx

Riesce:

$$x(0) = x_1 - \sqrt{t_1} \tag{2}$$

Ricerca degli zeri di $x(t)$:

$$t \in [0, t_1] \Longrightarrow \left(x(t) = 0 \Longleftrightarrow x_1 - \sqrt{t_1 - t} = 0\right.$$

Cioè in $[0, t_1]$ abbiamo

$$t_1' = t_1 - x_1^2 \tag{3}$$

Deve essere $t_1' \in [0, t_1]$, onde

$$\begin{aligned} 0 \leq t_1' \leq t_1 &\Longleftrightarrow 0 \leq t_1 - x_1^2 \leq t_1 \Longleftrightarrow -t_1 \leq -x_1^2 \leq t_1 \\ &\Longleftrightarrow t_1 \geq x_1^2 \geq -t_1 \Longleftrightarrow x_1^2 \leq t_1 \Longleftrightarrow x_1 \in \left[-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}\right] \end{aligned}$$

Cioè

$$\exists t_1' \in [0, t_1] \mid x(t_1') = 0 \Longleftrightarrow x_1 \in \left[-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}\right]$$

In altri termini, nella (1) x_1 e $t_1 > 0$ sono due parametri indipendenti. Tuttavia assegnato t_1, la funzione $x(t)$ ha uno zero in $[0, t_1]$ se e solo se $x_1 \in \left[-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}\right]$.

Dalla (2) segue

$$x_1 \in \left[-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}\right] \Longrightarrow x(0) \leq 0 \tag{4}$$

Esaminiamo ora l'eventuale presenza di zeri in $(t_1, +\infty)$. Deve essere

$$x_1 + \sqrt{t - t_1} = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{t - t_1} = -x_1,$$

che ha soluzioni se e solo se $x_1 < 0$:

$$t - t_1 = x_1^2,$$

da cui lo zero

$$t_2' = t_1 + x_1^2, \quad (x_1 < 0) \tag{5}$$

Comportamento all'infinito

Abbiamo

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(x_1 + \sqrt{t - t_1}\right) = +\infty$$

Cioè la funzione $x(t)$ diverge positivamente per $t \to +\infty$.

Velocità scalare

Deriviamo:

$$t \in [0, t_1] \Longrightarrow v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t_1 - t}}\frac{d}{dt}(t_1 - t) = \frac{1}{2\sqrt{t_1 - t}}$$
$$t \in (t_1, +\infty) \Longrightarrow v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\sqrt{t - t_1}}\frac{d}{dt}(t - t_1) = \frac{1}{2\sqrt{t - t_1}}$$

Segue

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{|t - t_1|}} \tag{6}$$

Tale funzione non è definita in $t = t_1$. Precisamente:

$$\lim_{t \to t_1} v(t) = +\infty, \tag{7}$$

cosicché t_1 è un punto di infinito per $v(t)$. Come è noto dal Calcolo differenziale, la (7) esprime la circostanza secondo cui la funzione $x(t)$ è dotata di derivata infinita in t_1. Geometricamente, il punto $P_1(t_1, x(t_1) = x_1)$ è un *flesso a tangente verticale* per il diagramma orario. Infatti, la retta tangente al diagramma orario nel punto P_1 ha coefficiente angolare dato dalla (7).

Accelerazione scalare

Per derivare la (6) è preferibile svincolarsi dal valore assoluto:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t_1 - t}}, & t \in [0, t_1) \\ \frac{1}{2\sqrt{t - t_1}}, & t \in (t_1, +\infty) \end{cases} \tag{8}$$

Segue

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{(t_1 - t)^3}}, & t \in [0, t_1) \\ \frac{-1}{4\sqrt{(t - t_1)^3}}, & t \in (t_1, +\infty) \end{cases} \tag{9}$$

Abbiamo

$$\lim_{t \to t_1^-} a(t) = \frac{1}{4}\lim_{t \to t_1^-}\frac{1}{\sqrt{(t_1 - t)^3}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$
$$\lim_{t \to t_1^+} a(t) = \frac{1}{4}\lim_{t \to t_1^+}\frac{1}{\sqrt{(t - t_1)^3}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{0^+}\right) = -\infty,$$

onde t_1 è un punto di infinito per la funzione $a(t)$.

Istanti di arresto

Riesce

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{|t - t_1|}} = 0 \quad \text{mai!} \Longrightarrow \nexists \text{ istanti di arresto}$$

Inoltre

$$v(t) > 0, \quad \forall t \in A = [0, t_1) \cup (t_1, +\infty)) \Longrightarrow x(t) \text{ è strettamente crescente in } A \tag{10}$$

Osservazione 1 *È facile persuadersi che la funzione $x(t)$ è strettamente crescente anche in t_1. Nella (10) abbiamo escluso t_1, in quanto $v(t)$ non è ivi definita.*

Concavità

Dal momento che $P_1(t_1, x_1)$ è un punto di flesso ascendente e a tangente verticale, si ha che il diagramma orario volge la concavità verso l'alto per $t \in [0, t_1)$, mentre per $t \in (t_1, +\infty)$ la concavità è rivolta verso il basso. Ciò è confermato dallo studio del segno della funzione (9).

Asintoto obliquo a destra

Abbiamo

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{x(t)}{t} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \lim_{t \to +\infty} v(t) = 0^+$$

D'altra parte, $x(t)$ è divergente positivamente per $t \to +\infty$, onde il suo diagramma cartesiano non può avere un asintoto con coefficiente angolare nullo, che sarebbe un asintoto orizzontale.

Velocità iniziale

Dalla 6

$$v(0) = \frac{1}{2\sqrt{t_1}} > 0$$

Quindi la particella parte da $x(0) = x_1 - \sqrt{t_1}$ alla velocità $v(0) = \frac{1}{2\sqrt{t_1}}$. Per quanto precede, se $x_1 < \sqrt{t_1}$ è $x(0) < 0$. Il moto è progressivo: la particella transita per l'origine al tempo $t_1' = t_1 - x_1^2$, raggiungendo il punto x_1 al tempo t_1, transitando a velocità infinita. Per $t > t_1$ la velocità decresce per annullarsi all'infinito.

Tracciamento dei grafici

Nelle figg. 1-2-3 riportiamo il diagramma orario seguito dai diagrammi delle funzioni $v(t)$ e $a(t)$.

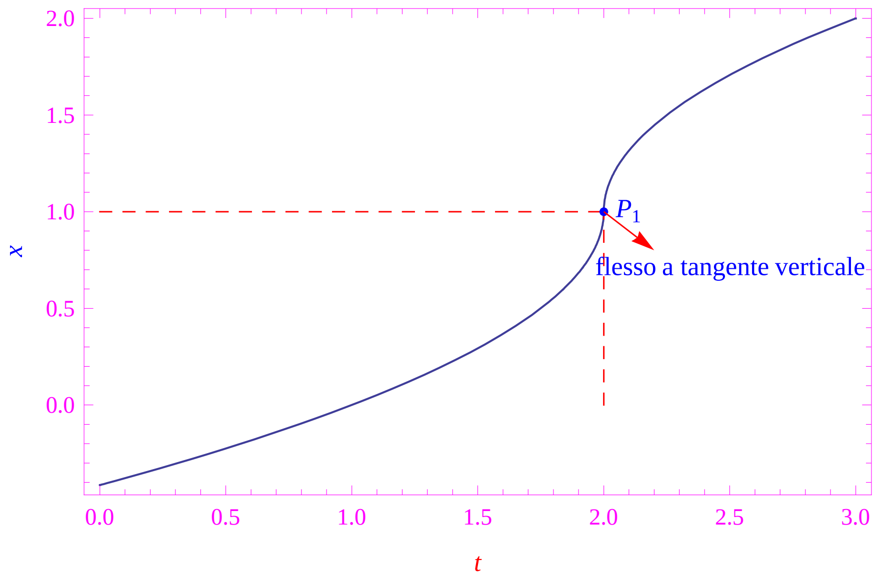

Figura 1: Diagramma orario della particella dell'esercizio 1.

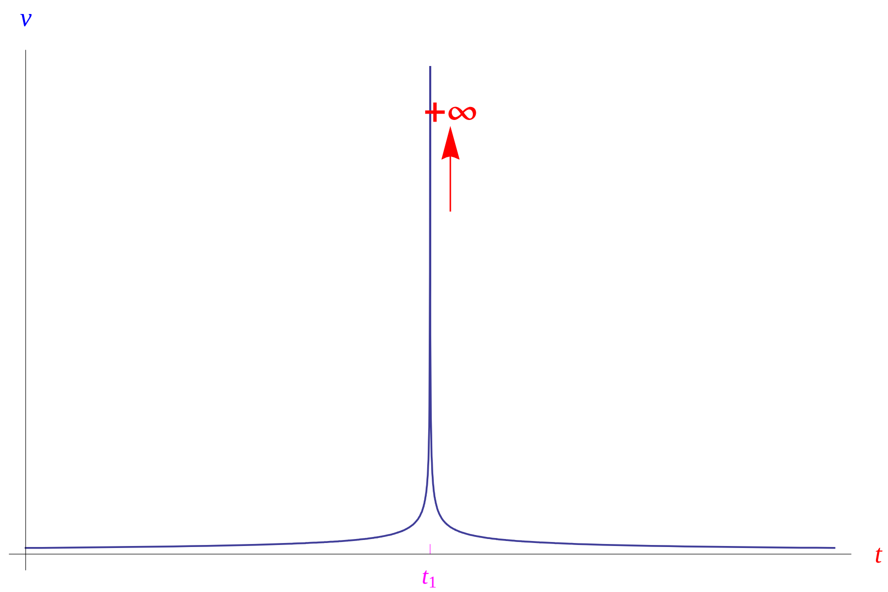

Figura 2: Velocità della particella in funzione del tempo (esercizio ??).

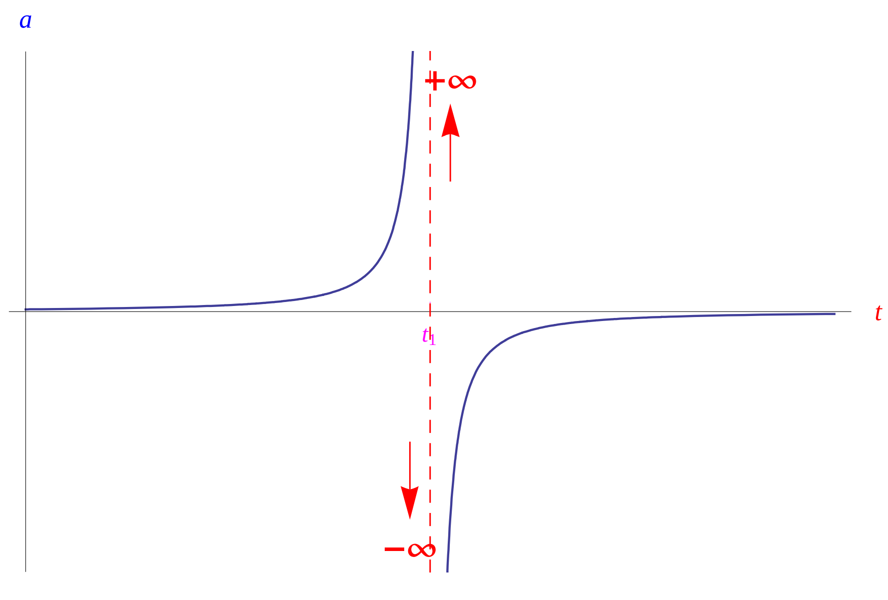

Figura 3: Accelerazione della particella in funzione del tempo (esercizio ??).