Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Problema 1 *Due mitragliatrici sparano proiettili schematizzabili attraverso punti materiali che compiono un moto rettilineo ed uniforme con velocità* $\mathbf{v}_0$*, in una direzione che ruota in un piano con velocità angolare costante* ω_0 *(v. fig. 1).I proiettili collidono nel punto* R*. A*

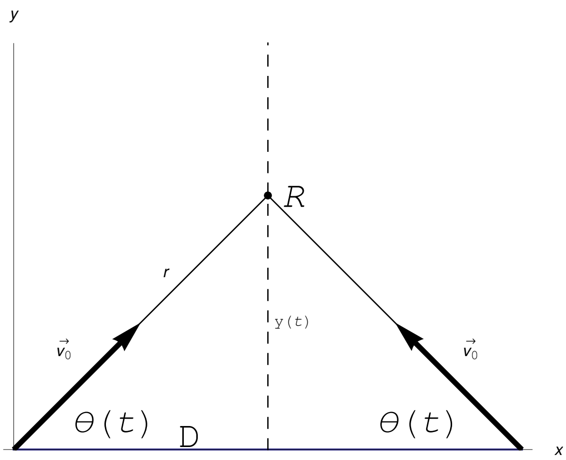

Figure 1: Le mitragliatrici si trovano a distanza D l'una dall'altra.

causa della rotazione della direzione di sparo tale punto si sposta lungo la retta $x - D = 0$*.*
Determinare la velocità del punto R*.*

Svolgimento.

Fissiamo un sistema di assi cartesiani Oxy come in fig.1. Quindi è $R\left(\frac{D}{2}, y(t)\right)$. Inoltre, posto $\theta(t) = \omega_0 t$ si ha $y(t) = D \tan\theta(t)$ che derivata rispetto al tempo porge:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\omega_0 D}{\cos^2\theta(t)}$$

ovvero:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\omega_0 D}{\cos^2(\omega_0 t)}$$

Risulta:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2\omega}} \frac{dy}{dt} = +\infty$$

Questo risultato è sbagliato, poichè non tiene conto della velocità finita ($\mathbf{v}_0$) dei proiettili. Precisamente, la situazione cinematica è la seguente: se al tempo t viene sparato un proiettile, quest'ultimo giungerà in R al tempo $t + \Delta t$, con $\Delta t = \frac{D}{v_0 \cos\theta(t)}$. In simboli:

$$t \rightsquigarrow t + \frac{D}{v_0 \cos\theta(t)} \tag{1}$$

Le mitragliatrici sparano in rapida successione, per cui possiamo approssimare a un continuo l'insieme degli istanti di sparo. Quindi, il proiettile successivo verrà sparato a $t + dt$. Con la notazione simbolica precedente, scriviamo:

$$\begin{aligned} t + dt \rightsquigarrow t &+ \frac{D}{v_0 \cos\theta(t)} + d\left(t + \frac{D}{v_0 \cos\theta(t)}\right) \\ &= t + \frac{D}{v_0 \cos\theta(t)} + dt + \frac{D}{v_0} \frac{\sin\theta(t)}{\cos^2\theta(t)} d\theta \end{aligned} \tag{2}$$

Deve essere:

$$t + dt = t + \frac{D}{v_0 \cos\theta(t)} + dt', \tag{3}$$

che confrontata con la precedente:

$$dt' = dt + \frac{D}{v_0} \frac{\sin\theta(t)}{\cos^2\theta(t)} d\theta \tag{4}$$

Per quanto detto:

$$\begin{aligned} dt = &\ \text{intervallo di tempo fra 2 spari consecutive} \\ dt' = &\ \text{intervallo di tempo fra 2 collisioni consecutive} \end{aligned}$$

Le coordinate cartesiane del punto R sono $x = D$, $y(t) = D \tan\theta(t)$, per cui il suo vettore posizione è:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}D + \mathbf{j}D \tan\theta(t),$$

essendo $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ i versori degli assi cartesiani. La velocità di R è:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt'} = \mathbf{j}\frac{dy}{dt'}, \quad y = D\tan\theta(t)$$

Passando al modulo:

$$\begin{aligned} v = \frac{dy}{dt'} &= D\frac{d}{dt'}\tan\theta(t) \\ &= D\frac{d\tan\theta(t)}{dt}\frac{dt}{dt'} \\ &= D\frac{1}{\cos^2(\omega_0 t)}\frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dt'} \end{aligned}$$

Ma $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$:

$$v = \frac{D\omega_0}{\cos^2(\omega_0 t)}\frac{dt}{dt'} \tag{5}$$

Dalla (4) ricaviamo:

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{\omega_0 D}{v_0}\frac{\sin(\omega_0 t)}{\cos^2(\omega_0 y)} \tag{6}$$

Prima di sostituirla nella precedente, osserviamo che:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2\omega_0}} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\cos^2(\omega_0 y)} = +\infty \Longrightarrow \lim_{t\to\frac{\pi}{2\omega_0}} \frac{dt'}{dt} = +\infty$$

Questo risultato è ovvio, poichè al tendere di $\theta(t) = \omega_0 t$ a $\frac{\pi}{2}$ (quindi $t \to \frac{\pi}{2\omega_0}$) le mitragliatrici tendono a direzioni parallele. In altre parole, al crescere di θ gli urti diventano meno frequenti. Inoltre, dalla (6):

$$\left.\frac{dt'}{dt}\right|_{t=0} = 1 \Longrightarrow dt' = dt$$

Osserviamo poi che a causa dell'alta velocità dei proiettili rispetto a $\omega_0 D$, si ha $\frac{\omega_0 D}{v_0} \ll 1$ e dalla (6) segue:

$$\frac{dt'}{dt} \sim 1, \quad \text{per } t \ll \frac{\pi}{2\omega_0},$$

come possiamo vedere dal grafico di fig.2.

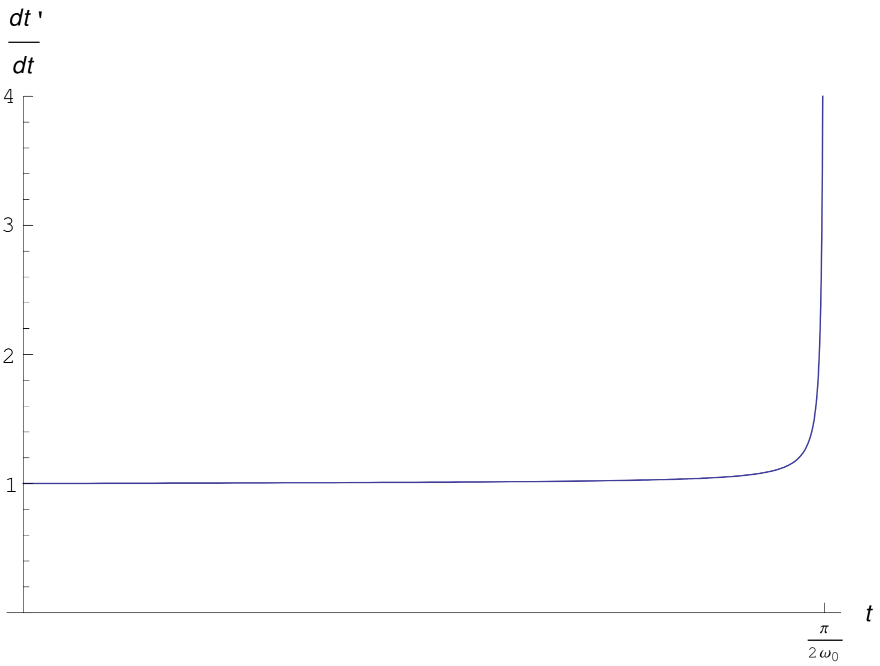

Figure 2: Andamento di $\frac{dt'}{dt}$ in funzione del tempo t.

A questo punto possiamo sostituire la (6) nella (5) ottenendo:

$$v(t) = \frac{v_0 \omega_0 D}{\omega_0 D \sin\omega_0 t + v_0 \cos^2 \omega_0 t} \quad, t \in \left[0, \frac{\pi}{2\omega_0}\right] \tag{7}$$

Da ciò vediamo che si tratta di una funzione continua in $\left[0, \frac{\pi}{2\omega_0}\right]$, avendosi:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2\omega_0}} v(t) = v\left(\frac{\pi}{2\omega_0}\right) = v_0$$

Inoltre:

$$v(t) \to \begin{cases} \omega_0 D, & \text{se } \theta \to 0 \\ \frac{v_0}{\sin\omega_0 t}, & \theta \sim \frac{\pi}{2} \end{cases}$$