# Una variante del paradosso di Zenone

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

All'istante $t = 0$ Achille e la Tartaruga occupano rispettivamente la posizione $A \equiv O$ e $B\left(x_b^{(0)}\right)$, come mostrato in fig. 1. In tale istante entrambi si muovono nella direzione dell'asse $x$ positivo, secondo le leggi orarie:

$$x = x_a(t), \ x = x_b(t), \tag{1}$$

con

$$x_a(t) = x_b(t)\,\xi(t), \ \ x_b(t) = v_b t + x_b^{(0)}, \ \ (v_b > 0), \tag{2}$$

ove $\xi(t)$ è una funzione ignota. Determiniamo tale funzione in modo che nel piano cartesiano $tx$ la retta di equazione

$$x = v_b t + x_b^{(0)}, \tag{3}$$

sia asintoto obliquo (a destra) per il diagramma orario $\Gamma_A$ di Achille. Cioè

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x_a(t)}{t} = v_b, \ \lim_{t\to+\infty} \left[x_a(t) - v_b t\right] = x_b^{(0)} \tag{4}$$


Figura 1: Nell'istante $t = 0$ Achille occupa l'origine del riferimento cartesiano $R(Ox)$, mentre la Tartaruga è in $B\left(x_b^{(0)}\right)$.

Dalla prima delle (4):

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x_a(t)}{t} = v_b \Longleftrightarrow \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \frac{x_b(t)}{t}}_{=v_b} \cdot \lim_{t\to+\infty} \xi(t) = v_b \Longleftrightarrow \lim_{t\to+\infty} \xi(t) = 1$$

Più precisamente

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{x_a(t)}{t} = v_b^- \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \xi(t) = 1^-$$

Ne consegue che condizione necessaria affinché la retta (3) sia asintoto obliquo per $\Gamma_A$ è che la retta $x = 1$ sia asintoto orizzontale per il diagramma cartesiano della funzione $\xi(t)$. Inoltre tale funzione verifica la condizione iniziale $\xi(0) = 0$. Stiamo quindi cercando una funzione tale che

$$\xi(0) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} \xi(t) = 1^- \tag{5}$$

Una possibile funzione è la *salita esponenziale*

$$\xi(t) = 1 - e^{-t/\tau_a},$$

dove $\tau_a > 0$ è una costante con le dimensioni di un tempo che svolge il ruolo di costante di tempo. In fig. 2 riportiamo l'andamento della salita esponenziale per diversi valori della costante di tempo, mentre in fig. 3 confrontiamo i diagrammi orari di Achille e la Tartaruga, da cui vediamo la presenza dell'asintoto obliquo.

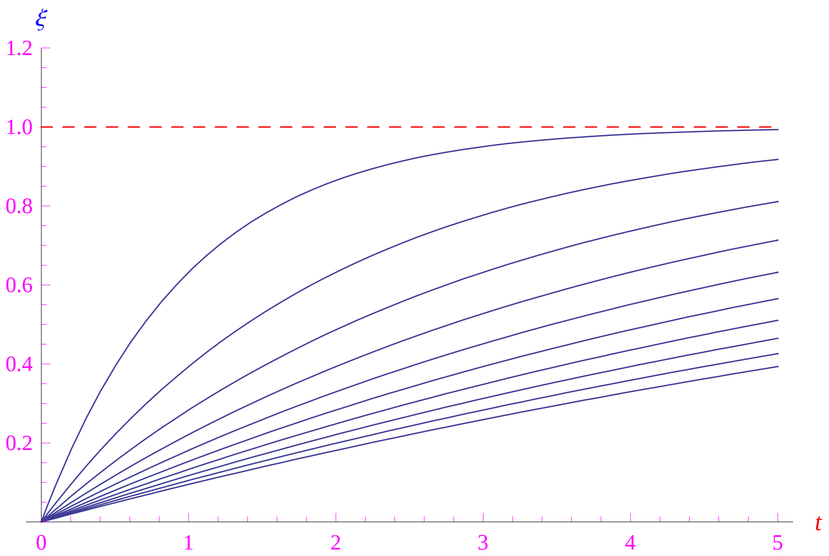


Figura 2: Andamento della salita esponenziale di Achille per diversi valori della costante di tempo.

Per determinare la velocità di Achille scriviamo

$$x_a(t) = v_b t \left(1 - e^{-t/\tau_a}\right) + x_b^{(0)} \left(1 - e^{-t/\tau_a}\right),$$

per cui

$$v_a(t) = \dot{x}_a(t) = v_b \left(1 - e^{-t/\tau_a}\right) + \frac{e^{-t/\tau_a}}{\tau_a} \left(v_b t + x_b^0\right) \tag{6}$$

Riesce

$$\lim_{t \to +\infty} v_a(t) = v_b$$

Cioè il moto di Achille è decelerato e asintoticamente uniforme con velocità $v_b$, però inizialmente la velocità è non nulla:

$$v_a(0) = \frac{x_b^{(0)}}{\tau_a}$$

Ne concludiamo che qualunque sia il valore della costante di tempo, Achille raggiungerà la Tartaruga dopo un tempo infinito. La velocità è graficata in fig. 4

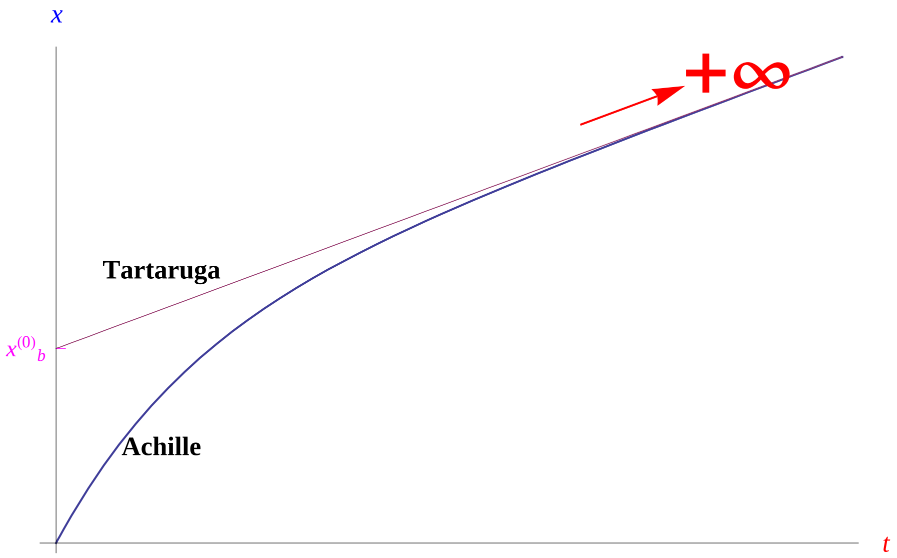


Figura 3: Confronto del diagramma orario di Achille con quello della tartaruga. Quest'ultimo è un asintoto obliquo per il primo, qualunque sia la costante di tempo di Achille.

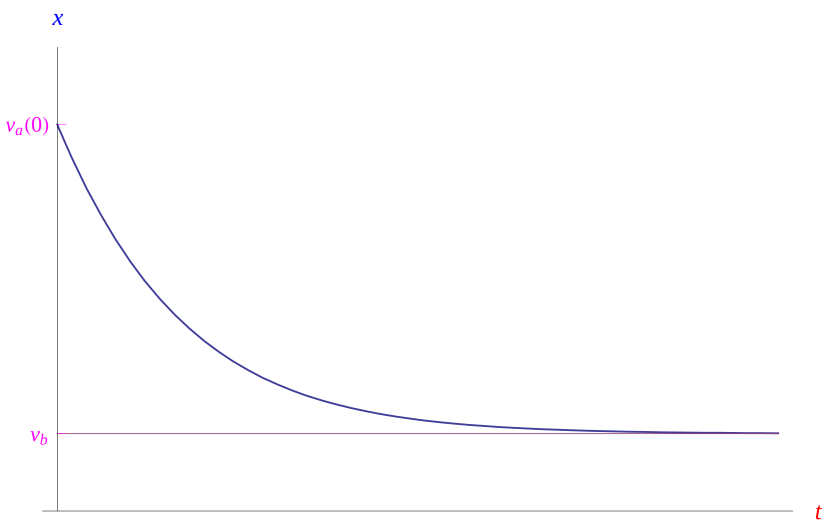


Figura 4: Velocità di Achille in funzione del tempo, confrontata con la velocità della Tartaruga.