Intepretazione cinematica dei punti di flesso a tangente obliqua

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esaminiamo ora gli istanti di tempo che sono punti di flesso a tangente obliqua per il diagramma orario. Come è noto dal Calcolo[1]:

$$\exists t_* \in (0, +\infty) \mid \left. \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right|_{t=t_*} = 0 \tag{1}$$

Quindi in t_* deve annullarsi l'accelerazione, mentre la velocità:

$$v(t_*) \neq 0, \tag{2}$$

giacché nel caso contrario abbiamo un flesso a tangente orizzontale (già esaminato in un articolo precedente). Dalla (2) segue che i casi possibili sono:

$$\begin{array}{ll} v(t_*) > 0 & \text{(flesso ascendente)} \\ v(t_*) < 0 & \text{(flesso discendente)} \end{array} \tag{3}$$

Lo svolgimento del seguente esercizio illustra quanto appena asserito.

Esercizio 1 *Studiare il moto unidimensionale di equazione oraria:*

$$x(t) = -t^4 + 2t^3 + t^2 + t, \qquad (t \geq 0) \tag{4}$$

Soluzione

Zeri di $x(t)$

Riesce

$$x(0) = 0,$$

cioè il diagramma orario passa per l'origine del sistema di assi tx. Cinematicamente, significa che la particella occupa a $t = 0$ la posizione $x = 0$. Risolviamo

$$x(t) = 0 \Longleftrightarrow t\left(t^3 - 2t^2 - t - 1\right) = 0$$

Scartando la radice $t = 0$ già trovata in precedenza, determiniamo le radici dell'equazione

$$t^3 - 2t^2 - t - 1 = 0$$

Tale equazione ha una sola radice reale:

$$t_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{61 - 9\sqrt{29}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{61 + 9\sqrt{29}}{2}}\right) \simeq 2.55 \tag{5}$$

Ciò implica che la particella ripassa per l'origine al tempo t_1.

Velocità scalare

[1]Rammentiamo che la (1) esprime una condizione necessaria ma non sufficiente affinché t_* sia punto di flesso. Per la sufficienza occorre lo studio della derivata terza che qui omettiamo.

Derivando la funzione (4):

$$v(t) = -4t^3 + 6t^2 + 2t + 1, \tag{6}$$

i cui zeri sono le radici dell'equazione di terzo grado:

$$4t^3 - 6t^2 - 2t - 1 = 0$$

Precisamente, abbiamo una sola radice reale:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\left(\sqrt[3]{648 - 24\sqrt{354}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{27 + \sqrt{354}}{9}}\right) \simeq 1.844, \tag{7}$$

che è un punto estremale per la funzione $x(t)$.

Monotonia di $v(t)$

Studiamo il segno della derivata prima, ossia della funzione (6):

$$v(t) > 0 \Longleftrightarrow 4t^3 - 6t^2 - 2t - 1 < 0 \tag{8}$$

Con l'ausilio di *Mathematica*, otteniamo:

$$\begin{aligned} t \in [0, \tau_1) &\Longrightarrow v(t) > 0 \\ t \in (\tau_1, +\infty) &\Longrightarrow v(t) < 0 \end{aligned}$$

Cioè $x(t)$ è strettamente crescente in $[0, \tau_1)$ e strettamente decrescente in $(\tau_1, +\infty)$. Ne consegue che τ_1 è punto di massimo relativo per $x(t)$:

$$x_{\max} = x(\tau_1) \simeq 6.22 \tag{9}$$

Accelerazione scalare

Abbiamo

$$a(t) = \dot{v}(t) = -2\left(6t^2 - 6t - 1\right) \tag{10}$$

La ricerca degli zeri è immediata:

$$a(t) = 0 \Longleftrightarrow 6t^2 - 6t - 1 = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{6}$$

Scartando la radice negativa

$$t_* = \frac{3 + \sqrt{15}}{6} \simeq 1.14 \tag{11}$$

Il segno della funzione $a(t)$ è:

$$a(t) > 0 \Longleftrightarrow 6t^2 - 6t - 1 < 0 \Longleftrightarrow t \in \left(\frac{3 - \sqrt{15}}{6}, \frac{3 + \sqrt{15}}{6}\right)$$

Dal momento che siamo interessati a istanti di tempo ≥ 0:

$$\begin{aligned} t \in \left(0, \frac{3 + \sqrt{15}}{6}\right) &\Longrightarrow a(t) > 0 \\ t \in \left(\frac{3 + \sqrt{15}}{6}, +\infty\right) &\Longrightarrow a(t) < 0 \end{aligned}$$

Quindi il diagramma orario volge la concavità verso l'alto per $t \in \left(0, \frac{3+\sqrt{15}}{6}\right)$, mentre per $t \in \left(\frac{3+\sqrt{15}}{6}, +\infty\right)$ volge la concavità verso il basso. Ne consegue che $P_* (t_*, x_*)$ con $x_* = x(t_*)$ è punto di flesso a tangente obliqua, ed è un flesso ascendente. Scriviamo l'equazione della retta tangente al diagramma orario nel punto di flesso. Il coefficiente angolare è

$$m_* = v(t_*) = 3 + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}},$$

onde l'equazione si scrive:

$$x - x_* = m_* (t - t_*)$$

Sviluppando e semplificando:

$$x = \frac{1}{36}\left[4\left(27 + 5\sqrt{15}\right)t - 39 - 10\sqrt{15}\right] \tag{12}$$

Velocità iniziale

Tale valore fornisce il coefficiente angolare della retta tangente al diagramma orario nel punto $(0, 0)$. Risulta: $m_0 = v(0) = 1$.

Comportamento all'infinito

Abbiamo

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \infty - \infty = \lim_{t \to +\infty} t^4 \left(-1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right) = -\infty,$$

cioè la funzione diverge negativamente per $t \to +\infty$. Eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} v(t) = -\infty,$$

per cui il diagramma orario è privo di asintoto obliquo per $t \to +\infty$.

Tracciamento del grafico

Ora abbiamo gli elementi per tracciare il diagramma orario (fig. 1).

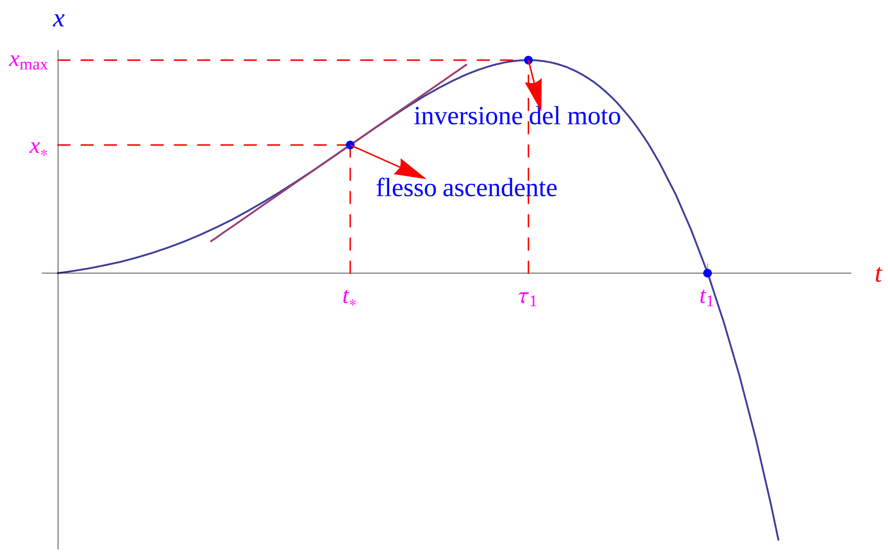

Figura 1: Diagramma orario della particella dell'esercizio 1.

Interpretazione cinematica

A $t=0$ la particella parte da $x=0$ con velocità $v(0)=1$. Accelera fino a $t_* \simeq 1.14$, istante in cui l'accelerazione si annulla per invertire il proprio segno. Qundi, la particella decelera fino al raggiungimento della massima distanza $x_{\max} \simeq 6.22$ dall'origine. Tale ascissa è raggiunta all'istante $\tau_1 \simeq 1.844$ che risulta essere un istante di arresto con inversione del moto. Quindi la particella transita per l'origine a $t_1 \simeq 2.55$, proseguendo verso $-\infty$.