
Esercizio

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Dimostrare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy_0)^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Svolgimento

Applichiamo il seguente teorema:

Teorema 1 (*Primo teorema di Cauchy*)

Se $f(z)$ è una funzione olomorfa nel campo A , comunque prendiamo un dominio regolare $D \subset A$, si ha:

$$\oint_{\pm \partial D} f(z) dz = 0 \quad (2)$$

Poniamo dunque

$$f(z) = e^{-z^2}, \quad (3)$$

manifestamente olomorfa in $\mathbb{R}^2$. Assegnato ad arbitrio $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, è univocamente determinato il dominio rettangolare:

$$D = [-x_0, x_0] \times [0, y_0] \quad (4)$$

Per il teorema 3:

$$\oint_{\partial D} e^{-z^2} dz = 0 \quad (5)$$

La frontiera di D è:

$$\partial D = \sum_{k=1}^4 \gamma_k, \quad (6)$$

in cui abbiamo assegnato un verso positivo, e:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : x = t, \quad y = 0, \quad -x_0 \leq t \leq x_0 \\ \gamma_2 : x = x_0, \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq y_0 \\ \gamma_3 : x = t, \quad y = y_0, \quad x_0 \geq t \geq -x_0 \\ \gamma_4 : x = -x_0, \quad y = t, \quad y_0 \geq t \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

come illustrato in fig. 1.

Segue:

$$0 = \oint_{\partial D} e^{-z^2} dz = \oint_{\partial D} e^{-(x+iy)^2} (dx + i dy), \quad (8)$$

avendo denotato con i l'unità immaginaria. In virtù delle (7):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} e^{-(x+iy)^2} (dx + i dy) &= \sum_{k=1}^4 \oint_{\gamma_k} e^{-(x+iy)^2} (dx + i dy) = \\ &= \int_{-x_0}^{x_0} e^{-t^2} dt + \int_0^{y_0} e^{-(x_0+it)^2} dt + \int_{x_0}^{-x_0} e^{-(t+iy_0)^2} dt + \int_{y_0}^0 e^{-(-x_0+it)^2} dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

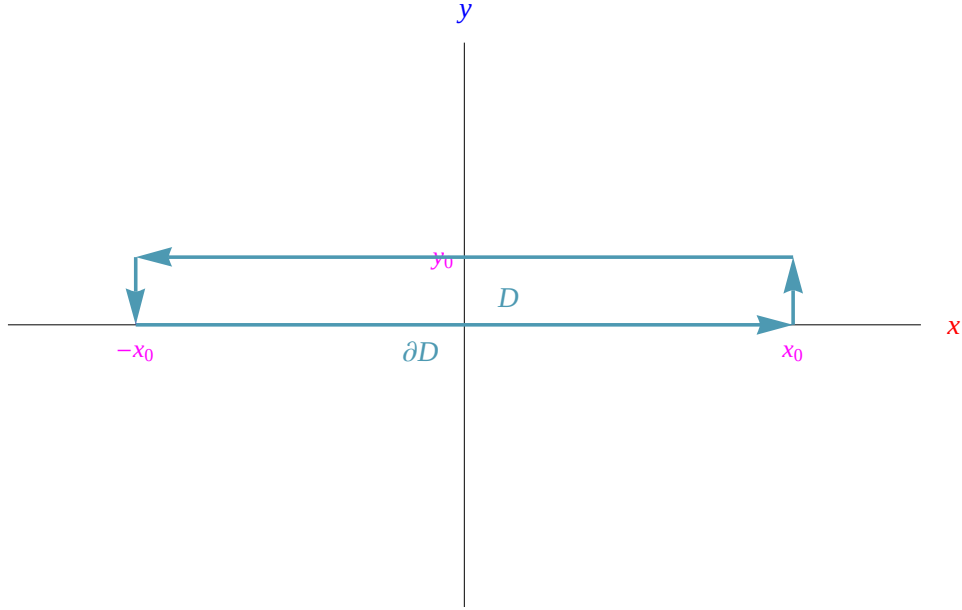


Figura 1: *Frontiera del dominio (4). Si tratta di una curva generalmente regolare orientata nel verso delle frecce.*

Eseguendo il limite per $x_0 \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \int_0^{y_0} e^{-(x_0+it)^2} dt = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \int_{y_0}^0 e^{-(-x_0+it)^2} dt = 0, \quad (10)$$

onde:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+iy_0)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (11)$$

A secondo membro troviamo un integrale gaussiano che, come è noto, vale $\sqrt{\pi}$, da cui la (1).