Corsa campestre

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *La fig. 1 riporta il grafico della velocità in funzione del tempo mantenuta da un corridore nei primi* 8 *secondi di una corsa campestre. Graficare l'andamento dell'ascissa* x *e dell'accelerazione in funzione del tempo. Quale è la distanza percorsa nel predetto intervallo di tempo?*

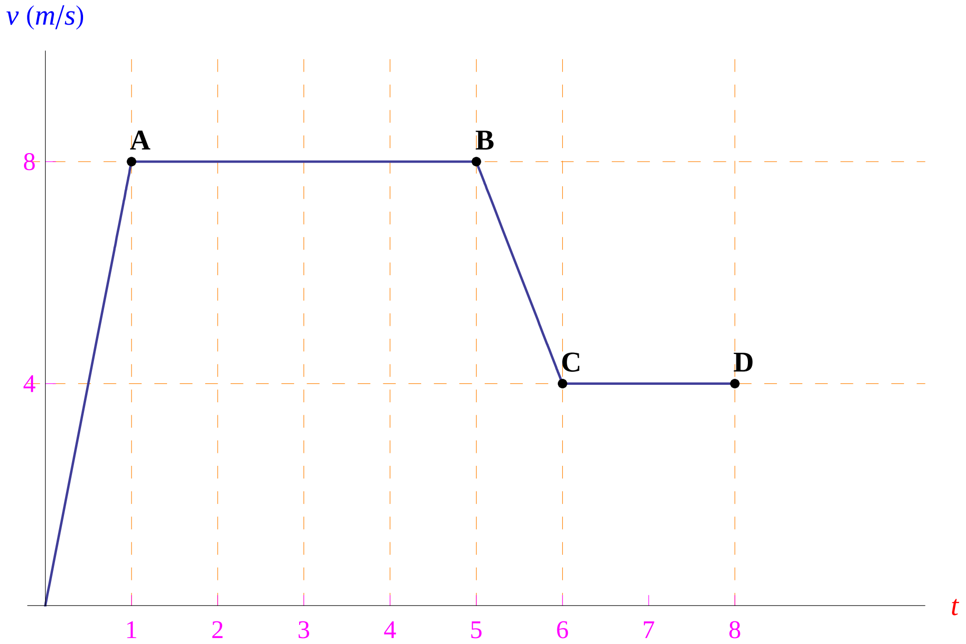

Figura 1: Esercizio 1

Soluzione

Scriviamo l'espressione analitica della funzione $v(t)$:

$$v(t)=\begin{cases} a_1 t, & t\in[0,1] \\ 8, & t\in[1,5], \\ a_2 t+b, & t\in[5,6] \\ 4, & t\in[6,8] \end{cases}, \tag{1}$$

dove $a_1>0$ è l'accelerazione del corridore per $t\in[0,1]$, ed è anche il coefficiente angolare della retta per $O(0,0)$ e $A(1,8)$. Quindi

$$a_1=8\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2 \tag{2}$$

$a_2<0$ è la decelerazione per $t\in[5,6]$ e quindi, il coefficiente angolare della retta per $B(5,8)$ e $C(6,4)$:

$$a_2=\frac{4-8}{6-5}\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2=-4\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2, \tag{3}$$

mentre $b>0$ è l'ordinata all'origine della predetta retta:

$$v=-4t+b$$

Imponendo il passaggio per B:

$$8=-4\cdot 5+b\Longrightarrow b=28$$

Per maggiore chiarezza, riscriviamo la (1):

$$v(t)=\begin{cases} 8t, & t\in[0,1] \\ 8, & t\in[1,5], \\ 28-4t, & t\in[5,6] \\ 4, & t\in[6,8] \end{cases}, \tag{4}$$

Si noti che la (4) definisce una funzione continua, e i punti A, B, C sono punti di raccordo per il suo diagramma cartesiano:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to1^-} v(t) &= \lim_{t\to1^+} v(t) \\ \lim_{t\to5^-} v(t) &= \lim_{t\to5^+} v(t) \\ \lim_{t\to6^-} v(t) &= \lim_{t\to6^+} v(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Per ricavare l'equazione oraria, dobbiamo integrare la (4) e ciò è possibile grazie alla continuità di tale funzione. Quindi

$$x(t)=\int v(t)\,dt=\begin{cases} 4t^2+c_1 & t\in[0,1] \\ 8t+c_2, & t\in[1,5], \\ 28t-2t^2+c_3, & t\in[5,6] \\ 4t+c_4, & t\in[6,8] \end{cases}, \tag{6}$$

essendo $c_1, ..., c_4$ costanti di integrazione da determinare attraverso le condizioni di raccordo. Rileviamo innanzitutto che la retta tangente al diagramma orario $x = x(t)$ varia con continuità in virtù della continuità della derivata $\dot{x}(t) \equiv v(t)$. In altri termini, il diagramma orario è privo di punti angolosi. Verificheremo ciò manualmente.

Assumendo $x(0) = 0$, si ha dalla prima delle (6):

$$c_1 = 0$$

Quindi

$$x(t) = 4t^2, \ \ t\in[0,1], \tag{7}$$

cioè un arco di parabola di estremi $(0,0)$ e $(1,4)$. Raccordando le soluzioni in $[0,1]\cup[1,5]$:

$$\lim_{t\to1^-} x(t) = \lim_{t\to1^+} x(t)$$

Dalla (7)

$$\lim_{t\to1^-} x(t) = 4,$$

onde

$$4=\lim_{t\to1^+} x(t) = \lim_{t\to1^+}(8t+c_2) = 8+c_2 \Longrightarrow c_2=-4 \tag{8}$$

Quindi

$$x(t) = 8t-4, \ t\in[1,5] \tag{9}$$

Si noti che il diagramma orario nell'intervallo $[1,5]$ è il segmento della retta tangente all'arco di parabola (7) nel punto $(1,4)$. Ciò garantisce la continuità della derivata prima, i.e. della velocità $v(t)$, nell'intervallo $[0,5]$, come possiamo vedere dal grafico di fig. 2.

Per $t\in[5,6]$ è $x(t) = 28t-2t^2+c_3$, per cui imponendo la condizione di raccordo:

$$\lim_{t\to5^-} x(t) = \lim_{t\to5^+} x(t)$$

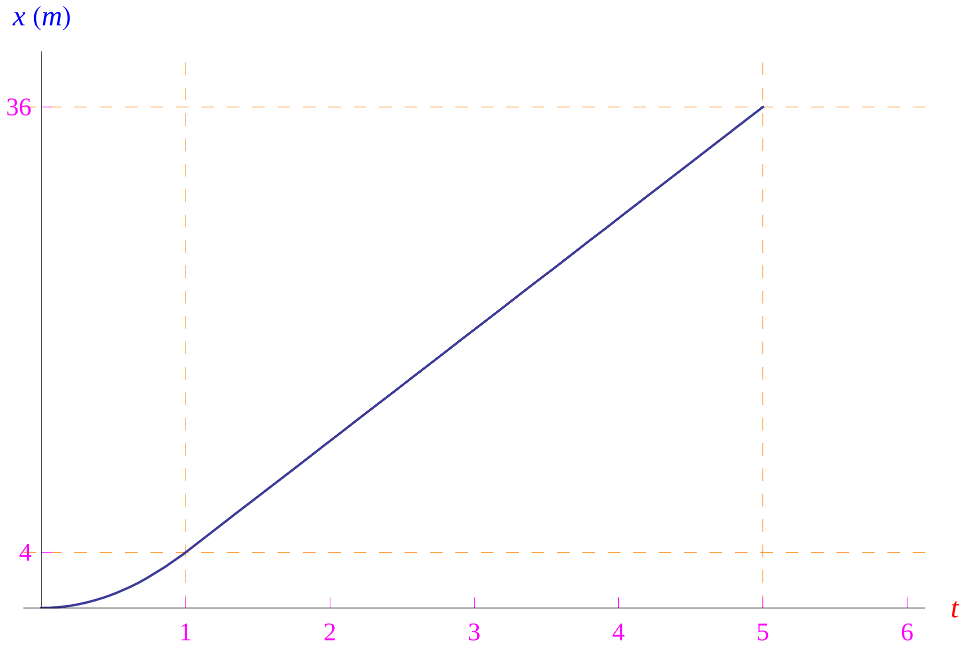

Figura 2: Esercizio 1. Andamento dell'ascissa x in funzione del tempo, nell'intervallo $[0, 5]$.

Dalla (9)

$$\lim_{t \to 5^-} x(t) = 36,$$

onde

$$36 = \lim_{t \to 5^+} x(t) = \lim_{t \to 5^+} \left(28t - 2t^2 + c_3\right) = 140 - 50 + c_3 \Longrightarrow c_3 = -54 \tag{10}$$

Quindi

$$x(t) = -2t^2 + 28t - 54, \ t \in [5, 6], \tag{11}$$

cioè un arco di parabola concavo. Anche questa volta c'è continuità della derivata prima in $t = 5$, come mostrato nel grafico di fig. 3, giacché

$$v(t) = \dot{x}(t) = \begin{cases} 8, & t \in [1, 5] \\ -4t + 28, & t \in [5, 6] \end{cases},$$

per cui

$$\lim_{t \to 5^-} \dot{x}(t) = 8, \ \lim_{t \to 5^+} \dot{x}(t) = \lim_{t \to 5^+} (-4t + 28) = 8$$

Raccordiamo ora gli ultimi due archi del diagramma orario. Deve essere:

$$\lim_{t \to 6^-} x(t) = \lim_{t \to 6^+} x(t)$$

Dalla (11):

$$\lim_{t \to 6^-} x(t) = 42,$$

onde

$$42 = \lim_{t \to 6^-} x(t) = \lim_{t \to 6^-} (4t + c_4) = 24 + c_4 \Longrightarrow c_4 = 18 \tag{12}$$

Finalmente:

$$x(t) = \begin{cases} 4t^2 & t \in [0, 1] \\ 8t - 4, & t \in [1, 5], \\ 28t - 2t^2 - 54, & t \in [5, 6] \\ 4t + 18, & t \in [6, 8] \end{cases} \tag{13}$$

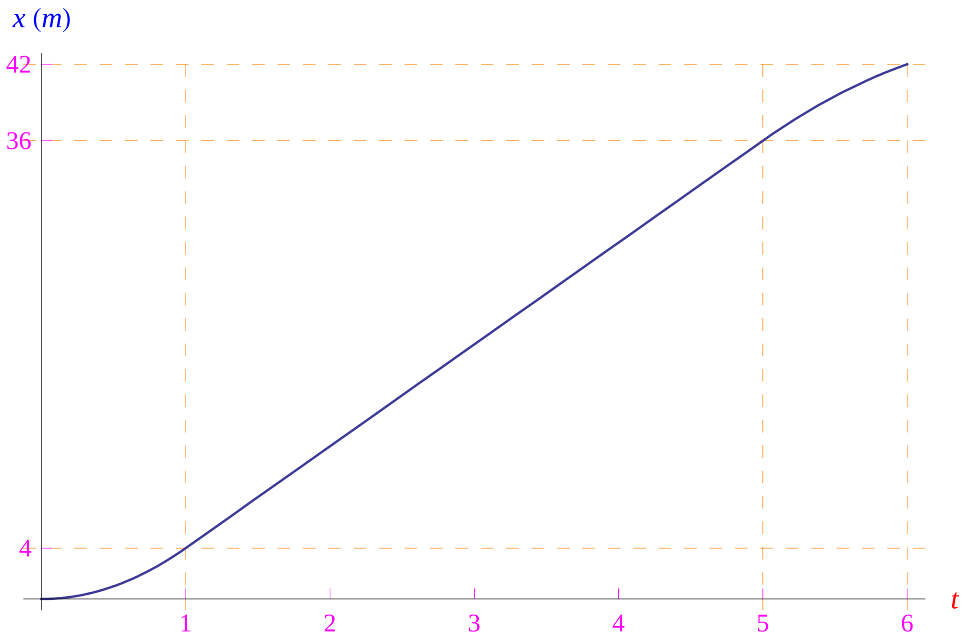

Figura 3: Esercizio 1. Andamento dell'ascissa x in funzione del tempo, nell'intervallo $[0, 6]$.

Il diagramma orario completo è riportato in fig. 4, mentre la distanza totale percorsa è $x(8) = 50\,\mathrm{m}$.

Per la determinazione dell'accelerazione $a(t)$, osserviamo innanzitutto che i punti $A(1, 8), B(5, 8), C(6, 4)$ del grafico della velocità $v(t)$ sono punti angolosi, e quindi gli istanti $t = 1$, $t = 5$, $t = 6$ sono punti di discontinuità di prima specie per la funzione $a(t)$. Abbiamo

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \begin{cases} 8, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \in [1, 5], \\ -4, & t \in [5, 6] \\ 0, & t \in [6, 8] \end{cases}, \tag{14}$$

per cui

$$\begin{gathered} \lim_{t \to 1^-} a(t) = 8, \ \lim_{t \to 1^+} a(t) = 0 \\ \lim_{t \to 5^-} a(t) = 0, \ \lim_{t \to 5^+} a(t) = -4 \\ \lim_{t \to 6^-} a(t) = -4, \ \lim_{t \to 6^+} a(t) = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

Il diagramma cartesiano della funzione $a(t)$ è riportato in fig. 5.

Esercizio 2 *Un elettrone con velocità iniziale* $v_0 = 1.5 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$ *attraversa una regione di spazio dove viene accelerato da un campo elettrostatico, come mostrato in fig. 6, emergendo con velocità* $v_1 = 5.8 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$. *Si determini il modulo dell'accelerazione, assumendo che quest'ultima sia costante, nonché il tempo necessario per attraversare la predetta regione.*

Soluzione

Fissiamo un asse x con direzione e verso del moto dell'elettrone (fig. 6), e con l'origine nel punto iniziale della regione in cui ha sede il campo elettrostatico. Quindi l'equazione oraria del moto dell'elettrone si scrive:

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \tag{16}$$

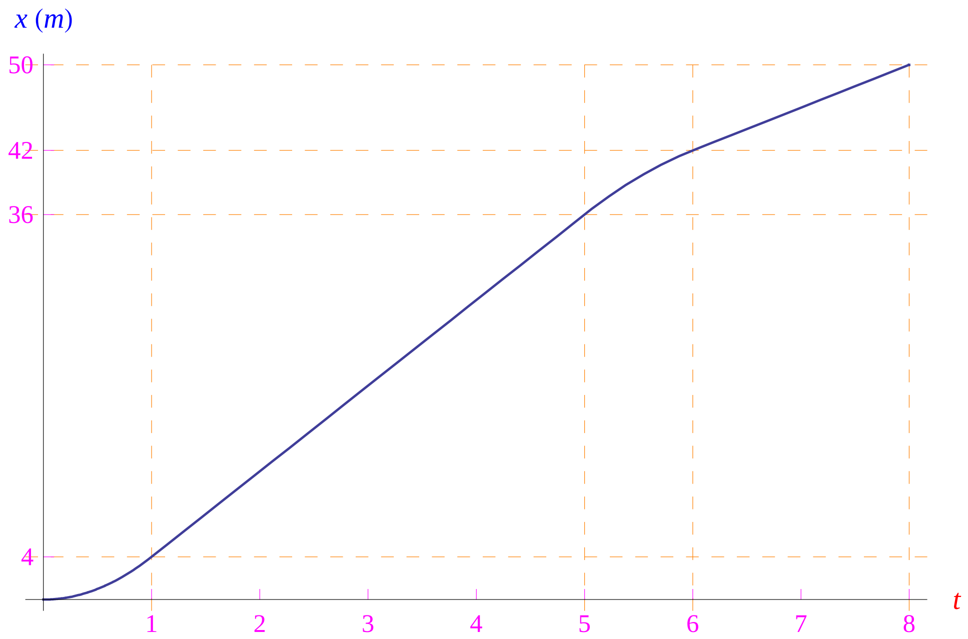

Figura 4: Esercizio 1. Diagramma orario del corridore.

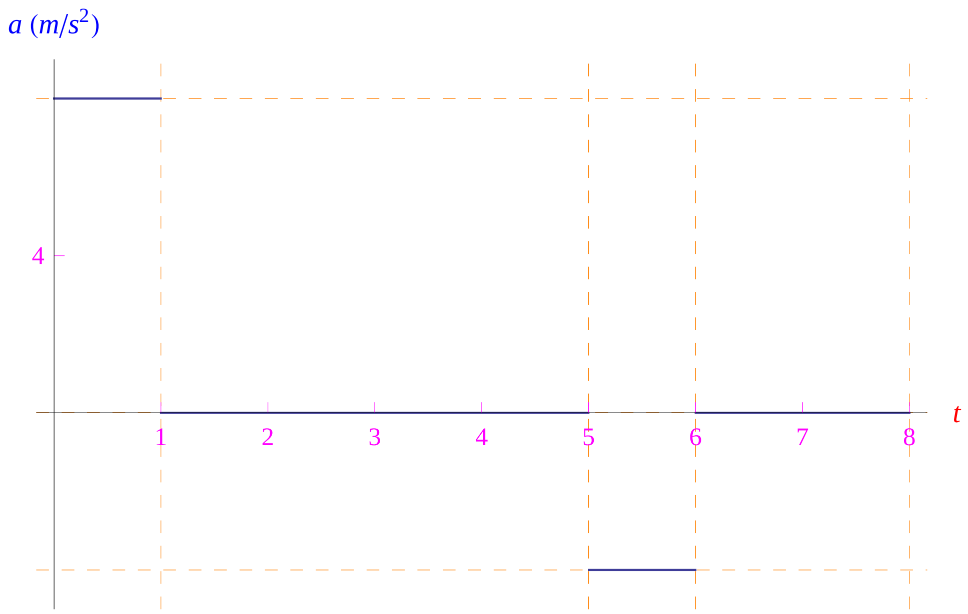

Figura 5: Esercizio 1. Accelerazione del corridore.

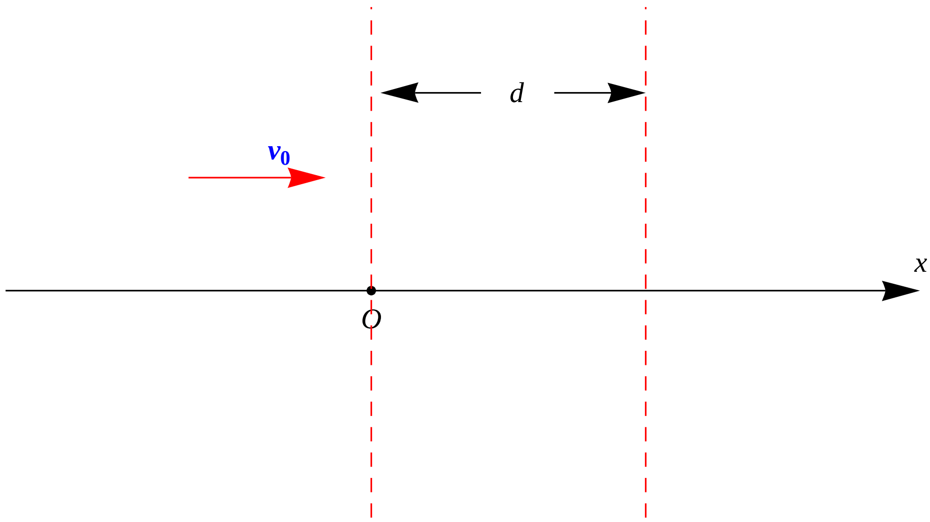

Figura 6: L'elettrone entra nella regione sede di un campo elettrostatico con velocità $v_0 = 1.5 \cdot 10^5 \, \mathrm{m/s}$.

ove abbiamo assunto come istante iniziale $t_0 = 0$ l'istante in cui l'elettrone entra nella regione. La velocità è:

$$v(t) = v_0 + at \tag{17}$$

Se t_1 è l'istante in cui l'elettrone emerge dalla regione, si ha:

$$v_1 = v(t_1) = v_0 + at_1, \tag{18}$$

mentre

$$d = x(t_1)$$

Cioè

$$d = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \tag{19}$$

Le (18)-(19) formano il seguente sistema

$$\begin{cases} v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = d \\ v_0 + a t_1 = v_1 \end{cases},$$

nelle incognite (a, t_1). Ricaviamo $t_1$dalla seconda

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a} \tag{20}$$

per sostituirlo nella prima ottenendo (dopo i dovuti passaggi)

$$a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2d} \simeq 1.4 \cdot 10^{15} \, \mathrm{m/s} \tag{21}$$

Infine dalla (20) ricaviamo il tempo di attraversamento

$$t_1 \simeq 4 \cdot 10^{-9} \, \mathrm{s}$$