Esercizio di cinematica

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Il guidatore di un'automobile che viaggia a una velocità v_0, avvista una barriera B distante d (in metri). Nonostante l'azione dei freni pigiati nell'istante di avvistamento, dopo un tempo τ (in secondi) l'auto sfonda la barriera.*

1. *Assumendo il numero reale $\tau > 0$ come parametro indipendente, determinare il modulo dell'accelerazione durante la fase di rallentamento e la velocità nell'istante dell'urto. Discutere il comportamento al variare di τ. A quale intervallo deve appartenere τ affinchè l'esercizio abbia senso?*

2. *Tracciare il diagramma orario.*

(Nella fase di rallentamento si consideri un moto uniformemente ritardato).

Soluzione

Assumiamo un asse x orientato nella direzione e verso del moto, con origine nel punto di avvistamento della barriera B (fig. 1). È preferibile ragionare in termini di diagramma orario, tenendo conto che abbiamo l'ovvia equazione oraria:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2, \tag{1}$$

ovvero l'equazione (nel piano tx) di una parabola per l'origine e con la concavità verso il basso. Siccome l'auto urta la barriera, si che il vertice V della parabola ha coordinate (t_V, x_V) tali che $t_V > \tau$, come illustrato in fig. 2.

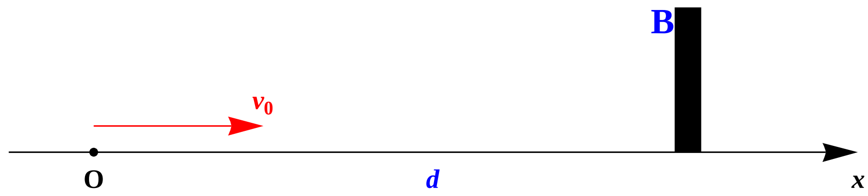

Figura 1: Esercizio 1.

Dalla (1) ricaviamo $t_V = \frac{v_0}{a}$, per cui

$$\tau < \frac{v_0}{a}$$

D'altra parte, la parabola (1) passa per il punto (τ, d), onde

$$d = v_0 \tau - \frac{1}{2} a \tau^2,$$

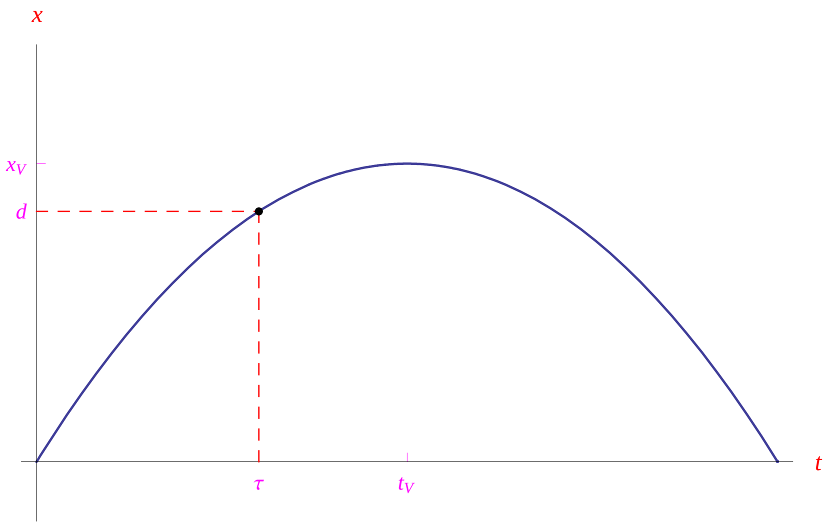

Figura 2: Esercizio 1. Andamento del diagramma della funzione (1).

da cui ricaviamo il modulo dell'accelerazione:

$$a = \frac{2}{\tau^2}(v_0\tau - d) \tag{2}$$

Per definizione di modulo, deve essere

$$a \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{\tau^2}(v_0\tau - d) \geq 0 \Longleftrightarrow \tau \geq \frac{d}{v_0} \tag{3}$$

Il caso particolare

$$\tau_0 \stackrel{def}{=} \frac{d}{v_0}, \quad a(\tau_0) = 0, \tag{4}$$

corrisponde alla situazione in cui non vengono azionati i freni, per cui il moto è rettilineo ed uniforme con velocità v_0. Escludendo questo caso, la (3) si riscrive:

$$\tau > \frac{d}{v_0} \tag{5}$$

La velocità a tutti i tempi è

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = v_0 - at$$

Ne consegue che al tempo τ – cioè nell'istante dell'urto – il modulo della velocità è

$$v_1 = v(\tau) = v_0 - a\tau$$

Tenendo conto della (2):

$$v_1 = \frac{2d}{\tau} - v_0 \tag{6}$$

Evidentemente

$$\text{l'auto urta la barriera } B \Longleftrightarrow \frac{2d}{\tau} - v_0 > 0$$

In definitiva il parametro τ deve verificare la doppia disuguaglianza:

$$\tau_0 < \tau < 2\tau_{0,}$$

dove τ_0 è dato dalla (4).

Il tracciamento del diagramma orario richiede la conoscenza dell'accelerazione nella fase di penetrazione della barriera. Assumendo una barriera impenetrabile, si ha che l'auto si ferma all'istante τ, per cui

$$x(t) = \begin{cases} v_0 t - \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 (v_0\tau - d), & t \in [0, \tau] \\ d, & t \in (\tau, +\infty) \end{cases} \tag{7}$$

La velocità:

$$v(t) = \begin{cases} v_0 - \frac{2t}{\tau^2} (v_0\tau - d), & t \in [0, \tau] \\ 0, & t \in (\tau, +\infty) \end{cases}, \tag{8}$$

per cui

$$\lim_{t \to \tau^-} v(t) = \frac{2d}{\tau} - v_0, \quad \lim_{t \to \tau^+} v(t) = 0$$

Quindi $t = \tau$ è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione $v(t)$. Ne consegue che $P(\tau, d)$ è un punto angoloso del diagramma orario, come mostrato in fig. 3.

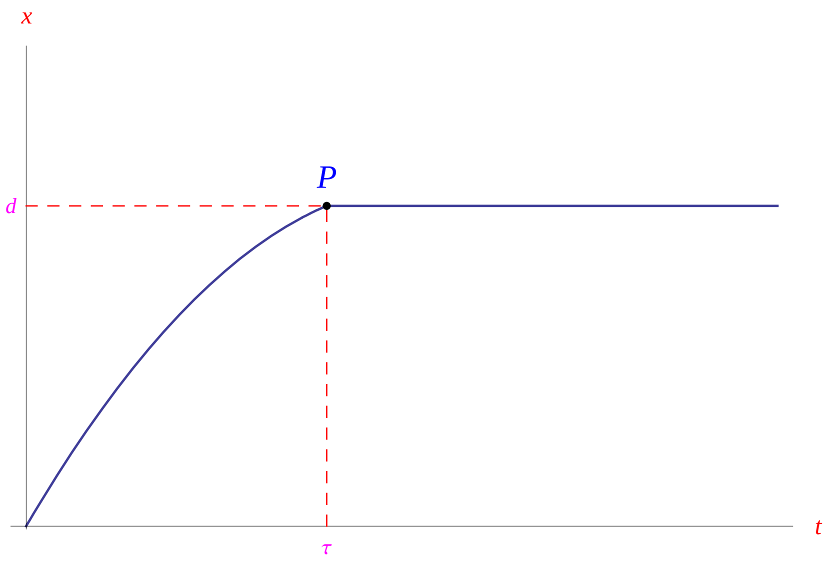

Figura 3: Esercizio 1. Diagramma orario.

Concludiamo graficando (fig. 4) la velocità in funzione del tempo data dall'eq. 8.

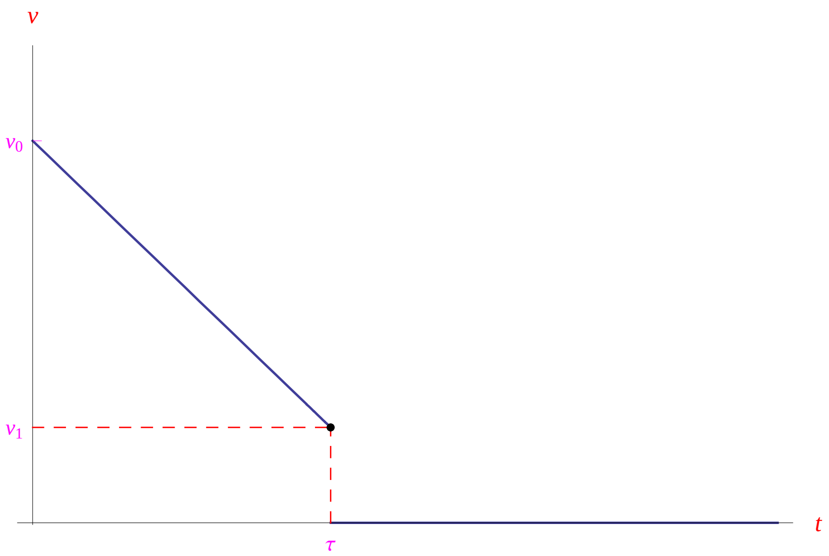

Figura 4: Esercizio 1.Andamento della velocità.