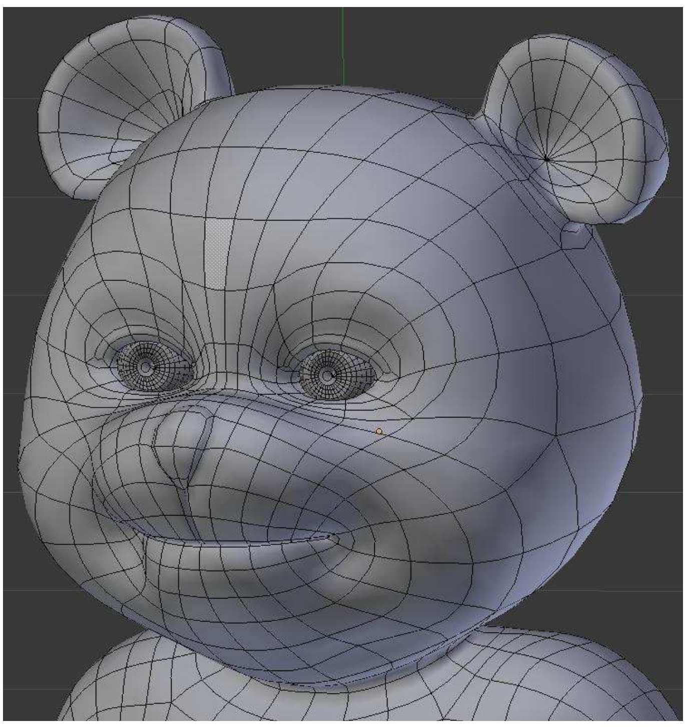
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org/
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info

# Esempi di spazi topologici

**Marcello Colozzo**



# 1 Esempi di spazi topologici

In questi appunti faremo riferimento ai seguenti teoremi e relazioni notevoli:

**Teorema 1**

$$S \text{ è connesso } \Longleftrightarrow \Big(X \subseteq S \mid X = \overset{\circ}{X} = \bar{X} \Longrightarrow X = \emptyset,\ S$$

*In altri termini, in uno spazio connesso $S$ gli unici sottoinsiemi simultaneamente aperti e chiusi sono $\emptyset$ e $S$.*

**Teorema 2** *Sia $(S, \Theta)$ uno spazio di Hausdorff compatto.*

$$X \subseteq S \mid X \text{ è chiuso}) \Longleftrightarrow X \text{ è compatto}$$

**Criterio 3** *Sia $(S, \Theta)$ uno spazio topologico.*

$$S \text{ è a base numerabile} \Longrightarrow S \text{ è separabile}$$

$$\bar{X} = X \cup \partial X \tag{1}$$
$$\overset{\circ}{X} = X - \partial X$$

Per maggiori dettagli, consultare l'ebook di topologia all'indirizzo web `http://tinyurl.com/meu7pok`.

**Esercizio 4** *Studiare lo spazio topologico $(S, \Theta_d)$ dove $S$ è un qualunque insieme non vuoto e $\Theta_d$ la topologia discreta, cioè $\Theta_d = \mathcal{P}(S)$.*

**Svolgimento.**
**Aperti di** $(S, \Theta_d)$

$$A \in \Theta_d \Longleftrightarrow A \subseteq S$$

Cioè, un qualunque sottoinsieme di $S$ è un aperto:

$$X = \overset{\circ}{X}, \quad \forall X \subseteq S \tag{2}$$

**Intorni di un punto** $x_0 \in S$
Ricerchiamo gli intorni di un qualunque $x_0 \in S$. Deve essere (per definizione di intorno):

$$U \in \mathcal{U}_{x_0} \Longleftrightarrow \exists A \in \Theta_d \mid A \subseteq U, \quad x_0 \in A$$

Ma $A \in \Theta_d \Longleftrightarrow A \subseteq S$. Dal momento che $A \in \Theta_d$ (con $x \in A$) è a sua volta un intorno di $x_0$, segue che ogni sottoinsieme di $S$ contenente $x_0$ è un intorno di $x_0$. In particolare:

$$\{x_0\} \in \mathcal{U}_{x_0}, \ \forall x_0 \in S$$

**Punti di accumulazione**
Ricerchiamo i punti di accumulazione di un qualunque $X \subseteq S$. Riesce:

$$X \cap \{x_0\} - \{x_0\} = \emptyset, \ \ \forall x_0 \in S$$

Cioè, per ogni $x_0 \in S$, esiste almeno almeno l'intorno $\{x_0\}$ in cui non cade alcun elemento di $X$ distinto di $x_0$, per cui $X$ è privo di punti di accumulazione:

$$D_r(X) = \emptyset, \ \ \forall X \subseteq S$$

Quindi $X \supseteq D_r(X) \Longrightarrow X$ è chiuso. Tenendo conto della (2):

$$X = \overset{\circ}{X} = \bar{X}, \quad \forall X \subseteq S, \tag{3}$$

ovvero ogni sottoinsieme di $X$ è simultaneamente aperto e chiuso.

**Connessione**

In virtù del teorema 1 la (3) implica la sconnessione di $S$.

**Frontiera**

Ponendo nelle (1) $X = \overset{\circ}{X} = \bar{X}$, si ottiene $\partial X = \emptyset$.

**Intorni disgiunti**

$$x, y \in S \quad (x \neq y) \Longrightarrow (\{x\}, \{y\}) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y \mid \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$$

Cioè $(S, \Theta_d)$ è uno spazio di Hausdorff.

**Compattezza**

**Proposizione 5**

$$X \subseteq S \text{ è compatto} \Longleftrightarrow X \text{ è finito}$$

**Dimostrazione. Implicazione inversa.**

Per ipotesi è $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$. Sia $\mathcal{R} = \{A_k\}_{k \in \mathcal{N}}$ un qualunque ricoprimento aperto di $X$.

$$\bigcup_{k \in \mathcal{N}} A_k \supseteq X = \{x_1, x_2, ..., x_N\} \Longrightarrow \exists \{A_{k_1}, ..., A_{k_N}\} \mid x_{k_r} \in A_{k_r} \quad (r = 1, 2, ..., N)$$

$$\Longrightarrow \{A_{k_1}, ..., A_{k_N}\} \subset \mathcal{R} \mid \bigcup_{r=1}^{N} A_{k_r} \supseteq X,$$

cioè $\{A_{k_1}, ..., A_{k_N}\}$ è un ricoprimento finito di $X$ contenuto in $\mathcal{R}$. Dall'arbitriarità di $\mathcal{R}$ segue la compattezza di $X$.

**Implicazione diretta.**

$\{\{x\}\}_{x \in X}$ è manifestamente un ricoprimento aperto di $X$. La compattezza di $X$ implica: $\exists \mathcal{R}_N \subset \{\{x\}\}_{x \in X}$, dove $\mathcal{R}_N$ è un ricoprimento finito di $X$. Ad esempio, $\mathcal{R}_N = \{\{x_1\}, ..., \{x_N\}\} \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{N} \{x_k\} \supseteq X \Longrightarrow X$ è costituito al più da $N < +\infty$ elementi. ■

Dalla proposizione appena dimostrata segue che $(S, \Theta_d)$ è compatto se e solo se $S$ è finito. In tal caso $(S, \Theta_d)$ è uno spazio di Hausdorff compatto e per il teorema 2 ogni $X \subseteq S$ chiuso è compatto. Ma per quanto precede, ogni $X \subseteq S$ è chiuso, per cui se $S$ è finito, ogni suo sottoinsieme è compatto. In geneale, $S$ è localmente compatto, poichè $\{x_0\}$ è compatto in quanto finito, per ogni $x_0 \in S$. In sintesi:

$$(S, \Theta_d) \begin{cases} \text{compatto,} & \text{se } S \text{ è finito} \\ \text{localmente compatto,} & \text{se } S \text{ è infinito} \end{cases}$$

**Separabilità**

Per quanto visto in http://tinyurl.com/meu7pok $(S, \Theta_d)$ è a base numerabile se e solo se $S$ è al più infinito numerabile. Ne consegue che se $S$ è al più infinito numerabile, in virtù del criterio 3, $S$ è separabile.

**Successioni convergenti**

**Proposizione 6** *Nello spazio topologico $(S, \Theta_d)$ le successioni convergenti sono tutte e sole quelle definitivamente costanti.*

**Dimostrazione.** Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ convergente:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi_0 \in S$$

Cioè:

$$\forall U \in \mathcal{U}_{\xi_0}, \ \exists \nu \in \mathbb{N} \mid n > \nu \Longrightarrow x_n \in U \tag{4}$$

Osservando che nella topologia assegnata $\{\xi_0\}$ è un intorno di $\xi_0$, se è verificata la (4) deve aversi:

$$(\exists \nu \in \mathbb{N} \mid n > \bar{\nu} \Longrightarrow x_n \in \{\xi_0\}),$$

cioè $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente costante:

$$x_n = \xi_0, \ \ \forall n > \bar{\nu}$$

■

**Esercizio 7** *Studiare lo spazio topologico $(S,\Theta)$ dove $S$ è un qualunque insieme non vuoto e $\Theta$ la topologia banale, cioè $\Theta = \{\emptyset, S\}$.*

**Svolgimento.**

**Aperti di** $(S,\Theta)$

Gli unici aperti di $S$ sono $\emptyset$ ed $S$.

**Intorni di un punto** $x_0 \in S$

Assegnato ad arbitrio $x_0 \in S$, l'unico intorno di $S$ è $S$. Cioè:

$$\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}, \ \ U = S \tag{5}$$

**Punti di accumulazione**

Ricerchiamo i punti di accumulazione di un qualunque $X \subseteq S \mid X \neq \emptyset$. Deve essere:

$$x_0 \in D_r(X) \Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_{x_0}, \ \ X \cap U - \{x_0\} \neq \emptyset$$

Per la (5):

$$\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}, \ \ X \cap U - \{x_0\} = \underbrace{X \cap S}_{=X} - \{x_0\} = X - \{x_0\},$$

onde:

$$x_0 \in D_r(X) \Longleftrightarrow X - \{x_0\} \neq \emptyset$$

Separiamo i due casi:

1. $x_0 \notin X \Longrightarrow X - \{x_0\} = X \neq \emptyset$
2. $x_0 \in X \Longrightarrow X - \{x_0\} \begin{cases} \neq \emptyset, & \text{se } X \supset \{x_0\} \\ = \emptyset, & \text{se } X = \{x_0\} \end{cases}$

Ne consegue che ogni punto non appartenente a $X$ è di acumulazione per $X$, onde:

$$C(X) \subseteq D_r(X)$$

Se $X$ non è costituito da un solo elemento, ogni punto di $X$ è di accumulazione per $X$:

$$D_r(X) = X \cup C(X) = S$$

Se $X = \{x_0\}$, per quanto precede è $x_0 \notin D_r(X)$, quindi:

$$D_r(X) = C(X)$$

Conclusione:

$$D_r(X) = \begin{cases} C(X), & \text{se } \exists! x \in X \\ S, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{6}$$

**Punti di aderenza**

Dalla (6)

$$\bar{X} = X \cup D_r(X) = \begin{cases} X \cup C(X) = S, & \text{se } \exists! x \in X \\ X \cup S = S, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Cioè

$$\bar{X} = S, \ \forall X \subseteq S \mid X \neq \emptyset \tag{7}$$

**Insiemi chiusi**

Dalla (7) segue che $X \subseteq S$ è chiuso se e solo se $X = S$, onde gli unici sottoinsiemi chiusi sono $\emptyset, S$. Per essere più specifici, $\emptyset, S$ sono gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi. Infatti:

$$x \in \overset{\circ}{X} \Longleftrightarrow \exists A \in \Theta \mid A \subseteq X, \ x \in A$$

Ma

$$\forall A \in \Theta - \{\emptyset\}, \ A = S \Longrightarrow \nexists A \in \Theta \mid A \subseteq X$$

Cioè

$$\overset{\circ}{X} = \emptyset, \quad \forall X \subset S$$

**Connessione**

In virtù del teorema 1 la conclusione precedente implica la connessione di $S$. Anche ogni sottoinsieme di $S$ è connesso.

$\forall X \subset S, \ \nexists (A, B) \mid A, B \neq \emptyset, \ A \cup B = S, \ A \cap B = \emptyset$, con $A, B$ contemporaneamente aperti o chiusi

giacchè l'unico aperto non vuoto è $S$. Ne consegue che $X$ è connesso.

**Frontiera**

Risulta $\forall U \in \mathcal{U}_x, \ U = S$, quindi per ogni $X \subset S$ non vuoto:

$$\begin{cases} X \cap S = X \neq \emptyset \\ C(X) \cap S = C(X) \neq \emptyset \end{cases} \tag{8}$$

Le (8) sono verificate per ogni $x \in S$, per cui:

$$\partial X = S, \ \forall X \subset S, \ X \neq \emptyset$$

**Intorni disgiunti**

$$\forall x, y \in S \quad (x \neq y), \ \exists! (U, V) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y \mid U = V = S,$$

onde:

$$U \cap V \neq \emptyset, \ \forall (U, V) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y,$$

per cui $(S, \Theta_d)$ non è uno spazio di Hausdorff.

**Compattezza**

**Proposizione 8**

*$X$ è compatto, $\forall X \subseteq S$*

**Dimostrazione.** Il più generale ricoprimento aperto di $X$ è $\mathcal{R} = \{\emptyset, S\} \supset \{S\}$ che è un ricoprimento finito di $X$, onde l'asserto. ■

**Separabilità**

$(S, \Theta)$ è manifestamente a base numerabile, onde in virtù del criterio 3, $S$ è separabile. Inoltre, dalla Dalla (7) segue che ogni sottoinsieme non vuoto di $S$ è ovunque denso in $S$.

**Successioni convergenti**

**Proposizione 9** *Assegnata ad arbitrio la successione* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$*, si ha:*

$$\forall \xi_0 \in S, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \xi_0$$

*Cioè* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a un qualunque punto dello spazio.*

**Dimostrazione.** Per definizione di convergenza:

$$\forall U \in \mathcal{U}_{\xi_0}, \ \exists \nu \in \mathbb{N} \mid n > \nu \Longrightarrow x_n \in U \tag{9}$$

Ma $\forall U \in \mathcal{U}_{\xi_0}, \ U = S$, per cui la (9) è verificata per ogni $\xi_0 \in S$. ∎

**Esercizio 10** *Sia* $S = \{x, y\}$ *con* $x \neq y$*. Assegnato l'insieme* $\Theta = \{\emptyset, S, \{y\}\} \subset \mathcal{P}(S)$*, mostrare che* $(S, \Theta)$ *è uno spazio topologico. dopodichè si studi tale spazio.*

**Svolgimento**

Il primo assioma di spazio topologico è verificato, giacchè $\emptyset, S \in \Theta$. Per verificare il secondo assioma determiniamo le possibili unioni di aperti di $S$. Abbiamo:

$$\emptyset \cup S = S \in \Theta, \quad \emptyset \cup \{y\} = \{y\} \in \Theta, \quad S \cup \{y\} = S \in \Theta,$$

per cui è verificato l'assioma 2. La verifica del terzo assioma è altrettanto immediata:

$$\emptyset \cap S = \emptyset \in \Theta, \quad \emptyset \cap \{y\} = \emptyset \in \Theta, \quad S \cap \{y\} = \{y\} \in \Theta$$

**Aperti di $(S, \Theta)$**

Gli aperti non vuoti di $S$ sono $S$ e $\{y\}$.

**Intorni**

$$U \in \mathcal{U}_x \Longleftrightarrow \exists A \in \{S, \{y\}\} \mid A \subseteq U, \ \ x \in A,$$

da cui

$$\mathcal{U}_x = \{S\},$$

cioè l'unico intorno di $x$ è $S$. Determiniamo gli intorni di $y$:

$$V \in \mathcal{U}_x \Longleftrightarrow \exists A \in \{S, \{y\}\} \mid A \subseteq V, \ \ y \in A,$$

da cui

$$\mathcal{U}_y = \{\{y\}, S\}$$

**Punti di accumulazione – Insiemi chiusi**

Poniamo $X = \{x\}, \ Y = \{y\}$. Riesce:

$$\forall U \in \mathcal{U}_x, \ \ U \cap (X - \{x\}) = U \cap (\{x\} - \{x\}) = \emptyset \Longrightarrow x \notin D_r(X)$$
$$\forall V \in \mathcal{U}_y, \ \ V \cap (X - \{y\}) = \begin{cases} S \cap \{x\} = \{x\} \neq \emptyset, & \text{se } V = S \\ \{y\} \cap \{x\} = \emptyset, & \text{se } V = \{y\} \end{cases} \Longrightarrow y \notin D_r(X)$$

Ne consegue $D_r(X) = \emptyset$, per cui $X$ è chiuso. Determiniamo i punti di accumulazione di $Y$.

$$\forall V \in \mathcal{U}_y, \ \ V \cap (Y - \{y\}) = V \cap (\{y\} - \{y\}) = \emptyset \Longrightarrow y \notin D_r(Y)$$
$$\forall U \in \mathcal{U}_x, \ \ U \cap (Y - \{x\}) \underset{U=S}{=} S \cap \{y\} = \{y\} \neq \emptyset \Longrightarrow x \in D_r(Y)$$

Cioè $D_r(Y) = \{x\}$, per cui $Y$ non è chiuso. Per quanto precede, $Y$ è aperto giacchè è un elemento di $\Theta$.

**Punti di aderenza – Separabilità**

Siccome $X$ è chiuso, ogni suo punto è di aderenza.

$$\bar{Y} = Y \cup D_r(Y) = S,$$

cioè ogni punto di $S$ è di aderenza per $Y$. Ciò implica che $Y$ è ovunque denso in $S$ ed è finito, onde $S$ è separabile.

**Frontiera**

Riesce:

$$\begin{cases} X \cap S = X \neq \emptyset \\ C(X) \cap S = Y \cap S \neq \emptyset \end{cases} \Longrightarrow x \in \partial X$$

Inoltre:

$$X \cap \{y\} = \emptyset \Longrightarrow y \notin \partial X$$

Quindi $\partial X = \{x\}$. Determiniamo $\partial Y$:

$$\begin{cases} Y \cap S \neq \emptyset \\ C(Y) \cap S = X \cap S \neq \emptyset \end{cases} \Longrightarrow x \in \partial Y$$

$$\begin{cases} Y \cap \{y\} \neq \emptyset \\ X \cap \{y\} = \emptyset \end{cases} \Longrightarrow y \notin \partial Y$$

Quindi $\partial Y = \{x\}$.

**Connessione**

Gli unici sottoinsiemi simultaneamente aperti e chiusi sono $\emptyset$ ed $S$, onde in virtù del teorema 1 $S$ è connesso, come anche $X$ e $Y$.

**Compattezza**

$\mathcal{R} = \{S, \{y\}\}$ è il più generale ricoprimento aperto di $X$. Riesce $\mathcal{R} \supset \{S\}$, dove $\{S\}$ è manifestamente un ricoprimento finito di $X$, onde $X$ è compatto. In maniera simile si dimostra la compattezza di $Y$.

**Successioni convergenti**

**Proposizione 11**

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x \tag{10}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = y \Longleftrightarrow \exists \nu \in N \mid n > \nu \Longrightarrow x_n = y$$

*Cioè, tutte le successioni sono convergenti a $x$, mentre le successioni definitivamente costanti - con la costante pari a $y$ - oltre a convergere a $x$, convergono anche a $y$.*

**Dimostrazione.** È chiaro che scrivendo

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi_0 \in S, \tag{11}$$

può essere $\xi_0 = x$ o $\xi_0 = y$. Separiamo i due casi:

1. $\xi_0 = x$

   $$\forall U \in \mathcal{U}_x, \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \mid n > \nu \Longrightarrow x_n \in U$$

   Ma $\mathcal{U}_x = \{S\}$, quindi $\exists \nu \in \mathcal{N} \mid n > \nu \Longrightarrow x_n \in S$, che è sempre verificata, onde la prima delle (10).

2. $\xi_0 = y$
$$\forall V \in \mathcal{U}_y, \ \ \exists \nu \in \mathbb{N} \mid n > \nu \Longrightarrow x_n \in V \tag{12}$$
Ricordando che $\mathcal{U}_y = \{S, \{y\}\}$, si ha che per $V = S$ la (12) è sempre verificata. Se $V = \{y\}$ la (12) si scrive:
$$n > \nu \Longrightarrow x_n \in \{y\} \, ,$$
da cui la seconda delle (10).

■

**Esercizio 12** *Studiare lo spazio topologico* $(S, \Theta)$ *dove* $S = [0,1]$*, mentre gli elementi di* $\Theta$ *sono specificati nel corso dello svolgimento.*

**Svolgimento**
Poniamo:
$$\Theta' = \left\{ \emptyset, [0,1] \, , \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k \right\}, \tag{13}$$
con $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k$ al più infinito numerabile. Ne consegue:
$$Y_k = \bigcup_{n \in \mathcal{N}_k} \{x_n\} \, ,$$
dove $x_n \in [0,1] \, , \ \ \forall n \in \mathcal{N}_k \subseteq \mathbb{N}$. Per evitare sovrapposizioni di punti, imponiamo la condizione:
$$k \neq k' \Longrightarrow \mathcal{N}_k \cap \mathcal{N}_{k'} = \emptyset,$$
ciò implica:
$$Y_k \cap Y_{k'} = \emptyset, \quad \forall k \neq k'$$
Ad esempio:
$$\mathcal{N}_0 = \{0, 2, 5, 8\} \Longrightarrow 0, 2, 5, 8 \notin \mathcal{N}_k, \quad \forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$$
onde una possibile scelta è $\mathcal{N}_1 = \{1, 3, 7\} \, , \mathcal{N}_2 = \{6\}$, per cui otteniamo i tre insiemi:
$$Y_0 = \{x_0, x_2, x_5, x_8\} \, , \ \ Y_1 = \{x_1, x_3, x_7\} \, , \ \ Y_2 = \{x_6\}$$
I punti $x_0, ..., x_8$ così "costruiti", appartengono a $[0,1]$. Ad esempio, possiamo avere
$$x_0 = \frac{\pi}{4}, \ \ x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \ x_2 = 1, \ \ x_3 = 0, \ \ x_4 = \frac{1}{2}, \ \ x_5 = \frac{e}{4}, \ \ x_6 = \sin(\pi e) \, , \ \ x_7 = \frac{1}{10}, \ \ x_8 = \frac{1}{4},$$
cosicchè:
$$Y_0 = \left\{ \frac{\pi}{4}, 1, \frac{e}{4}, \frac{1}{4} \right\}, \ \ Y_1 = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{1}{10} \right\}, \ \ Y_2 = \{\sin(\pi e)\} \tag{14}$$
Si tratta, dunque, di punti che possono essere enumerati. Con tale procedimento riusciamo a rappresentare tutti e soli i sottoinsiemi di $[0,1]$ al più infiniti numerabili. Definiamo:
$$\Theta = \{[0,1] - Y \mid Y \in \Theta'\} \tag{15}$$
Cioè gli elementi di $\Theta$ sono i complementari degli elementi di $\Theta'$. Mostriamo che $\Theta$ è una topologia.
$$[0,1] \in \Theta' \Longrightarrow [0,1] - [0,1] = \emptyset \in \Theta$$
$$\emptyset \in \Theta' \Longrightarrow [0,1] - \emptyset = [0,1] \in \Theta,$$

per cui è verificato il primo assioma di spazio topologico. Esplicitiamo l'insieme $\Theta$:

$$\Theta = \left\{ \emptyset, [0,1], \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k \right\}, \tag{16}$$

dove:

$$X_k \stackrel{def}{=} [0,1] - Y_k = [0,1] - \bigcup_{n \in \mathcal{N}_k} \{x_n\} \tag{17}$$

Ad esempio, se scegliamo $Y_0, Y_1, Y_2$ conformemente alla (14) si ha:

$$X_0 = [0,1] - \left\{ \frac{\pi}{4}, 1, \frac{e}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$
$$X_1 = [0,1] - \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{1}{10} \right\}$$
$$X_2 = [0,1] - \{\sin(\pi e)\}$$

Risulta:

$$\forall Y_k \in \Theta', \ \bigcap_{k=1}^{N} Y_k \text{ è al più infinito numerabile} \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{N} Y_k \in \Theta'$$

Quindi:

$$\bigcap_{k=1}^{N} X_k = \bigcap_{k=1}^{N} ([0,1] - Y_k) = \left( [0,1] - \bigcap_{k=1}^{N} Y_k \right) \in \Theta$$

e

$$\emptyset \cap [0,1] = \emptyset \cap X_k = \emptyset \in \Theta,$$

resta così verificato l'assioma 2. Passiamo alla verifica dell'assioma 3. Per la (13):

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k \in \Theta'$$

Quindi:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ([0,1] - Y_k) = \left( [0,1] - \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k \right) \in \Theta,$$

e

$$\emptyset \cup [0,1] = [0,1] \in \Theta, \quad \emptyset \cup X_k = X_k \in \Theta, \quad [0,1] \cup X_k = [0,1] \in \Theta$$

resta così verificato l'assioma 3. Ne consegue che $([0,1], \Theta)$ è uno spazio topologico.

**Aperti di** $([0,1], \Theta)$

Gli aperti non vuoti di $([0,1], \Theta)$ sono $[0,1]$ e $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$.

**Intorni di** $\xi_0 \in [0,1]$

$[0,1]$ è manifestamente un intorno di $\xi_0$, come anche $X_k$ (eq. (17)) per $x_n \neq \xi_0$:

$$X_k \in \mathcal{U}_{\xi_0} \Longleftrightarrow x_n \neq \xi_0, \quad \forall n \in \mathcal{N}_k$$

**Intorni disgiunti**

Assegnati ad arbitrio $x, y \in [0,1]$ con $x \neq y$, siano $U$ e $V$ intorni qualsiasi di $x$ e $y$ rispettivamente. Studiamo l'insieme $U \cap V$.

$$\begin{aligned} U = [0,1] &\Longrightarrow U \cap V = V \neq \emptyset \\ V = [0,1] &\Longrightarrow U \cap V = U \neq \emptyset \end{aligned} \tag{18}$$

Le rimanenti possibilità sono:

$$U = [0,1] - \bigcup_{n \in \mathcal{N}_k} \{x_n\} \mid x_n \neq x$$

$$V = [0,1] - \bigcup_{n \in \mathcal{N}'_k} \{y_n\} \mid y_n \neq y$$

In tal caso riesce:

$$\exists z \in [0,1] \mid z \notin \bigcup_{n \in \mathcal{N}_k} \{x_n\}, \bigcup_{n \in \mathcal{N}'_k} \{y_n\} \Longrightarrow z \in U, V \Longrightarrow U \cap V \supset \{z\} \Longrightarrow U \cap V \neq \emptyset$$

Tenendo conto anche della (18):

$$\forall (U, V) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y, \quad U \cap V \neq \emptyset$$

Cioè $([0,1], \Theta)$ non è uno spazio di Hausdorff.

**Punti di accumulazione**

Preso ad arbitrio $X \subseteq [0,1]$:

$$\xi_0 \in D_r(X) \Longleftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_{\xi_0}, \quad U \cap (X - \{\xi_0\}) \neq \emptyset$$

Ricordiamo che $\mathcal{U}_{\xi_0} = \left\{[0,1], \tilde{X}_0, \tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_k, ...\right\}$, dove

$$\tilde{X}_k \stackrel{def}{=} \left\{x \in \left([0,1] - \bigcup_{n \in \mathcal{N}_k} \{x_n\}\right) \mid x_n \neq \xi_0\right\} \subseteq X_k$$

Riesce:

$$U = [0,1] \Longrightarrow [0,1] \cap (X - \{\xi_0\}) \neq \emptyset$$

Se $U = \tilde{X}_k$, dobbiamo studiare l'intersezione $\tilde{X}_k \cap (X - \{\xi_0\})$ al variare di $k \in \mathbb{N}$. Separiamo i due casi:

1. $X$ è al più infinito numerabile.

   **a.** $\xi_0 \in X$, cosicchè:

   $$X = \{\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{N \leq +\infty}\} \tag{19}$$

   Posto

   $$U = [0,1] - \bigcup_{k=1}^{N} \{\xi_k\}, \tag{20}$$

   si ha $U \in \mathcal{U}_{\xi_0}$ e $U \cap (X - \{\xi_0\}) = \emptyset$, per cui comunque prendiamo $\xi_0 \in [0,1]$, $\xi_0$ non è punto di accumulazione per $[0,1]$ o ciò che è lo stesso $D_r(X) = \emptyset$.

   **b.** $\xi_0 \notin X$, cosicchè:

   $$X = \{\xi_1, ..., \xi_{N \leq +\infty}\}$$

   Anche in questo caso l'aperto (20) è un intorno di $\xi_0$, risultando $U \cap (X - \{\xi_0\}) = \emptyset$, per cui comunque prendiamo $\xi_0 \in [0,1] - X$, $\xi_0$ non è punto di accumulazione per $[0,1]$.

2. $X$ è infinito non numerabile. In questo caso risulta:

$$D_r(X) = [0,1]$$

**Punti di aderenza – Insiemi aperti e chiusi**

La conoscenza di $D_r(X)$ ci consente di determinare la chiusura di $X$:

$$\bar{X} = X \cup D_r(X) = \begin{cases} X \cup \emptyset = X, & \text{se } X \text{ è al più infinito numerabile} \\ X \cup [0,1] = [0,1], & \text{se } X \text{ è infinito non numerabile} \end{cases} \tag{21}$$

Cioè $X$ è chiuso se e solo se è al più infinito numerabile, mentre è ovunque denso in $[0,1]$ se e solo se è infinito non numerabile. Gli insiemi aperti sono ovviamente gli elementi di $\Theta$, ovvero $[0,1]$ e i sottoinsiemi di $[0,1]$ privati di un insieme di punti al più infinito numerabile. Dal momento che gli elementi di $\Theta$ sono infiniti non numerabili, segue che ogni sottoinsieme al più infinito non numerabile non è un elemento di $\Theta$, per cui non è aperto. Infatti, per quanto precede, un insieme è chiuso se e solo se è al più infinito numerabile. Condizione necessaria affinchè $X$ sia aperto è che sia infinito non numerabile. Tale condizione non è però sufficiente. Ad esempio, se $X = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$x \in \mathring{X} \Longleftrightarrow \exists A \in \Theta \mid A \subseteq X, \ \ x \in A$$

Gli aperti non vuoti sono $[0,1]$ e $X_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Escludendo $[0,1]$ in quanto non contenuto in $X$, deve essere:

$$x \in \mathring{X} \Longleftrightarrow \exists X_k \in \Theta \mid X_k \subseteq X, \ \ x \in X_k \tag{22}$$

Ma $\nexists k \in \mathbb{N} \mid X_k \subseteq X$, onde $\mathring{X} = \emptyset$. È chiaro che la (22) è verificata se e solo se

$$\exists \mathcal{M}_k \subseteq \mathbb{N} \mid X = [0,1] - \bigcup_{m \in \mathcal{M}_k} \{x_m\}, \ \ x_m \in [0,1]$$

Infatti

$$\exists \mathcal{N}_k \subseteq \mathbb{N} \mid [0,1] - \bigcup_{n \in \mathcal{N}_k} \{x_n\} \subseteq [0,1] - \bigcup_{m \in \mathcal{M}_k} \{x_m\}$$

Tale conclusione è banale, poichè $X = [0,1] - \bigcup_{m \in \mathcal{M}_k} \{x_m\}$ è manifestamente un elemento di $\Theta$, onde $\mathring{X} \neq \emptyset$, essendo $\mathring{X} = X$. Ci ritroviamo anche con l'asserzione precedente: $X$ è chiuso se e solo se è al più infinito numerabile. Infatti, un generico $X \subset [0,1]$ al più infinito numerabile, è il complementare di un elemento di $\Theta$, cioè di un aperto, onde è necessariamente chiuso.

**Successioni convergenti**

Studiamo la convergenza di una generica successione di punti di $([0,1], \Theta)$. Cioè, assegnata la successione $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ vogliamo stabilire l'esistenza di un punto $y_0 \in [0,1]$ tale che:

$$\lim_{m \to +\infty} y_m = y_0$$

Applichiamo la definizione di convergenza:

$$\forall X_k = [0,1] - \bigcup_{n \in \mathcal{N}_k} \{x_n\} \ \ (x_n \neq y_0, \ \ \forall n \in \mathcal{N}_k), \ \exists \nu \in \mathbb{N} \mid m > \nu \Longrightarrow y_m \in X_k$$

Equivalente a:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ \exists \nu_k \in \mathbb{N} \mid m > \nu_k \Longrightarrow y_m \in [0,1] - \bigcup_{n \in \mathcal{N}_k} \{x_n\} \ \ (x_n \neq y_0, \ \ \forall n \in \mathcal{N}_k)$$

che è verificata se e solo se $y_m = y_0$, $\ \forall m > \nu_k$. Ne consegue che nello spazio topologico $([0,1], \Theta)$ una successione converge se e solo se è definitivamente costante.