Esercizio di cinematica

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Un ascensore ha una corsa totale* $H = 190\,\mathrm{m}$. *La massima velocità raggiungibile è* $v_{\max} = 5.08\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$, *con partenza da fermo e con accelerazione costante* $a = 1.22\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2$.

1. *Determinare a quale altezza viene raggiunta la velocità massima.*

2. *In vista del termine di corsa (all'altezza* H*) il motore decelera di* $1.22\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^2$, *in modo da arrestare l'ascensore all'altezza* H. *Calcolare la durata* T *dell'intera corsa.*

Soluzione

Assumiamo un asse y orientato verso l'alto, con origine nel punto di partenza dell'ascensore $(t = 0)$. L'equazione oraria del moto si scrive:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}at^2, & 0 \leq t \leq t_1 \\ v_{\max}(t - t_1) + d_1, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -\frac{1}{2}a(t - t_2)^2 + v_{\max}(t - t_2) + d_2, & t_2 \leq t \leq T \end{cases}, \tag{1}$$

dove: t_1 è l'istante in cui viene raggiunta la velocità $v_{\max}$; d_1 è l'altezza al tempo t_1; t_2 è l'istante in cui l'ascensore inizia a rallentare; d_2 è l'altezza raggiunta all'istante t_2. Per determinare t_1 deriviamo la funzione $y(t)$, ottenendo la velocità scalare:

$$v(t) \equiv \dot{y}(t) = \begin{cases} at, & 0 \leq t \leq t_1 \\ v_{\max}, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -a(t - t_2) + v_{\max}, & t_2 \leq t \leq T \end{cases} \tag{2}$$

deve essere

$$v(t_1) = v_{\max} \Longrightarrow t_1 = \frac{v_{\max}}{a} \tag{3}$$

Quindi

$$d_1 = y(t_1) = \frac{v_{\max}^2}{2a} \simeq 10.58\,\mathrm{m} \tag{4}$$

Deve essere

$$\begin{cases} y(T) = H \\ \dot{y}(T) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Cioè

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a(T - t_2)^2 + v_{\max}(T - t_2) + d_2 = H \\ -a(T - t_2) + v_{\max} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Dalla seconda ricaviamo

$$T - t_2 = \frac{v_{\max}}{a}, \tag{7}$$

che sostituita nella prima

$$\underbrace{\frac{v_{\max}^2}{2a}}_{=d_1} + d_2 = H \Longrightarrow d_2 = H - d_1 \tag{8}$$

Nell'intervallo $[t_1, t_2]$ il moto è rettilineo ed uniforme con velocità $v_{\max}$:

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 = \frac{d_2 - d_1}{v_{\max}} \Longrightarrow t_2 &= t_1 + \frac{d_2 - d_1}{v_{\max}} \\ &\underset{d_2 = H - d_1}{=} t_1 + \frac{H - 2d_1}{v_{\max}} \\ &\underset{t_1 = \frac{v_{\max}}{a}}{=} \frac{H}{v_{\max}}, \end{aligned}$$

che ci permette di determinare la durata dell'intera corsa. Infatti, dalla (7)

$$T = t_2 + \frac{v_{\max}}{a} = \frac{H}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a} \simeq 41.57\,\mathrm{s} \tag{9}$$

In fig. 1 è riportato il diagramma orario dell'ascensore.

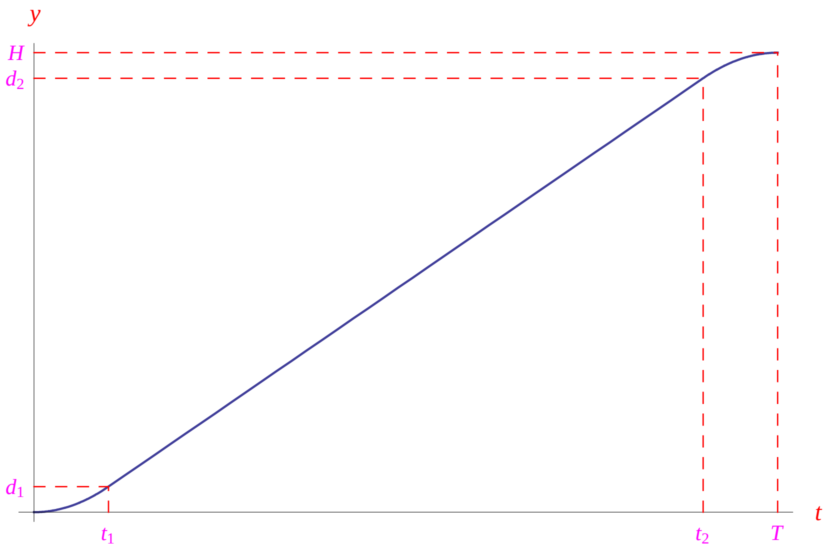

Figura 1: Diagramma orario dell'ascensore.