Intepretazione cinematica dei punti angolosi del diagramma orario

Assegnato il moto unidimensionale $x = x(t)$, supponiamo che la funzione $x(t)$ non sia derivabile in $t_1 > 0$. Più precisamente, assumiamo $x(t)$ derivabile a destra e a sinistra di t_1:

$$\dot{x}_+(t_1) = \lim_{t \to t_1^+} \dot{x}(t), \quad \dot{x}_-(t_1) = \lim_{t \to t_1^-} \dot{x}(t), \tag{1}$$

con $\dot{x}_\pm(t_1) \in \mathbb{R}$ e $\dot{x}_+(t_1) \neq \dot{x}_-(t_1)$. Ricordando che $v(t) \equiv \dot{x}(t)$, dove $v(t)$ è la velocità scalare della particella, si ha:

$$v_+(t_1) \neq v_-(t_1), \tag{2}$$

con

$$v_\pm(t_1) = \lim_{t \to t_1^\pm} v(t) \tag{3}$$

In altri termini, la funzione $v(t)$ presenta una discontinuità di prima specie nel punto t_1, con salto

$$\sigma(t_1) = v_+(t_1) - v_-(t_1) \tag{4}$$

La fig. 1 illustra una situazione tipica. Nel punto $P_1(t_1, x(t_1))$ il diagramma orario γ è privo di retta tangente, ed è l'unione degli archi γ_- e γ_+. L'arco γ_- è contenuto nel semipiano $t < t_1$, mentre l'arco γ_+ è contenuto nel semipiano $t > t_1$:

$$\begin{aligned} \gamma_- &= \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t),\ 0 \leq t \leq t_1\right\} \\ \gamma^+ &= \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x(t),\ 0 \leq t \leq t_1\right\} \\ \gamma &= \gamma_- \cup \gamma_+ \end{aligned} \tag{5}$$

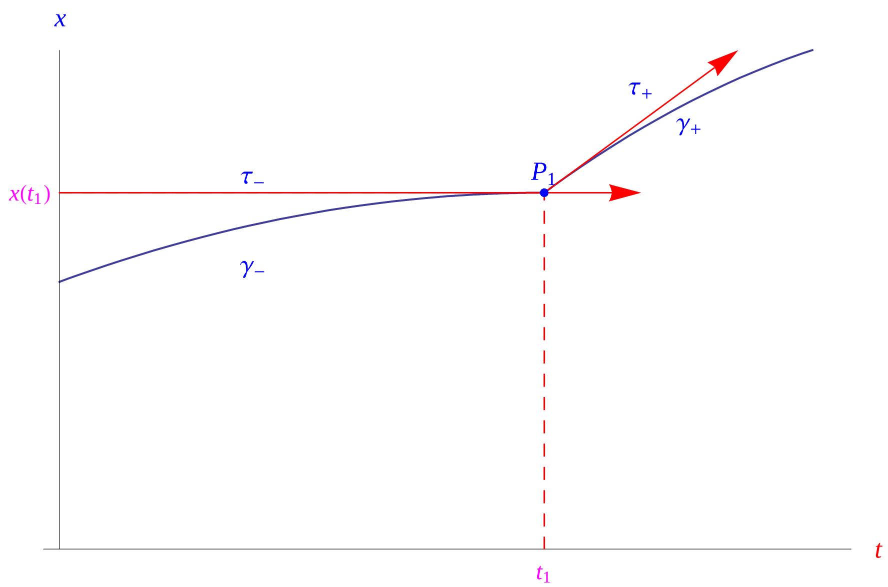

Figura 1: Qui è $\dot{x}_-(t_1) = 0$, $\dot{x}_+(t_1) > 0$.

L'arco γ_- è tangente in P_1 alla semiretta τ_- di coefficiente angolare $v_-(t_1)$:

$$\tau_- : x - x(t_1) = v_-(t_1)(t - t_1) \tag{6}$$

L'arco γ_+ è tangente in P_1 alla semiretta τ_+ di coefficiente angolare $v_+ (t_1)$:

$$\tau_+ : x - x (t_1) = v_+ (t_1) (t - t_1) \tag{7}$$

Definizione 1 *La semiretta τ_- si chiama* **semitangente sinistra** *a γ nel punto P_1. La semiretta τ_+ si chiama* **semitangente destra** *a γ nel punto P_1.*

Definizione 2 *Il punto P_1 dicesi* **punto angoloso** *di γ.*

Tale definizione è suggerita dal fatto che nel punto P_1 l'angolo tra τ_- e τ_+ è non nullo. Utilizzando un linguaggio suggestivo ma efficace, possiamo dire che una curva con punti angolosi non è liscia, ma *spigolosa.*

Esercizio 3 *Determinare gli eventuali punti angolosi del diagramma orario di equazione:*

$$x (t) = \begin{cases} 2t_1 - (t - t_1)^2, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 2t - 2 (t - t_1)^2, & t > t_1 \end{cases}, \tag{8}$$

ove t_1 è un parametro reale positivo.

Soluzione

Verifichiamo innanzitutto la continuità della funzione $x (t)$ nel punto t_1:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_1^-} x (t) &= \lim_{t \to t_1^-} \left[2t_1 - (t - t_1)^2\right] = 2t_1 \\ \lim_{t \to t_1^+} x (t) &= \lim_{t \to t_1^+} \left[2t - 2 (t - t_1)^2\right] = 2t_1 \end{aligned} \tag{9}$$

Cioè

$$\lim_{t \to t_1} x (t) = 2t_1 = x (t_1), \tag{10}$$

da cui la continuità di $x (t)$ nel punto t_1. La derivata prima è

$$\dot{x} (t) = \begin{cases} -2 (t - t_1), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 2 - 4 (t - t_1), & t > t_1 \end{cases} \tag{11}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_1^-} \dot{x} (t) &= -2 \lim_{t \to t_1^-} (t - t_1) = 0 \Longrightarrow \dot{x}_- (t_1) = 0 \\ \lim_{t \to t_1^+} \dot{x} (t) &= \lim_{t \to t_1^+} [2 - 4 (t - t_1)] = 2t_1 \Longrightarrow \dot{x}_+ (t_1) = 2 \end{aligned}$$

Cioè

$$\dot{x}_+ (t_1) \neq \dot{x}_- (t_1),$$

onde $P_1 (t_1, 2t_1)$ è un punto angoloso del diagramma orario. È facile scrivere le equazioni delle due semitangenti:

$$\begin{aligned} \tau_- &: x = 2t_1 = \text{costante} \\ \tau_+ &: x = 2t_1 t \end{aligned} \tag{12}$$

In fig. 2 riportiamo il diagramma della derivata i.e. della velocità scalare $v (t)$.

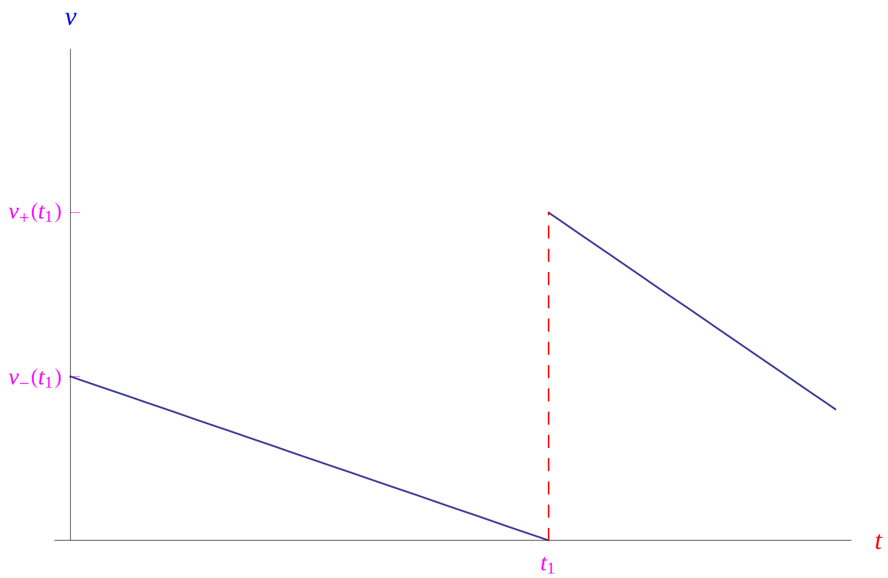

Figura 2: Diagramma cartesiano della velocità della particella (esercizio 3). Il punto t_1 è di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è $\sigma = 2t_1$.